Matemática 2
Geometria Plana

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

EDITORA COC
www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP

Capítulo 01. A Base da Geometria

Capítulo 02. Triângulos

PV2D-06-MAT-21

Capítulo 03. Quadriláteros Notáveis

Capítulo 04. Ângulos na Circunferência

índice.matemática 2

Capítulo 08. Relações Métricas na Circunferência

Capítulo 09. Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Capítulo 10. Senos e Co-Senos: Teoremas

Capítulo 11. Polígonos Regulares: Apótemas

Capítulo 12. Comprimento de Circunferências e Arcos

PV2D-06-MAT-21

Capítulo 01. A Base da Geometria

1. Introdução

Existem indícios de que os primeiros conhecimentos de Geometria foram desenvolvidos por volta de 2000 a.C. pelos **babilônios**, e cerca de 1300 anos a.C. pelos **egípcios**, na tentativa de resolver problemas do cotidiano, como a demarcação de terras ou a construção de edifícios. No entanto, foram os **gregos**, por volta de 600 a.C., os primeiros a sistematizar e organizar tudo que se conhecia sobre o assunto até sua época.

O principal trabalho dos gregos foi feito por **Euclides**, por volta de 300 a.C., que escreveu um tratado de Geometria, chamado **Elementos**.

A preocupação central de Euclides em sua obra é a demonstração de propriedades geométricas com o auxílio da **Lógica**.

Da mesma forma que Euclides, iniciamos este livro apresentando neste capítulo os **conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas**, que serão básicos para o desenvolvimento da Geometria, aqui chamada **euclidiana**, em homenagem ao seu principal organizador.

2. Conceitos Primitivos, Definições e Notações

2.1. Por que nem tudo pode ser definido em uma Teoria?

Sempre que definimos algum elemento em uma teoria, usamos, como ferramenta de linguagem, outros elementos já definidos anteriormente.

Exemplo

"Triângulo é a reunião de três segmentos consecutivos determinados por três pontos não colineares".

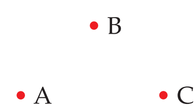
Essa definição só pode ser apresentada após o conhecimento dos conceitos de: reunião, segmentos consecutivos e pontos não colineares; e esses conceitos só podem ser apresentados a partir de outros, e assim por diante.

Porém, essa seqüência de conceitos previamente apresentados não pode ser prolongada indefinidamente. É necessário estabelecer um ponto de partida, isto é, alguns conceitos devem ser adotados sem definição (**conceitos primitivos**), para que todos os demais possam ser apresentados a partir deles.

São **conceitos primitivos** na Geometria euclidiana:

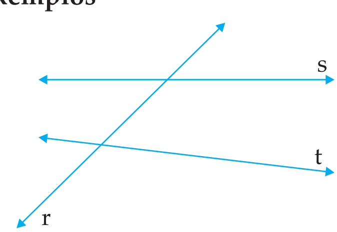
- **Ponto** (indicado por letra maiúscula latina)

Exemplos



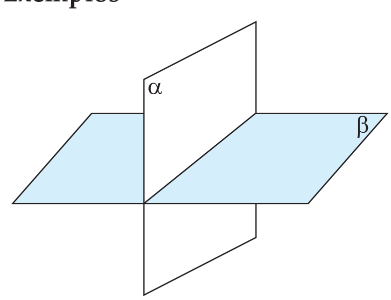
- **Reta** (indicada por letra minúscula latina).

Exemplos



- **Plano** (indicado por letra minúscula grega)

Exemplos



2.2. Estar entre: um Conceito Primitivo

A noção de **estar entre** é um conceito primitivo que obedece às seguintes condições:

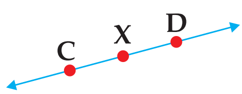
1ª) Se P **está entre** A e B, então A, B e P são distintos dois a dois.

2ª) Se P **está entre** A e B, então A, B e P são colineares (estão na mesma reta).

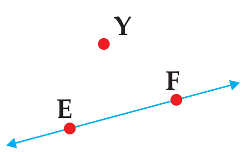
3ª) Se P **está entre** A e B, então A não **está entre** B e P, e B não **está entre** A e P.

4ª) Se A e B são dois pontos distintos, então existe um ponto P que **está entre** A e B.

Exemplos



X está entre **C** e **D**



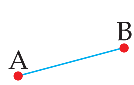
Y não está entre **E** e **F**

2.3. Definição de Segmento de Reta

Dados dois pontos distintos, chamamos de **segmento de reta** a figura (*) constituída por eles e por todos os pontos que estão entre eles.

Exemplo

O segmento de reta determinado por A e B é representado por $\overline{AB}$, dizemos que A e B são suas extremidades, e representamos por AB a medida de $\overline{AB}$.



$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \,/\, P \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

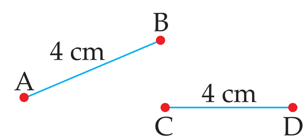
(*) Para apresentarmos a teoria da Geometria de modo mais sucinto, admitiremos alguns conceitos como conhecidos, como o de **figura** (conjunto de pontos não vazio)

2.4. Segmentos Congruentes

Definição – Dois segmentos de reta são chamados congruentes quando tiverem a mesma medida, na mesma unidade.

Exemplo

Os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, da figura, têm medida 4 cm, portanto são congruentes.



Indica-se: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2.5. Divisão de Segmento

Definição 1 – Se P é um ponto que está entre A e B, dizemos que P **divide interiormente** $\overline{AB}$ numa razão $k = \dfrac{PA}{PB}$

Exemplo

Na figura abaixo $AP = 5$ cm e $PB = 6$ cm, então:

P divide $\overline{AB}$ na razão $k = \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{5}{6}$

Observação

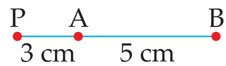
No exemplo acima, o ponto P divide o segmento de reta $\overline{BA}$ na razão $k' = \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{6}{5}$.

Definição 2 – Se A é um ponto entre P e B, ou B é um ponto entre A e P, dizemos que o ponto P divide **exteriormente** $\overline{AB}$ na razão $k = \dfrac{PA}{PB}$.

ou

Exemplo

Na figura abaixo $PA = 3$ cm e $AB = 5$ cm, então:



P divide $\overline{AB}$ na razão $k = \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{8}$

Observação

No exemplo acima, o ponto P divide o segmento de reta $\overline{BA}$ na razão $k' = \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{8}{3}$.

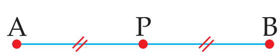
2.6. Ponto Médio de Segmento de Reta

Definição – Ponto médio de um segmento de reta é o ponto que divide o segmento interiormente na razão 1.

Exemplo

Na figura $\overline{AP} \cong \overline{PB}$, então P é o ponto médio de $\overline{AB}$, pois P divide $\overline{AB}$ na razão

$$k = \frac{PA}{PB} = 1$$



3. Postulados e Teoremas

3.1. Por que nem tudo pode ser provado em uma Teoria?

A demonstração de uma propriedade é feita com base em outras propriedades já demonstradas anteriormente. No entanto, as primeiras propriedades de uma teoria, porque não têm outras para apoiar as suas demonstrações, são simplesmente "**aceitas**" como verdadeiras. Essas propriedades são chamadas de **postulados**.

São **postulados** na Geometria euclidiana:

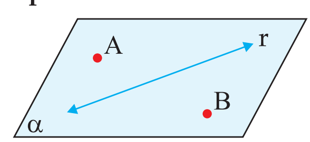
a) Um ponto de uma reta divide-a em duas regiões chamadas **semi-retas**. O ponto O é chamado de **origem das semi-retas**, e elas são ditas **opostas**.

Exemplo

O ponto O divide a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em duas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, e O é a origem das semi-retas.

b) Uma reta de um plano divide-o em duas regiões chamadas **semiplanos**. A reta é chamada de **origem dos semiplanos**, e eles são ditos **opostos**.

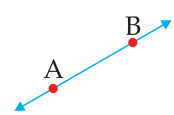
Exemplos



A reta r divide o plano α em dois semiplanos, rA e rB, e r é a origem dos semiplanos.

c) Dois pontos distintos **determinam** uma única reta.

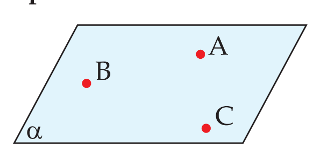
Exemplo



Os dois pontos distintos (não coincidentes) A e B determinam a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

d) Três pontos não colineares **determinam** um único plano.

Exemplo



Os três pontos não colineares (não situados em uma mesma reta) A, B e C determinam o plano α.

3.2. Teorema

Teoremas são proposições que provamos ser verdadeiras a partir de conceitos primitivos, de definições, de postulados, ou de outras proposições já demonstrados.

Em um teorema destacam-se três partes: hipótese, tese e demonstração.

A hipótese é o conjunto de condições que admitimos como verdadeiras, a tese é o que queremos concluir como verdadeiro e a demonstração é o raciocínio que usamos para provar a tese.

Exemplo

Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe um único ponto P que divide interiormente $\overline{AB}$ na razão dada.

Hipótese:

$$\begin{cases} P \text{ está entre } A \text{ e } B \\ \dfrac{PA}{PB} = k \end{cases}$$

Tese: $\{P \text{ é único}$

Demonstração

Supondo que existe um ponto P' distinto de P, entre A e B, que divide $\overline{AB}$ na razão k, então:

$$k = \frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} \Rightarrow \frac{PA+PB}{PB} = \frac{P'A+P'B}{P'B}$$

Como $PA + PB = AB$ e $P'A + P'B = AB$, temos:

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{P'B} \Rightarrow PB = P'B$$

Assim, P e P' coincidem.

Logo, P é único. (c.q.d.)

3.3. Teorema Recíproco

Os teoremas geralmente são enunciados na forma:

Se p, então q.

em que p é a hipótese e q é a tese.

Simbolicamente, temos:

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

Trocando-se a hipótese, temos uma nova proposição:

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

que chamamos **teorema recíproco**, ou **recíproca** do teorema.

Exemplo

"Se A, B e C são três pontos, tais que A está entre B e C e B divide $\overline{AC}$ na razão 2, então $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes".

$$\boxed{\left.\begin{matrix} A \text{ entre } B \text{ e } C \\ \dfrac{BA}{BC} = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}}$$

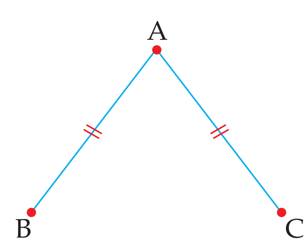
A recíproca do teorema acima é:

"Se $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são dois segmentos congruentes, então A está entre B e C e B divide $\overline{AC}$ na razão 2".

$$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ entre } B \text{ e } C \\ \dfrac{BC}{BA} = 2 \end{cases}}$$

Observação

A recíproca do teorema do exemplo não é verdadeira; observe a figura.



$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são dois segmentos congruentes, A não está entre B e C.

4. Ângulos

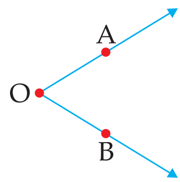
4.1. Definição

Ângulo é a união de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Exemplo

Na figura, a reunião das semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é chamada de ângulo e indicada por:

$\sphericalangle\ AOB$, ou $\sphericalangle\ BOA$ ou $\sphericalangle\ O$



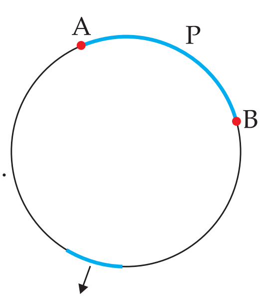
O é o vértice do ângulo e $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ seus lados.

4.2. Medidas de um Ângulo

Para medirmos um arco de uma circunferência, inicialmente a dividimos em 360 "partes" e chamamos de **grau** (°) a cada "parte" obtida. Medir o arco em graus é determinar quantas "partes" o arco compreende.

Exemplo

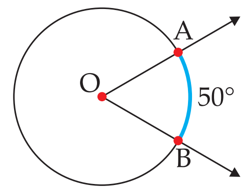
A medida do arco APB é 82°.



$\frac{1}{360}$ circunf. = 1°

A **medida de um ângulo** é a medida do menor arco que o ângulo determina em uma circunferência com centro no seu vértice.

Exemplo



A medida do $\sphericalangle\ AOB$ é a medida do arco AB assinalado.

Indica-se

$$m(\sphericalangle\ AOB) = A\hat{O}B = 50°$$

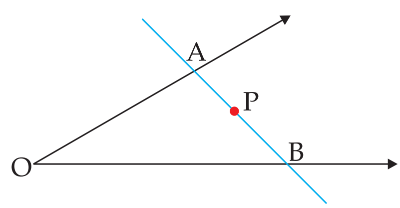
Notamos que o ângulo é medido em graus porque ele é medido a partir do arco que determina na circunferência com centro no seu vértice.

> **Observação**
>
> Sendo α a medida de um ângulo, então
>
> $0° < \alpha < 180°$

4.3. Ponto Interior de um Ângulo

Definição – Dado um ângulo e um ponto P, dizemos que P é um **ponto interior** ao ângulo quando qualquer reta que passa por ***P*** intercepta os lados do ângulo em dois pontos distintos A e B de modo que ***P*** seja sempre um ponto **entre *A* e *B***.

Exemplo

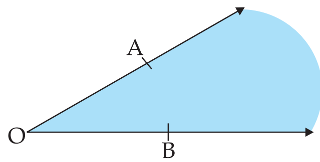


P é interior ao $\sphericalangle\ AOB$

4.4. Setor Angular

Definição – Chamamos de setor angular à reunião dos pontos pertencentes ao ângulo e os seus pontos interiores.

Exemplo



Setor angular do $\sphericalangle\ AOB$

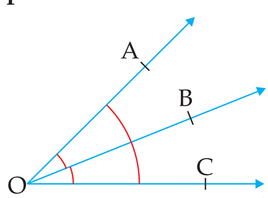
4.5. Classificação dos Ângulos

I. Quanto à posição

1º) Ângulos consecutivos

Definição – Dois ângulos são **consecutivos** quando têm o mesmo vértice e um lado comum.

Exemplo



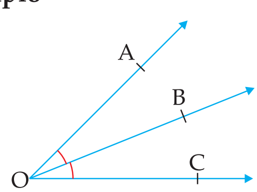
São consecutivos os pares de ângulos:

AOB e *BOC*; *AOC* e *AOB*; *AOC* e *BOC*.

2º) Ângulos adjacentes

Definição – Dois ângulos são **adjacentes** quando são consecutivos e não têm ponto interno comum.

Exemplo

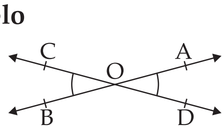


AOB e *BOC* são adjacentes.

3º) Ângulos opostos pelo vértice (opv)

Definição – Dois ângulos são **opostos pelo vértice** quando os lados de um deles são **semi-retas opostas** aos lados do outro.

Exemplo



AOD e *BOC* são opv.

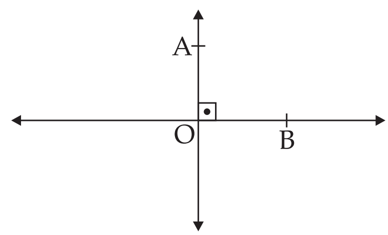
> **Observação**
>
> Dois ângulos **opostos pelo vértice** são sempre **congruentes** (medidas iguais)

II. Ângulos reto, agudo e obtuso

1º) Ângulo reto

Definição – Um ângulo é **reto** quando sua medida for **igual** a 90°.

Exemplo



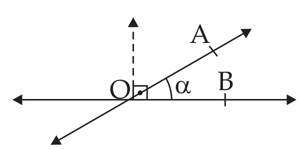
AOB é um ângulo reto.

> **Observação**
>
> As retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ do exemplo são ditas **perpendiculares**.

2º) Ângulo agudo

Definição – Um ângulo é **agudo** quando sua medida for **menor** que 90°.

Exemplo



$\alpha < 90°$

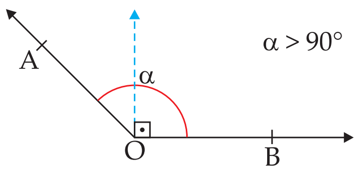
$\sphericalangle\ AOB$ é agudo.

> **Observação**
>
> As retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ do exemplo são ditas **oblíquas**.

3º) Ângulo obtuso

Definição – Um ângulo é **obtuso** quando sua medida for **maior** que 90°.

Exemplo



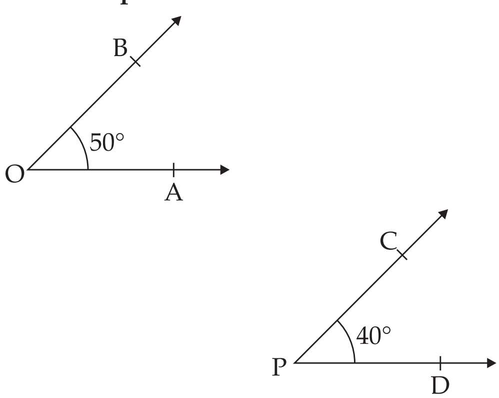
$\sphericalangle\ AOB$ é obtuso.

III. Ângulos complementares e suplementares

1º) Ângulos complementares

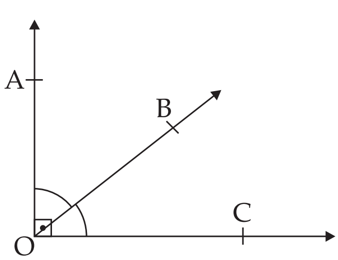
Definição – Dois ângulos são **complementares** quando a **soma** de suas medidas for **90°**. Dizemos que um é o complemento do outro.

Exemplo



$\sphericalangle\ AOB$ e $\sphericalangle\ CPD$ são complementares.

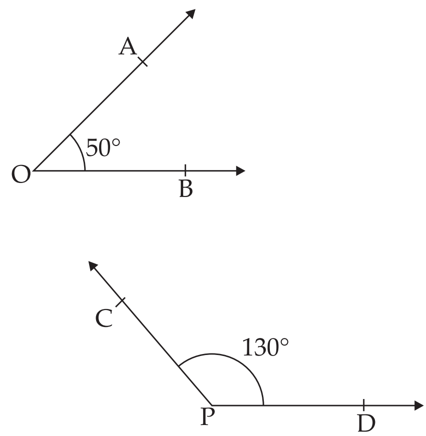
> **Observação**
>
> Os ângulos AOB e BOC da figura abaixo são **adjacentes complementares**.



2º) Ângulos suplementares

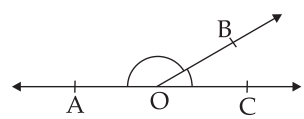
Definição – Dois ângulos são **suplementares** quando a **soma** de suas medidas for **180°**. Dizemos que um é o suplemento do outro.

Exemplo



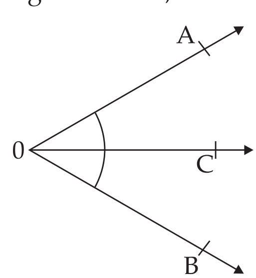
$\sphericalangle\ AOB$ e $\sphericalangle\ CPD$ são suplementares.

> **Observação**
>
> Os ângulos AOB e BOC da figura abaixo são **adjacentes suplementares.**



4.6. Bissetriz de um Ângulo

Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, de vértice O comum e lado $\overrightarrow{OB}$, também comum, conforme a figura abaixo,



a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em duas partes congruentes. Essa semi-reta é chamada **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$. Assim:

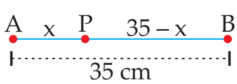
Bissetriz de um ângulo é a semi-reta que tem origem no vértice e o divide em duas partes de medidas iguais.

Exercícios Resolvidos

01. *P* é um ponto que divide interiormente $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{5}$ e $AB = 35$ cm. Calcule *PA*.

Resolução

$$\frac{PA}{PB} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{x}{35-x} = \frac{2}{5}$$

$$5x = 70 - 2x$$

$$7x = 70$$

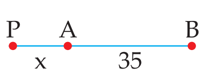
$$x = 10$$

Resposta: $PA = 10\ cm$

02. *P* é um ponto que divide exteriormente $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{5}$ e $AB = 35$ cm. Calcule *PA*.

Resolução

$$\frac{PA}{PB} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{x}{x+35} = \frac{2}{5}$$

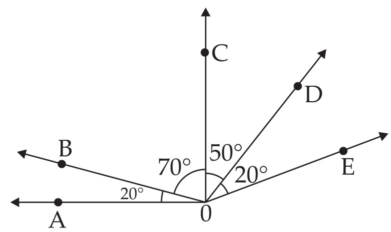
$$5x = 2x + 70$$

$$3x = 70$$

$$x = \frac{70}{3}$$

Resposta: $PA = \frac{70}{3}\ cm$

03. Na figura, os ângulos têm as medidas indicadas.



a) Dar um par de ângulos complementares, se existirem.

b) Dar um par de ângulos congruentes distintos, se existirem.

c) Indicar um par de semi-retas perpendiculares, se existirem.

d) Indicar uma semi-reta que seja bissetriz de um ângulo da figura.

Resolução

a) $B\hat{O}C$ e $D\hat{O}E$

$70° + 20° = 90°$

b) $A\hat{O}B \equiv D\hat{O}E$

c) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{OC}$, bissetriz *de* $B\hat{O}E$

04. Calcule a medida de um ângulo que é o dobro do seu complemento.

Resolução

x = medida do ângulo

$90° - x$ = medida do complemento do ângulo

Então:

$x = 2(90° - x)$

Assim:

$x = 180° - 2x \Rightarrow x = 60°$

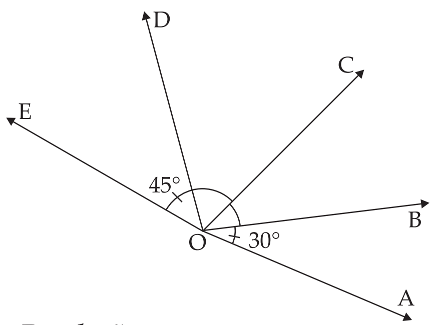
Resposta: A medida do ângulo *é 30°.*

05. Na figura a seguir tem-se: $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$ e $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$.

Determine:

a) a medida de $B\hat{O}D$;

b) a medida de $A\hat{O}E$.



Resolução

$\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, logo

$A\hat{O}B = B\hat{O}C = 30°$

$\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, logo

$C\hat{O}D = D\hat{O}E = 45°$

Pela figura:

$B\hat{O}D = B\hat{O}C + C\hat{O}D = 30° + 45° = 75°$

$A\hat{O}E = A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E =$

$= 30° + 30° + 45° + 45° = 150°$

Resposta

a) $B\hat{O}D = 75°$

b) $A\hat{O}E = 150°$

06. $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$. Conhecendo a medida de $A\hat{O}B$, determine a medida de $B\hat{O}C$, em cada caso.

a) $A\hat{O}B = 44°$

b) $A\hat{O}B = 121°$

c) $A\hat{O}B = 25°13'$

d) $A\hat{O}B = 45°$

Resolução

Basta dividir cada medida por 2

a) $44:2 = 22° \Rightarrow B\hat{O}C = 22°$

b) $121:2 = 120°60' :2 = 60°30' \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{O}C = 60°30'$

c) $25°13' :2 = 24°72'60'' :2 = 12°36'30'' \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{O}C = 12°36'30''$

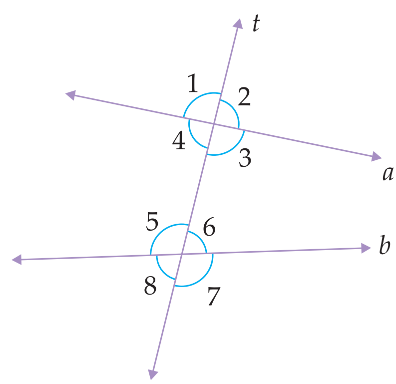
d) $45° :2 = 44°60' :2 = 22°30' \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{O}C = 22°30'$

5. Ângulos de Duas Retas com Uma Transversal

5.1. Definição

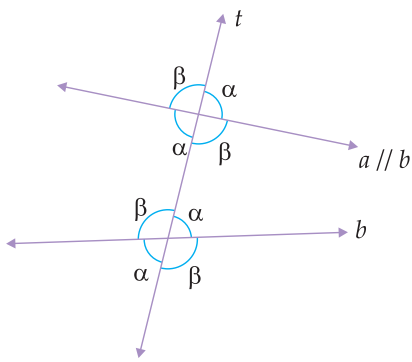
Quando uma **transversal a duas retas** distintas **intercepta** essas retas em dois pontos distintos, os **oito ângulos** determinados são classificados, conforme a figura, em:



- ângulos **colaterais internos:** 3 e 6, 4 e 5;
- ângulos **colaterais externos:** 1 e 8, 2 e 7;
- ângulos **alternos internos:** 3 e 5, 4 e 6;
- ângulos **alternos externos:** 1 e 7, 2 e 8;
- ângulos **correspondentes:** 1 e 5, 2 e 6, 4 e 8, 3 e 7.

5.2. Propriedades

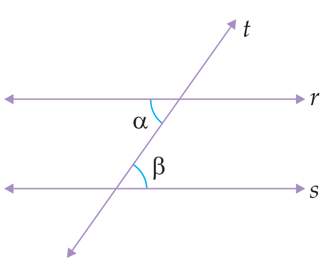
Quando duas retas **paralelas distintas** são cortadas por uma transversal, temos:



- dois ângulos **correspondentes** são **congruentes;**
- dois ângulos **alternos internos** são **congruentes;**
- dois ângulos **alternos externos** são **congruentes;**
- dois ângulos **colaterais internos** são **suplementares;**
- dois ângulos **colaterais externos** são **suplementares.**

5.3. Teorema Importante

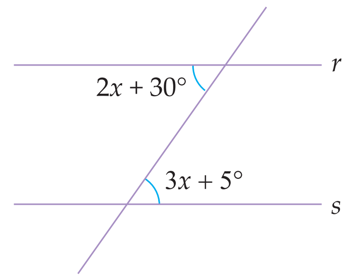
Duas retas são **paralelas distintas se, e somente se**, formarem com uma transversal ângulos **alternos internos congruentes.**



$r \,//\, s \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Exercícios Resolvidos

01. Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. Calcule x.



Resolução

Os ângulos são alternos internos, logo são congruentes:

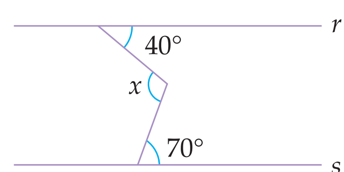
$2x + 30° = 3x + 5°$

$2x - 3x = 5 - 30$

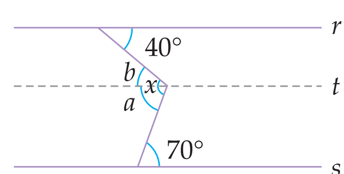
$-x = -25 \rightarrow x = 25°$

Resposta: *O valor de x é 25°*

02. Sendo a reta r paralela à reta s, calcule o valor de x.



Resolução



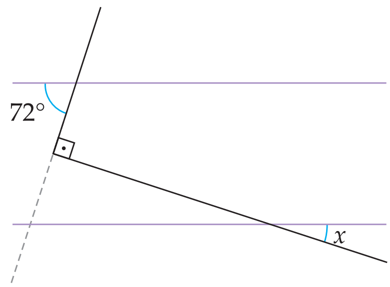
Sendo t *uma reta paralela a* r *e* s, *temos*

$a = 70°$ e $b = 40°$

Assim, $x = a + b = 70° + 40° = 110°$

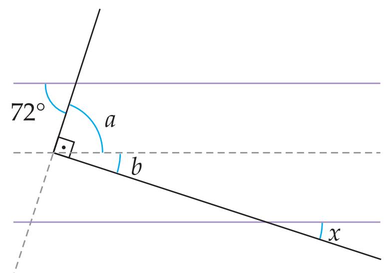
Resposta: *O valor de x é 110°*

03. Na figura dada, sabe-se que r // s. Calcule x.



Resolução

Pelo vértice do ângulo reto, vamos traçar a reta u *paralela a* r *e a* s, *determinando os ângulos de medidas* a *e* b, *conforme a figura.*



Temos: $a = 72°$ *(ângulos alternos internos)*

$b = 90° - a = 90° - 72$

$b = 18°$

Como $x = b$ *(ângulos correspondentes), temos*

$x = 18°$

Resposta: *O ângulo x vale 18°.*

Observações

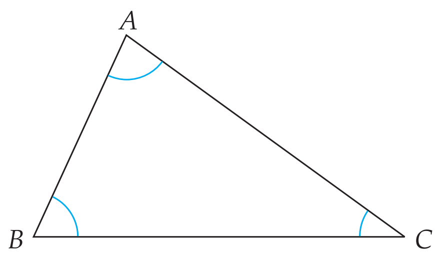
- As propriedades dos pares de ângulos correspondentes, alternos e colaterais são válidas apenas no caso em que as duas retas são paralelas.
- Se as retas não forem paralelas, as propriedades não são válidas, mas os nomes desses pares de ângulos continuam sendo os mesmos.

Capítulo 02. Triângulos

1. Definição e Elementos Fundamentais

Definição

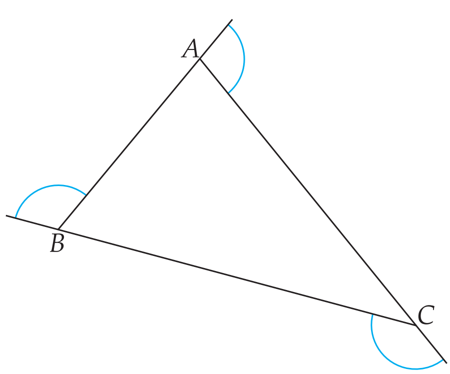
Dados três pontos *A, B* e *C* não colineares, **o triângulo** ***ABC*** é a **reunião dos segmentos** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

Elementos

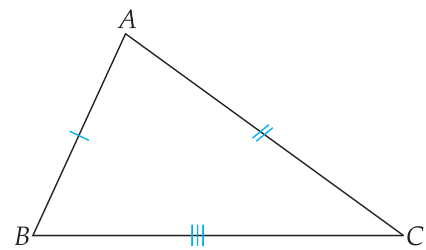
- **Vértices:** são os pontos *A, B* e *C.*
- **Lados:** são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
- **Ângulos internos:** são os ângulos *ABC, ACB* e *BAC.*
- **Ângulos externos:** são os ângulos adjacentes suplementares dos ângulos internos (figura abaixo).



2. Classificação

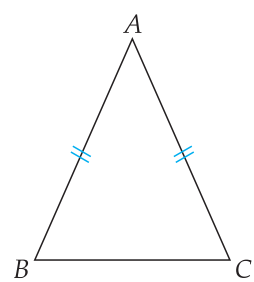
2.1. Quanto aos Lados

I. Triângulo escaleno é o que tem os **três lados** com medidas **diferentes.**



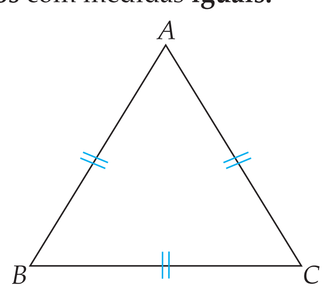
$$AB \neq AC \neq BC$$

II. Triângulo isósceles é o que tem pelo menos **dois lados** com medidas **iguais.**



$$AB = AC$$

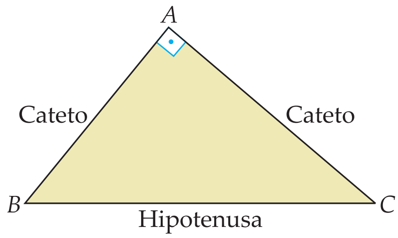
III. Triângulo eqüilátero é o que tem os **três lados** com medidas **iguais.**



$$AB = AC = BC$$

2.2. Quanto aos Ângulos

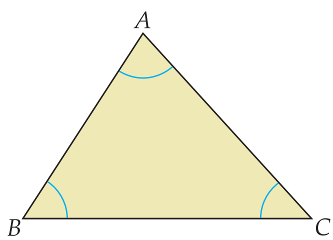
I. **Triângulo retângulo** é o que tem um **ângulo reto.** O lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** e os outros, **catetos.**



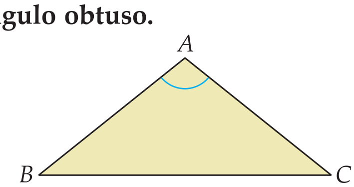
$\boxed{\hat{A} = 90°}$

II. **Triângulo acutângulo** é que o tem os três **ângulos agudos.**

$\hat{A} < 90°$
$\hat{B} < 90°$
$\hat{C} < 90°$



III. **Triângulo obtusângulo** é o que tem um **ângulo obtuso.**

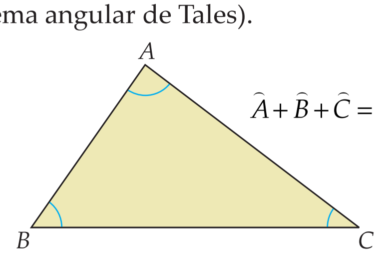


$\boxed{\hat{A} > 90°}$

3. Estudo dos Ângulos

3.1. Teorema dos Ângulos Internos

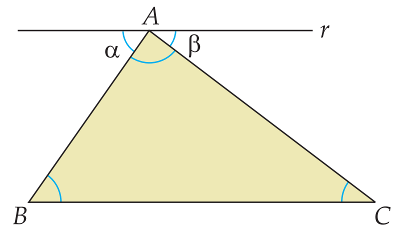
Em todo triângulo a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a 180° (teorema angular de Tales).



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Demonstração

Traçando a reta r paralela ao lado $\overline{BC}$, temos:



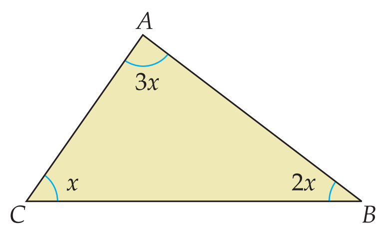
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \hat{B} \\ \text{e} \\ \beta = \hat{C} \end{array}\right\} \text{alternos internos em paralelas}$$

e como $\alpha + \hat{A} + \beta = 180°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Exemplo

Em um triângulo ABC, $\hat{B}$ é o dobro de $\hat{C}$ e $\hat{A}$ é o triplo de $\hat{C}$. Calcule as medidas dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$.



$\hat{C} = x$

$\hat{B} = 2x$

$\hat{A} = 3x$

Resolução

Pelo teorema angular de Tales:

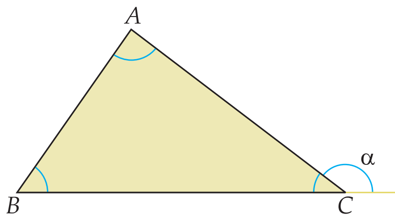
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
$3x + 2x + x = 180°$
$6x = 180°$
$x = 30°$

Teremos:
$A = 3 \cdot 30 = 90°$
$B = 2 \cdot 30 = 60°$
$C = 1 \cdot 30° = 30°$

Resposta: $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 30°$

3.2. Teorema do Ângulo Externo

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



$\alpha = \hat{A} + \hat{B}$

Demonstração

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (I)

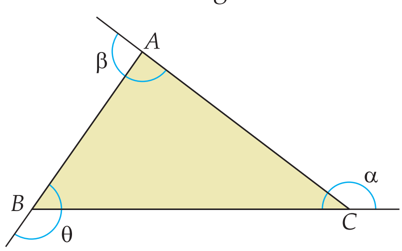
$\alpha + \hat{C} = 180°$ (II)

Fazendo I = II temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + \hat{C}$

Assim: $\alpha = \hat{A} + \hat{B}$

Observação

Esta propriedade é válida para qualquer ângulo externo de um triângulo. Observe a figura:



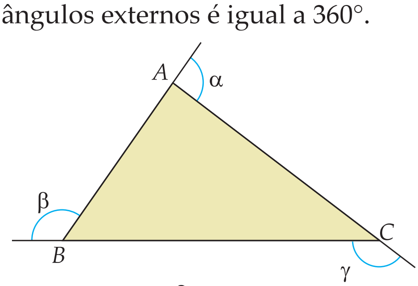
$\hat{\alpha} = \hat{A} + \hat{B}$

$\hat{\beta} = \hat{B} + \hat{C}$

$\theta = \hat{A} + \hat{C}$

3.3. Teorema dos Ângulos Externos

Em todo triângulo a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.



$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

Demonstração

$\hat{A} = 180° - \alpha;\ \hat{B} = 180° - \beta\ e\ \hat{C} = 180° - \gamma$

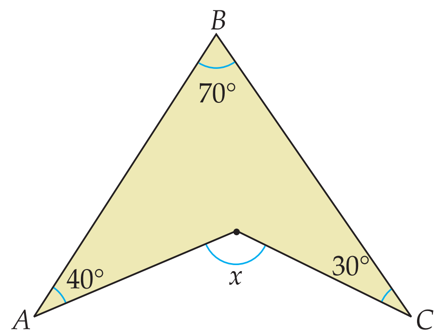
Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ temos:

$(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) = 180°$

Assim: $\alpha + \beta + \gamma = 360°$

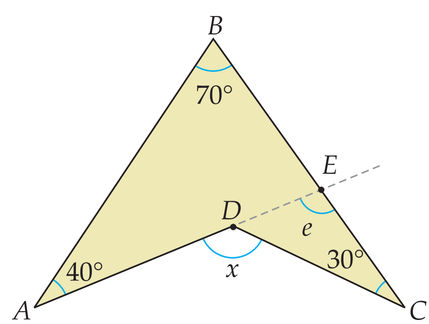
Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor do ângulo x na figura abaixo.



Resolução/Resposta

Dividir o quadrilátero em dois triângulos, prolongando-se um dos seus lados.



Resolução

$\hat{e}$ *é externo ao* $\Delta ABE \Rightarrow \hat{e} = 40° + 70° = 110°$

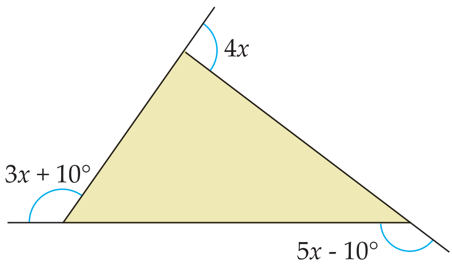
$\hat{x}$ *é externo ao* $\Delta DEC \Rightarrow \hat{x} = \hat{e} + 30°$

$\hat{x} = 110° + 30°$

$\hat{x} = 140°$

Resposta: *O ângulo x mede 140°.*

02. Calcular o valor de x na figura.



Resolução

$(3x + 10°) + 4x + (5x - 10°) = 360°$

$12x = 360°$

$x = 30°$

Resposta: $x = 30°$.

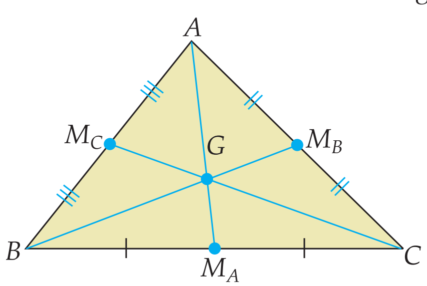
4. Pontos Notáveis

4.1. Baricentro

Definições

1ª) **Mediana** de um triângulo é o **segmento** que une um **vértice** ao **ponto médio** do lado oposto.

2ª) **Baricentro** de um triângulo é o **ponto de encontro** das três **medianas** do triângulo.



$\overline{AM_A}, \overline{BM_B}$ e $\overline{CM_C}$: medianas

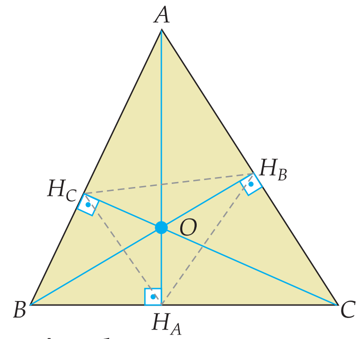
G é o baricentro do ΔABC

4.2. Ortocentro

Definições

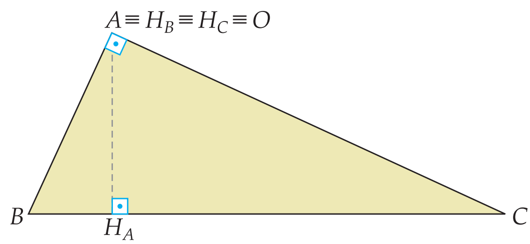
1ª) **Altura** de um triângulo é o **segmento da perpendicular** traçada de um vértice à reta suporte do **lado oposto** e que tem extremidades nesse vértice e no ponto de encontro com essa reta suporte.

2ª) **Ortocentro** de um triângulo é o **ponto de encontro** das retas suportes das três **alturas** de um triângulo.



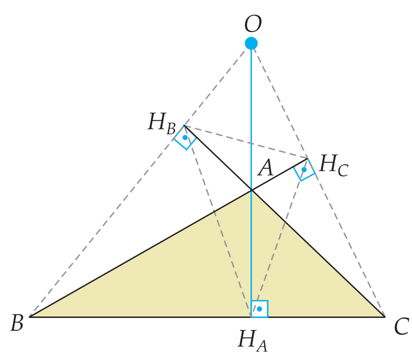
Δ **acutângulo**

O é o ortocentro do ΔABC



Δ **retângulo**

O é o ortocentro do ΔABC



Δ **obtusângulo**

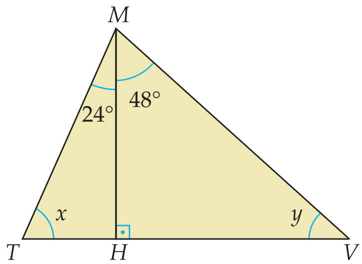
O é o ortocentro do ΔABC

Observação

Sendo ABC um triângulo acutângulo ou obtusângulo, o triângulo com vértices nos pés das alturas ($\Delta H_A H_B H_C$) é o **triângulo órtico** do triângulo ABC.

Exercícios Resolvidos

01. No triângulo MTV, $\overline{MH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{TV}$ (figura abaixo). Calcular os ângulos x e y do triângulo.



Resolução

No ΔMTH *temos:*

$x + 24° + 90° = 180° \Rightarrow x = 180 - 114$

$\hat{x} = 66°$

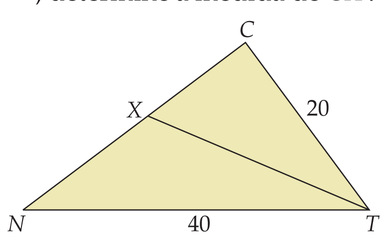
No ΔMHV *temos:*

$y + 48° + 90° = 180° \Rightarrow y = 180 - 138$

Resposta: $\hat{y} = 42°$

Atenção: $\overline{MH}$ *é perpendicular a* TV *– definição de altura.*

02. O perímetro do triângulo CNT é 95 cm, os lados $\overline{TC}$ e $\overline{TN}$ medem, respectivamente, 20 cm e 40 cm. Se $\overline{TX}$ é a mediana relativa do lado $\overline{CN}$, determine a medida de $\overline{CX}$.



Resolução

$CN + TN + TC = 95$

$CN + 40 + 20 = 95 \Rightarrow CN = 35$

TX é mediana, logo $CX = \dfrac{CN}{2}$

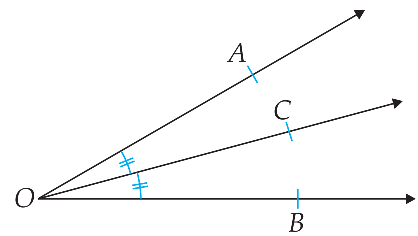
$CX = \dfrac{35}{2}$

Resposta: $CX = 17{,}5$ cm

4.3. Incentro

Definições

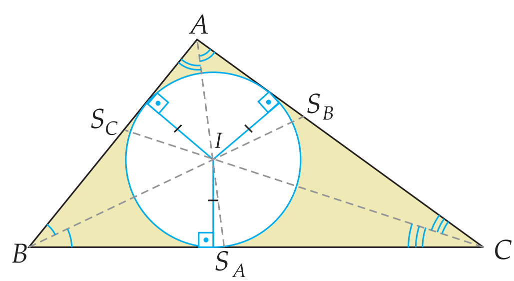
1ª) Bissetriz de um ângulo é a semi-reta com pontos internos ao ângulo e que determina com seus lados **dois ângulos adjacentes congruentes**.



$\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$

2ª) Bissetriz interna de um triângulo é o **segmento da bissetriz** de um ângulo interno que tem extremidades no vértice desse ângulo e no ponto de encontro com o lado oposto.

3ª) Incentro de um triângulo é o **ponto de encontro** das **bissetrizes** internas do triângulo.



I é o incentro do ΔABC

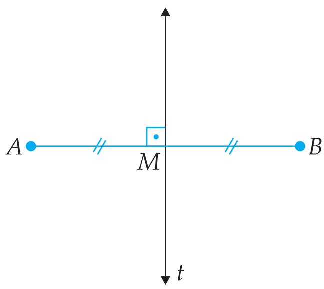
Observação

O **incentro** de um triângulo é o **centro** da **circunferência nele inscrita.**

4.4. Circuncentro

Definições

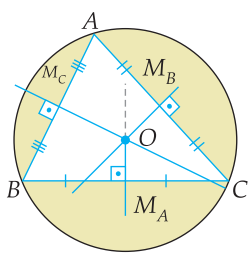
1ª) Mediatriz de um segmento de reta é a reta **perpendicular** a esse segmento pelo seu **ponto médio**.



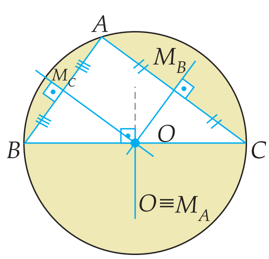
t é a mediatriz de $\overline{AB}$

2ª) Mediatriz de um triângulo é a **mediatriz de um dos lados** do triângulo.

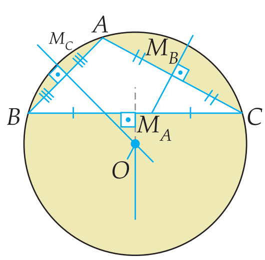
3ª) Circuncentro de um triângulo é o **ponto de encontro** das três **mediatrizes** do triângulo.



Δ acutângulo
O é o centro do ΔABC



Δ retângulo
O é o circuncentro do ΔABC



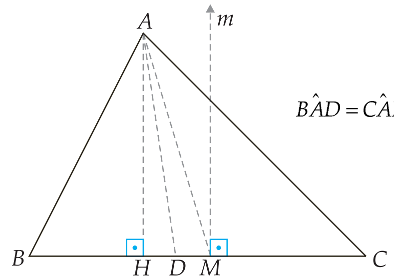
Δ obtusângulo
O é o circuncentro do ΔABC

Observação

O **circuncentro** de um triângulo é o **centro** da **circunferência** nele **circunscrita**.

Exercícios Resolvidos

01. (UFMG-MG) No triângulo ABC, as seguintes atribuições são feitas:



$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ e $BM = CM$

I) $\overline{AH}$ = altura, $\overline{AM}$ = mediana, m = bissetriz

II) $\overline{AD}$ = altura, $\overline{AM}$ = mediana, m = bissetriz

III) m = mediatriz, $\overline{AM}$ = mediana, $\overline{AH}$ = altura

IV) $\overline{AD}$ = bissetriz, $\overline{AH}$ = altura, m = mediatriz

Pode-se afirmar que

a) I e II são verdadeiras.
b) II e III são verdadeiras.
c) III e IV são verdadeiras.
d) I e IV são verdadeiras.
e) II e IV são verdadeiras.

Resposta: *C*

Resolução

I) $\overline{AH}$ *= altura (V)*
$\overline{AM}$ *= mediana (V)*
m = *bissetriz (F)*

II) $\overline{AD}$ *= altura (F)*
$\overline{AM}$ *= mediana (V)*
m = *bissetriz (F)*

III) m = *mediatriz (V)*
$\overline{AM}$ *= mediana (V)*
$\overline{AH}$ *= altura (V)*

IV) $\overline{AD}$ *= bissetriz (V)*
$\overline{AH}$ *= altura (V)*
m = *mediatriz (V)*

III e IV são verdadeiras.

02. (Mackenzie-SP) Se um ponto D no plano de um triângulo é eqüidistante dos três lados desse triângulo, ele é necessariamente a intersecção das:

a) alturas
b) mediatrizes dos lados
c) medianas
d) bissetrizes dos ângulos internos
e) nenhuma das alternativas anteriores são corretas.

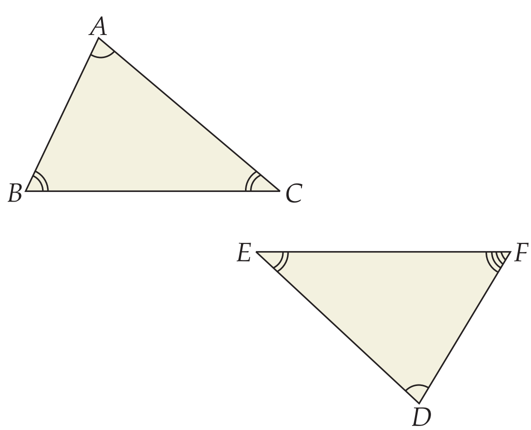
Resposta: D. *Se D é eqüidistante dos três lados de um triângulo, então é o centro da circunferência inscrita no triângulo; D é o incentro, ponto de encontro das bissetrizes internas.*

5. Triângulos Congruentes

5.1. Definição

Dois triângulos ABC e DEF são **congruentes entre si** se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus **lados** sejam dois a dois **congruentes** e também os seus **ângulos internos** sejam dois a dois **congruentes**.

Assim:



$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ e } \sphericalangle A \cong \sphericalangle D$$
$$\overline{AC} \cong \overline{DF} \text{ e } \sphericalangle B \cong \sphericalangle E \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ e } \sphericalangle C \cong \sphericalangle F$$

Observações

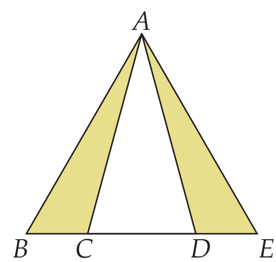
1ª) A correspondência $ABC \Leftrightarrow DEF$ é chamada de **correspondência congruência**.

2ª) É possível estabelecer **outras correspondências** entre os triângulos ABC e DEF, porém **não** serão **necessariamente correspondência congruência**.

3ª) Os triângulos ABC e DEF coincidem por superposição.

Exemplo

Na figura abaixo, $\Delta ABC \cong \Delta AED$, então complete:



a) $\overline{AB} \cong$
b) $\overline{AC} \cong$
c) $\overline{BC} \cong$
d) $\sphericalangle B \cong$
e) $\sphericalangle BAC \cong$
f) $\sphericalangle ACB \cong$

Resolução

Como $ABC \Leftrightarrow AED$ é uma correspondência congruência, temos:

a) $\overline{AB} \cong \overline{AE}$
b) $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
c) $\overline{BC} \cong \overline{ED}$
d) $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$
e) $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EAD$
f) $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADE$

5.2. Casos de Congruências

A definição de triângulos congruentes é por demais "**exigente**", v que para concluirmos que dois triângulos são congruentes é necessário **compararmos** as **seis medidas básicas** dos triângulos (lados e ângulos).

Existem situações em que podemos concluir a **congruência** de dois triângulos **a partir da igualdade de 3 medidas básicas**

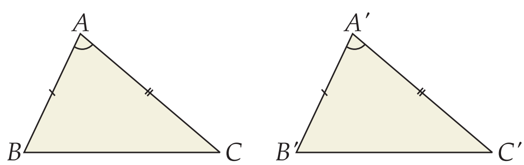
Essas situações são chamadas de **casos de congruência**.

Verificar se uma situação é **caso de congruência** é descobrir se as medidas conhecidas de dois triângulos permitem estabelecer uma **correspondência congruência** entre os dois triângulos.

1º caso de congruência: LAL

O primeiro caso de congruência de dois triângulos é a correspondência **lado-ângulo-lado**, e é adotado na geometria euclidiana como um **postulado**.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A'\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\end{array}\right\} \overset{L\Delta L}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \overset{def}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle B \cong \sphericalangle B'\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\\ \sphericalangle C \cong \sphericalangle C'\end{array}\right.$$

Observação – As **marcas** nos lados e no ângulo dos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ identificam os **elementos** correspondentes **congruentes**.

Exemplo de aplicação:

As retas r e s da figura representam duas estradas que passam pelas cidades W, X, Y e Z e que se cruzam em P.

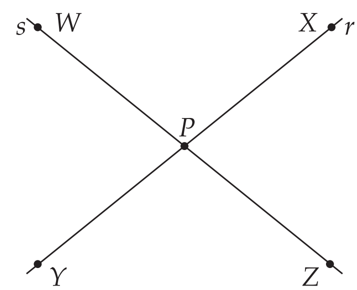
A partir de P, num mesmo instante, quatro jovens A, B, C e D partem com destino às cidades W, X, Y e Z, respectivamente.

Os jovens caminham com velocidade constante de modo que:

$V_A = V_B$ e $V_C = V_D$

Em que V_A, V_B, V_C e V_D são as velocidades dos jovens A, B, C e D, respectivamente:

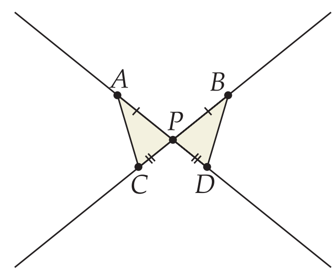
Provar que em qualquer instante do percurso, antes da chegada, a distância entre os jovens A e C é a mesma que a dos jovens B e D.



Resolução

Num instante t após a partida, os jovens A e B terão percorrido uma distância d_1 e os jovens C e D, uma distância d_2.

Assim:



$$\left.\begin{array}{l}PA = PB = d_1\\ A\hat{P}C = B\hat{P}D \text{ (opv)}\\ CP = DP = d_2\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta APC \cong \Delta BPD$$

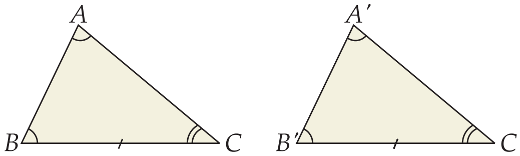
$$\Delta APC \cong \Delta BPD \overset{def.}{\Rightarrow} AC = BD$$

Logo, a distância dos jovens A e C é a mesma que a dos jovens B e D.

2º caso de congruência: ALA

O segundo caso de congruência de dois triângulos é a correspondência **ângulo-lado-ângulo**.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

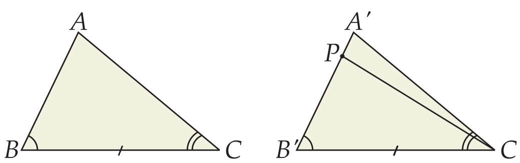


$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle B \cong \sphericalangle B' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \sphericalangle C \cong \sphericalangle C'\end{array}\right\} \overset{ALA}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \overset{def.}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle A \cong \sphericalangle A' \\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\end{array}\right.$$

Demonstração

Consideremos sobre a semi-reta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto P tal que $PB' = AB$.



$$\left.\begin{array}{l}AB = PB' \\ BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}'\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta PB'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta PB'C' \overset{def.}{\Rightarrow} \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle PC'B'$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B' \\ \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle PC'B'\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle A'C'B' \cong \sphericalangle PC'B'$$

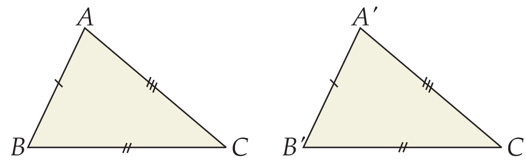
Assim, as retas $\overleftrightarrow{C'A'}$ e $\overleftrightarrow{C'P}$ coincidem, e isto significa que $A' = P$, ou seja, $\Delta A'B'C'$ e $\Delta PB'C'$ são o mesmo triângulo.

Logo: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

3º caso de congruência: LLL

O terceiro caso de congruência de dois triângulos é a correspondência **lado-lado-lado**.

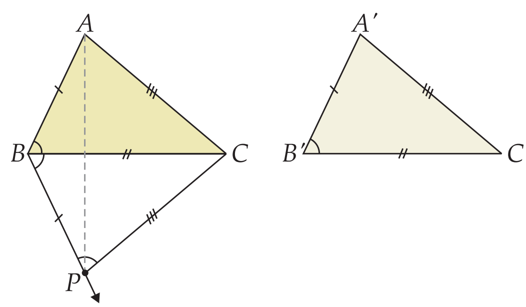
> Se dois triângulos têm os três lados ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \overset{def.}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle A \cong \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B' \\ \sphericalangle C \cong \sphericalangle C'\end{array}\right.$$

Demonstração



Tracemos uma semi-reta $\overrightarrow{BP}$ no semi-plano oposto ao determinado por $\overline{BC}$ e A, de modo que $\sphericalangle PBC \cong \sphericalangle A'B'C'$ e $\overline{BP} \cong \overline{B'A'}$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BP} \cong B'A' \\ \sphericalangle PBC \cong \sphericalangle A'B'C' \\ \overline{BC} \text{ é comum}\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta A'B'C' \cong \Delta PBC$$

$$\Delta A'B'C' \cong \Delta PBC \overset{def.}{\Rightarrow} \begin{cases} \overline{PC} \cong \overline{A'C'} \\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C' \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BP} \cong \overline{A'B'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BP} \Rightarrow \sphericalangle PAB \cong \sphericalangle BPA$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{PC} \cong \overline{A'C'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{PC} \Rightarrow \sphericalangle PAC \cong \sphericalangle CPA$$

$$\left.\begin{matrix} \sphericalangle PAB \cong \sphericalangle BPA \\ \sphericalangle PAC \cong \sphericalangle CPA \\ B\hat{A}C = P\hat{A}B + P\hat{A}C \\ B\hat{P}C = B\hat{P}A + C\hat{P}A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BPC$$

$$\left.\begin{matrix} \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BPC \\ \sphericalangle BPC \cong \sphericalangle B'A'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C' \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{matrix}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow$$

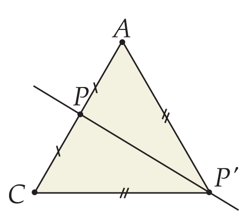
Exemplo de Aplicação

Em uma aula de Educação Física o professor pede que as alunas Ana e Carolina permaneçam fixas em dois pontos distintos A e C da quadra, e que o aluno Paulo, inicialmente no ponto médio de $\overline{AC}$, se movimente na quadra, mantendo a eqüidistância de A e C.

Mostre que a trajetória de Paulo é uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.

Resolução

Seja P' uma posicão de Paulo num instante qualquer:



$$\left.\begin{matrix} PA = PC \\ \overline{PP'} \text{ é comum} \\ P'A = P'C \end{matrix}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta P'PC \cong \Delta P'PA$$

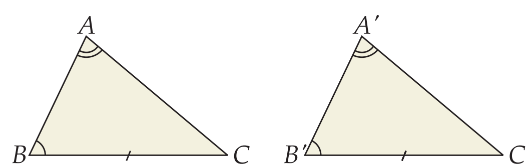
Assim, $C\hat{P}P' = A\hat{P}P' = 90°$

Como $P'PC$ é reto, então a trajetória de Paulo é uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.

4º caso de congruência: LAA_0

O quarto caso de congruência de dois triângulos é a correspondência **lado-ângulo-ângulo oposto**.

> Se dois triângulos têm ordenadamente um lado, um ângulo e o ângulo oposto ao lado, então eles são congruentes.



$$\left.\begin{matrix} \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B' \\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A' \end{matrix}\right\} \overset{LAA_0}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \overset{def.}{\Rightarrow} \begin{cases} \sphericalangle C \cong \sphericalangle C' \\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{cases}$$

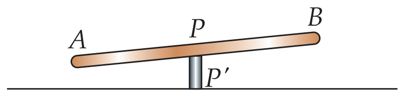
Demonstração

$$\left.\begin{matrix} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180° \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{matrix}\right\} \overset{ALA}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

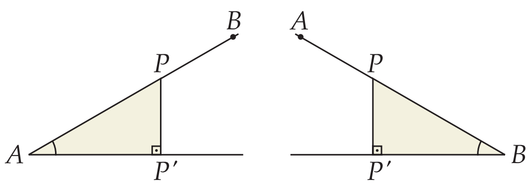
Exemplo de Aplicação

A figura abaixo mostra uma gangorra com haste rígida de extremidades A e B, apoiada em uma mureta vertical num ponto P. Quando as extremidades A e B tocam o chão, formam com o mesmo ângulos de medidas iguais.



Prove que o ponto P está no meio da haste rígida.

Resolução



$$\left.\begin{array}{l}\overline{PP'} \text{ é comum}\\ P\hat{P'}A = P\hat{P'}B\\ P\hat{A}P' = P\hat{B}P'\end{array}\right\} \overset{LAA_0}{\Rightarrow} \Delta AP'P \cong \Delta BP'P$$

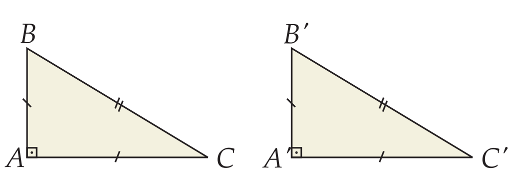
Então, $AP = BP$, ou seja,

P está no meio da haste rígida.

Caso especial de congruência

O caso especial de congruência de dois triângulos é a correspondência **hipotenusa-cateto**.

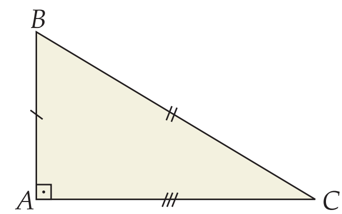
> Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes a hipotenusa e um cateto, então eles são congruentes.

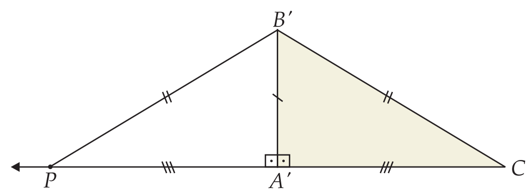


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A} = 90^\circ\\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \overline{BC} \cong B'C'\end{array}\right\} \overset{CE}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \overset{def.}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle C \cong \sphericalangle C'\\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B'\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\end{array}\right.$$

Demonstração





Sobre a semi-reta oposta a $\overrightarrow{AC'}$, tomemos um ponto P de modo que $A'P = AC$.

$$\left.\begin{array}{l}A'P = AC\\ P\hat{A'}B' = C\hat{A}B\\ A'B' = AB\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta A'B'P' \cong \Delta ABC\ (I)$$

Assim, $B'P = BC = B'C'$

Então, $\Delta PB'C'$ é isósceles e $\hat{P} = \hat{C'}$

$$\left.\begin{array}{l}A'B' \text{ é comum}\\ P\hat{A'}C' = C'\hat{A'}B'\\ \hat{P} = \hat{C}\end{array}\right\} \overset{LAA_0}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta A'B'P' \cong \Delta A'B'C'\ (II)$

De I e II temos:

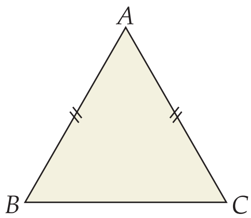
$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

5.3. Conseqüências Importantes

I. Teorema do triângulo isósceles

Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

Sendo ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, temos:



Hipótese
$AB = AC$

Tese
$\hat{B} = \hat{C}$

Demonstração

Consideremos os triângulos ABC e ACB, isto é, associemos a A, B e C, respectivamente, A, C e B.

$$\left.\begin{array}{lcll} AB & = & AC & \text{(hip.)} \\ B\hat{A}C & = & C\hat{A}B & \text{(comum)} \\ AC & = & AB & \end{array}\right\} \begin{array}{l} ALA \\ \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACB \end{array}$$

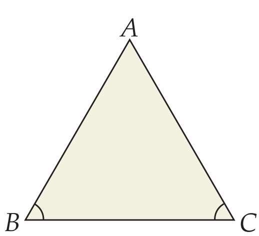
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \Delta ABC & \Delta ACB \end{array}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta ACB \overset{def.}{\Rightarrow} \hat{B} = \hat{C}$$

II. Recíproca do teorema do triângulo isósceles

Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo tem dois lados congruentes.

Sendo ABC um triângulo com $\hat{B} = \hat{C}$, temos:



Hipótese
$\hat{B} = \hat{C}$

Tese
$AB = AC$

Demonstração

Consideremos os triângulos ABC e ACB, isto é, associemos a A, B e C, respectivamente, A, C e B.

$$\left.\begin{array}{lcll} \hat{B} & = & \hat{C} & \text{(hip.)} \\ B\hat{A}C & = & C\hat{A}B & \text{(comum)} \\ \hat{C} & = & \hat{B} & \text{(hip.)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} ALA \\ \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACB \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \Delta ABC & \Delta ACB \end{array}$$

$$\Delta ABC \equiv \Delta ACB \overset{def.}{\Rightarrow} \text{AB} = AC$$

Exercícios Resolvidos

01. Classifique em verdadeiro (V) ou Falso (F).

a) Todo triângulo isósceles é eqüilátero.

b) Todo triângulo eqüilátero é isósceles.

c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.

d) Todo triângulo isósceles é triângulo retângulo.

e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.

f) Existe triângulo retângulo e isósceles.

g) Existe triângulo isósceles obtusângulo.

h) Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou é eqüilátero.

Resolução/Respostas

a) F $\rightarrow$ Triângulo isósceles tem dois lados iguais e eqüilátero três.

b) V $\rightarrow$ O triângulo eqüilátero tem, também, dois lados iguais.

c) F $\rightarrow$ Triângulo escaleno tem os três lados diferentes.

d) F $\rightarrow$ Há triângulos retângulos que não são isósceles.

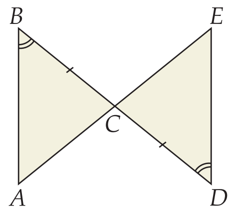
e) F $\rightarrow$ Há triângulos retângulos que têm dois lados iguais.

f) V $\rightarrow$ Conseqüência da anterior.

g) V $\rightarrow$ Há triângulos retângulos com dois lados iguais.

h) F $\rightarrow$ Há triângulos acutângulos que não são isósceles nem eqüiláteros.

02. Observe a figura:



Dados:
$AB = 35$
$CE = 22$
$AC = 2x - 6$
$DE = 3y + 5$
$\widehat{B} = \widehat{D}$

Calcular o valor de x e y e a razão entre os perímetros dos triângulos CBA e CDE.

Resolução

(A) $\widehat{B} = \widehat{D}$ (dado)

(L) $\overline{CB} = \overline{CD}$ (dado) $\xrightarrow{ALA} \Delta CBA \cong \Delta CDE$,

(A) $B\widehat{C}A = E\widehat{C}D$ (opv)

Assim:

$AC = CE = 22$
$AB = DE = 35$
$BC = CD = 22$

$2x - 6 = 22$	$3y + 5 = 35$
$2x = 28$	$3y = 30$
$x = 14$	$y = 10$

Para os perímetros, teremos:

$\Delta CBA \Rightarrow AB + AC + BC = 35 + 22 + 22 = 79$

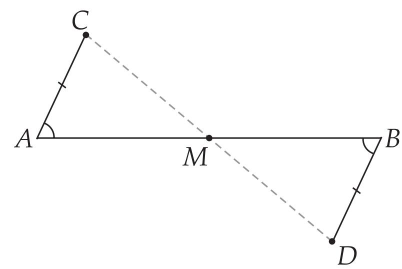
$\Delta CDE \Rightarrow CE + CD + DE = 22 + 22 + 35 = 79$

Portanto, a razão entre os perímetros será igual a 1.

Resposta: $x = 14$, $y = 10$ e a razão = 1.

03. Dado um segmento $\overline{AB}$, construimos $C\widehat{A}B \cong D\widehat{B}A$ com $AC = DB$, conforme a figura abaixo. Unindo os pontos C e D obtemos o ponto M no segmento $\overline{AB}$.

Mostre que M é ponto médio de $\overline{AB}$.



Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} \cong \overline{BD}\ (contrução) \\ C\hat{A}B = D\hat{B}A\ (contrução) \\ A\hat{M}C = B\hat{M}D\ (o.p.v.) \end{array}\right\} \overset{LAA_o}{\Rightarrow} \Delta AMC \cong \Delta BMD$$

$$\Delta AMC \cong \Delta BMD \overset{def.}{\Rightarrow} AM = BM$$

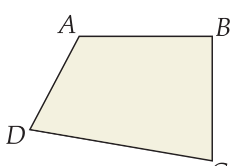
Resposta:

Assim M é ponto médio de $\overline{AB}$

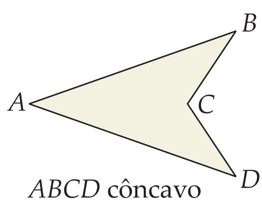
Capítulo 03. Quadriláteros Notáveis

1. Definição e Elementos

Sejam *A, B, C e D* **quatro pontos** de um mesmo plano todos **distintos**, sem que existam três colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a **reunião** desses quatro **segmentos é um quadrilátero**.



ABCD convexo



ABCD côncavo

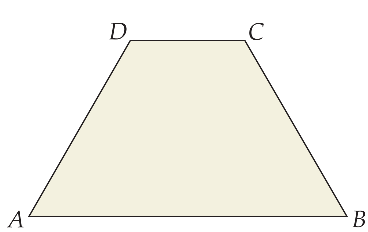
Elementos de um quadrilátero convexo *ABCD*.

- **Vértices**: são os pontos *A, B, C* e *D*.
- **Lados**: são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.
- **Ângulos internos**: são os ângulos $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$.
- **Ângulos externos:** são os ângulos adjacentes suplementares dos ângulos internos.

2. Classificação dos Quadriláteros Convexos

2.1. Trapézio

Um quadrilátero convexo é um **trapézio** se, e somente se, tiver **dois lados paralelos**.

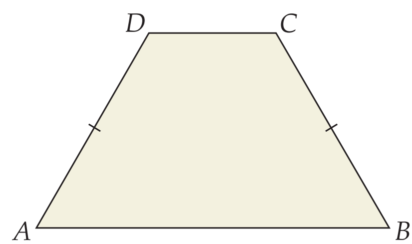


$\overline{AB}$ = base maior

$\overline{CD}$ = base menor

Os trapézios podem ser classificados em:

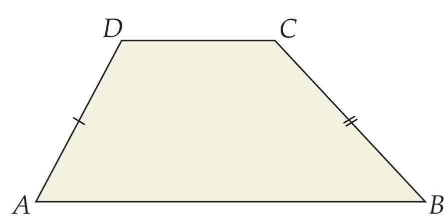
I. Trapézio Isósceles: quando os **lados** não paralelos são **congruentes**.



$$\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

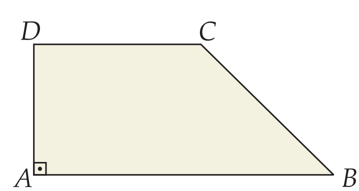
$$\hat{A} = \hat{B} \text{ e } \hat{D} = \hat{C}$$

II. Trapézio Escaleno: quando os **lados** não paralelos não são **congruentes**.



$$\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \text{ e } AD \neq BC$$

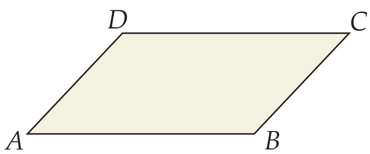
III. Trapézio Retângulo: quando tem dois ângulos internos retos.



$$\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \text{ e } \hat{A} = \hat{D} = 90°$$

2.2. Paralelogramo

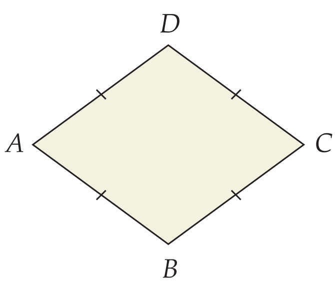
Um quadrilátero convexo é **paralelogramo** se, e somente se, possuir os **lados opostos paralelos**.



$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

2.3. Losango

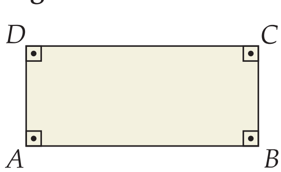
Um quadrilátero convexo é um **losango** se, e somente se, possuir os **quatro lados congruentes**.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

2.4. Retângulo

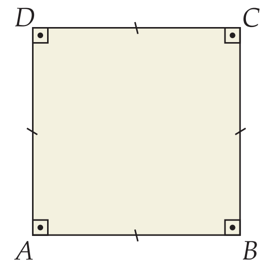
Um quadrilátero convexo é um **retângulo** se, e somente se, possuir os **quatro ângulos internos congruentes**.



$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

2.5. Quadrado

Um quadrilátero convexo é um **quadrado** se, e somente se, possuir os quatro **ângulos internos congruentes** e os quatro **lados congruentes**.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$ e $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

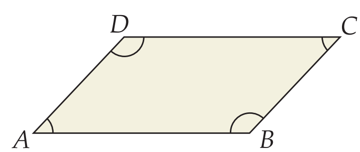
3. Propriedades dos Paralelogramos

3.1. Ângulos Opostos Congruentes

I. Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes.

Hipótese: *ABCD* é paralelogramo.

Tese: $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$



Demonstração

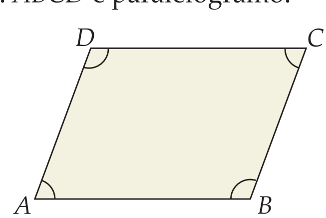
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180° \\ \overline{AD} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow \hat{C} + \hat{D} = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

Analogamente, provamos que $\hat{B} = \hat{D}$.

II. Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Hipótese: $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$

Tese: *ABCD* é paralelogramo.



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C} \text{ e } \hat{B}=\hat{D} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=180°\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=180°\\ \hat{A}+\hat{D}=180°\end{array}$$

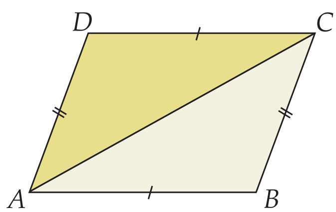
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=180° \Rightarrow \overline{AD}\,//\,\overline{BC}\\ \hat{A}+\hat{D}=180° \Rightarrow \overline{AB}\,//\,\overline{CD}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}ABCD \text{ é}\\ \text{paralelogramo.}\end{array}$$

III. Conseqüência: Todo retângulo é paralelogramo.

3.2. Lados Opostos Congruentes

I. Em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes.

Hipótese: $ABCD$ é paralelogramo.
Tese: $AB = CD$ e $BC = AD$



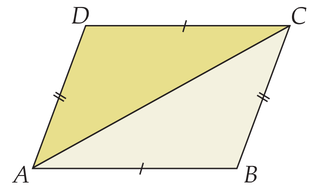
Demonstrações

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=\hat{D}\\ B\hat{A}C=D\hat{C}A\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} \text{ é comum}\\ \hat{B}=\hat{D}\\ B\hat{A}C=D\hat{C}A\end{array}\right\} \overset{LAA_0}{\Rightarrow} \Delta BAC \cong \Delta DCA \overset{def.}{\Rightarrow} \begin{cases}AB=CD\\ BC=AD\end{cases}$$

II. Todo quadrilátero convexo que possui os lados opostos congruentes é paralelogramo.

Hipótese: $AB = CD$ e $BC = AD$
Tese: $ABCD$ é paralelogramo.



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l}AB=CD\\ BC=AD\\ \overline{AC} \text{ é comum}\end{array}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Rightarrow} \Delta BAC \cong \Delta DCA$$

$$\Delta BAC \cong \Delta CDA \overset{def.}{\Rightarrow} \begin{cases}B\hat{A}C=D\hat{C}A\\ B\hat{C}A=D\hat{A}C\end{cases}$$

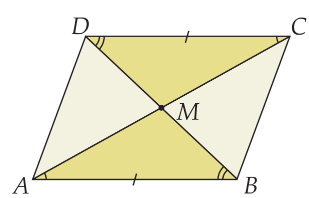
$$\left.\begin{array}{l}B\hat{A}C \cong D\hat{C}A \Rightarrow \overline{AB}\,//\,\overline{CD}\\ B\hat{C}A=D\hat{A}C \Rightarrow \overline{BC}\,//\,\overline{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}ABCD \text{ é}\\ \text{paralelogramo.}\end{array}$$

III. Conseqüência: Todo losango é paralelogramo.

3.3. Diagonais cortam-se no Meio

I. Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Hipótese: $ABCD$ é paralelogramo.
Tese: $AM = CM$ e $BM = DM$



Demonstração

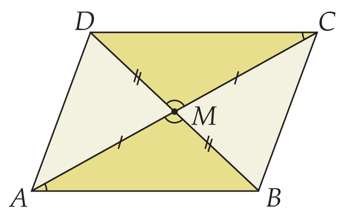
$$\begin{array}{c}ABCD \text{ é}\\ \text{paralelogramo}\end{array} \Rightarrow \begin{cases}AB=CD \ (I)\\ \overline{AB}\,//\,\overline{CD} \Rightarrow \begin{cases}B\hat{A}M=D\hat{C}M \ (II)\\ \text{e}\\ A\hat{B}M=C\hat{D}M \ (III)\end{cases}\end{cases}$$

$$(I), (II), (III) \overset{\text{ALA}}{\Rightarrow} \Delta MCD \cong \Delta MAB \Rightarrow \begin{cases}AM=CM\\ \text{e}\\ DM=BM\end{cases}$$

II. Todo quadrilátero convexo em que as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

Hipótese: $AM = MC$ e $BM = MD$

Tese: $ABCD$ é paralelogramo.



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} AM = MC \\ A\hat{M}B = C\hat{M}D\,(\text{o. p. v}) \\ BM = MD \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta AMB \cong \Delta CBD$$

$$\Delta AMB \cong \Delta CBD \Rightarrow AB = CD \ (I)$$

Analogamente para ΔAMD e ΔCMB, temos: $BD = AD$ (II)

(I) e (II) $\Rightarrow ABCD$ é paralelogramo.

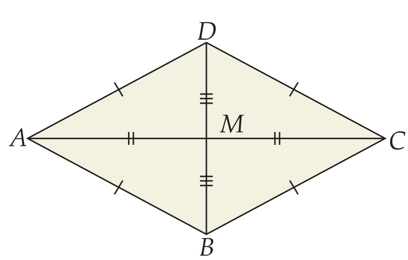
4. Propriedades dos Losangos

4.1. Diagonais Perpendiculares

I. Todo losango tem as diagonais perpendiculares.

Hipótese: $ABCD$ é losango.

Tese: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$



Demonstração

$$\begin{array}{c} ABCD \text{ é} \\ \text{losango} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} ABCD \text{ é} \\ \text{paralelogramo} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} AM = MC \\ AM = MD \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = BC \\ AM = MC \\ \overline{BM} \text{ comum} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta AMB \cong \Delta CMB$$

Assim:

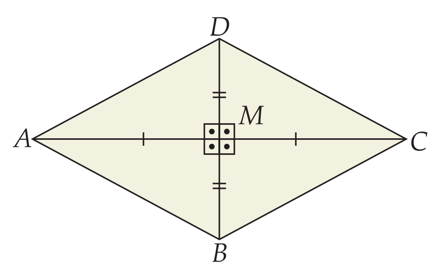
$$A\hat{M}B = C\hat{M}B = 90°$$

Então: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

II. Todo paralelogramo que tem as diagonais perpendiculares é losango.

Hipótese: $ABCD$ é paralelogramo e $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Tese: $ABCD$ é losango.



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} \text{ é comum} \\ BM = DM \\ A\hat{M}B = A\hat{M}D \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta AMB \cong \Delta AMD$$

Analogamente: $\Delta AMD \cong \Delta CMD \cong \Delta CMB$

Assim: $AB = BC = CD = AD$

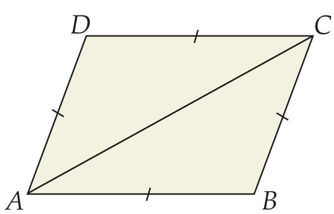
Então: $ABCD$ é losango.

4.2. Diagonais nas Bissetrizes dos Ângulos Internos

I. Todo losango tem as diagonais nas bissetrizes dos ângulos internos.

Hipótese : $ABCD$ é losango.

Tese: $\begin{cases} B\hat{A}C = D\hat{A}C;\ B\hat{C}A = D\hat{C}A \\ A\hat{B}D = C\hat{B}D;\ A\hat{D}B = C\hat{D}B \end{cases}$



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} AB = BC \\ AD = CD \\ \overline{AC} \text{ é comum} \end{array}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta CDA$$

$$\Delta ABC \equiv \Delta CDA \Rightarrow \begin{cases} B\hat{A}C = D\hat{C}A \quad (I) \\ \quad\quad \text{e} \\ B\hat{C}A = D\hat{A}C \quad (II) \end{cases}$$

$$\Delta ABC$$

$AB = BC \Rightarrow \text{isósceles} \Rightarrow B\hat{A}C = B\hat{C}A \ (III)$

$(I), (II) \text{ e } (III) \Rightarrow B\hat{A}C = D\hat{A}C \text{ e } B\hat{C}A = D\hat{C}A$

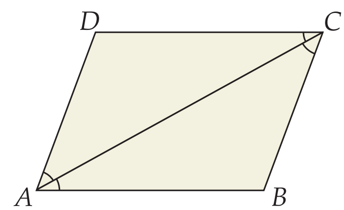
Analogamente, provamos que:

$$A\hat{B}D = C\hat{B}D \text{ e } A\hat{D}B = C\hat{D}B$$

II. Todo paralelogramo que tem as diagonais nas bissetrizes dos ângulos internos é losango.

Hipótese: $\begin{cases} ABCD \text{ é paralelogramo e} \\ B\hat{A}C = D\hat{A}C;\ B\hat{C}A = D\hat{C}A; \\ A\hat{B}D = C\hat{B}D \text{ e } A\hat{D}B = C\hat{D}B \end{cases}$

Tese: $ABCD$ é losango.



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ B\hat{A}C = D\hat{A}C = \dfrac{\hat{A}}{2} \\ B\hat{C}A = D\hat{C}A = \dfrac{\hat{C}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} B\hat{A}C = B\hat{C}A \\ \text{e} \\ D\hat{A}C = D\hat{C}A \end{array}$$

$B\hat{A}C = D\hat{A}C \Rightarrow AB = BC \ (I)$

$D\hat{A}C = D\hat{C}A = \Rightarrow AD = CD\,(II)$

$ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow AB = CD$ (III)

(I), (II) e (III) $\Rightarrow AB = BC = CD = AD$

Assim, $ABCD$ é losango.

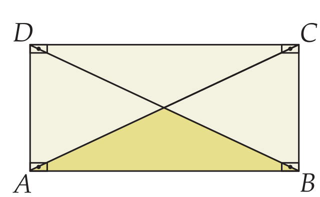
5. Propriedade do Retângulo:

5.1. Diagonais Congruentes

I. Todo retângulo tem as diagonais congruentes.

Hipótese: $ABCD$ é retângulo.

Tese: $AC = BD$



Demonstração

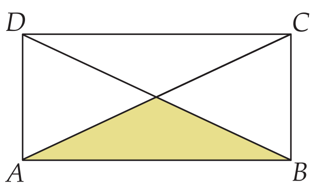
$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} \\ \overline{AB} \text{ é comum} \end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \Delta DAB \cong \Delta CBA$$

$$\Delta DAB \cong \Delta CBA \Rightarrow BD = AC$$

II. Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Hipótese: $\begin{cases} ABCD \text{ é paralelogramo.} \\ AC = BD \end{cases}$

Tese: *ABCD* é retângulo.



Demonstração

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \ (I) \\ \hat{B} = \hat{D} \ (II) \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ BD = AC \\ \overline{AB} \text{ é comum} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta BAD \cong \Delta CBA$$

$$\Delta BAD \cong \Delta CBA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \ (III)$$

$$(I), (II) \ e \ (III) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \Rightarrow \underset{\text{retângulo}}{ABC}$$

6. Conclusão Importante

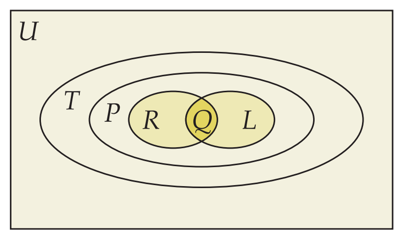
Como os quadrados são trapézios, paralelogramos, losangos e retângulos, eles têm todas as propriedades estudadas, isto é:

- ângulos opostos congruentes;
- lados opostos congruentes;
- diagonais cortam-se no meio;
- diagonais nas bissetrizes dos ângulos internos;
- diagonais perpendiculares;
- diagonais congruentes.

Exercícios Resolvidos

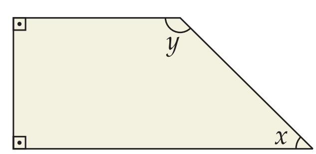
01. Construir um diagrama de Venn, sendo:
U... conjunto dos quadriláteros convexos
T...conjunto dos trapézios
P... conjunto dos paralelogramos
R... conjunto dos retângulos
L... conjunto dos losangos
Q... conjunto dos quadrados

Resposta



02. Num trapézio retângulo, o menor ângulo é $\frac{5}{7}$ do maior. Determine a medida dos seus ângulos internos.

Resolução



Da figura, temos:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7}y \\ x + y + 90° + 90° = 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7}y \\ x + y = 180° \end{cases}$$

$$x + y = 180° \Rightarrow \frac{5}{7}y + y = 180°$$

$5y + 7y = 1\,260°$

$12y = 1\,260°$

$y = 105°$

Logo:

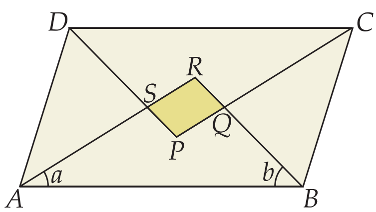
$$x = \frac{5}{7} y \Rightarrow x = \frac{5}{7} \cdot 105°$$

$x = 75°$

Resposta: *75°, 90°, 90° e 105°*

03. Demonstre que o quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos de um paralelogramo é um retângulo.

Resolução



$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares ($\overline{AD} // \overline{AB}$ e $\overline{AB}$ é transversal). Logo:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 180° \\ a = \dfrac{\hat{A}}{2} \text{(bissetriz)} \\ b = \dfrac{\hat{B}}{2} \text{(bissetriz)} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 90°$$

No triângulo *ABR*, temos:

$$a + b + \hat{R} = 180°$$

$$90° + \hat{R} = 180° \Rightarrow \hat{R} = 90°$$

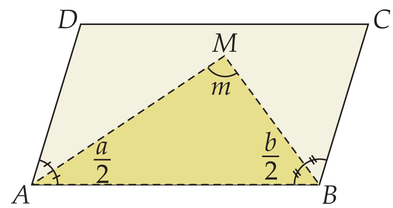
Aplicando o mesmo raciocínio aos triângulos *BCQ*, *DCP* e *ADS*, provamos que $\hat{S} = \hat{P} = \hat{Q} = 90°$.

Resposta:

Portanto, *PQRS* é retângulo.

04. As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de um paralelogramo formam um ângulo *m* que mede $\frac{5}{4}$ do ângulo $\hat{A}$. Quanto medem $\hat{A}$ e $\hat{B}$?

Resolução



No triângulo *ABM*, temos:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + m = 180° \Rightarrow 7a + 2b = 720°$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{5}{4} a = 180° \quad I$$

$a + b = 180°$ $\left(\overline{AD} // \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} \text{ é transversal.}\right)$

$$\begin{cases} 7a + 2b = 720° \\ a + b = 180° \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

Resposta:

$a = 72°$ e $b = 108°$.

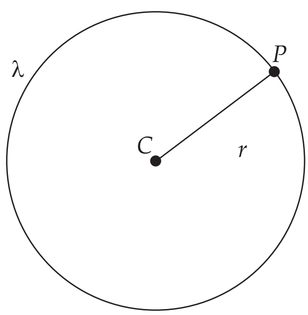
Capítulo 04. Ângulos na Circunferência

1. Circunferência e Círculo

1.1. Circunferência

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja distância a um ponto fixo é uma **constante positiva**.

A figura representa uma **circunferência** λ, em que C é o **centro** (ponto fixo), $\overline{PC}$ é um **raio**, com $PC = r$ (constante positiva).

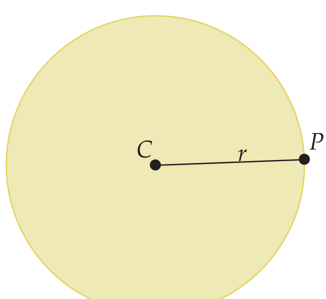


$$\lambda(C, r) = \{P \in \alpha \,/\, PC = r\}$$

em que α é o plano da folha.

1.2. Círculo

Círculo é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo é menor ou igual a uma constante positiva.

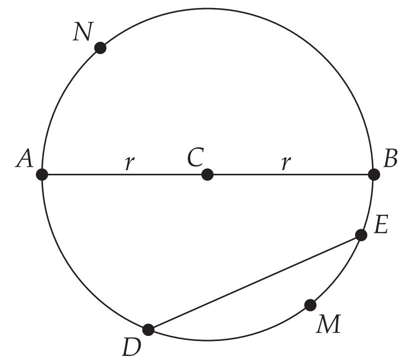


$$\mathscr{C} = \{P \in \alpha \,/\, PC \leq r\}$$

em que α é o plano da folha.

1.3. Elementos de uma Circunferência

Na circunferência de centro C e raio r da figura, temos:



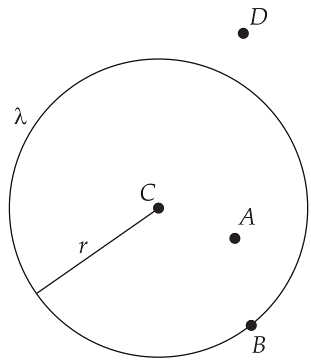
$\overline{AC}$ = raio
$\overline{AB}$ = diâmetro
$\overline{DE}$ = corda
$\overset{\frown}{DME}$ = arco
$\overset{\frown}{ANB}$ = semicircunferência
$AC = r$ e $AB = 2r$

1.4. Posições de um Ponto em Relação a uma Circunferência

Dados um ponto P e uma circunferência de centro C e raio $\boldsymbol{r}$, sendo $\boldsymbol{d}$ a distância de P ao centro C, temos:

P é interno à circunferência $d < r$
P é externo à circunferência $d > r$
P pertence à circunferência $d = r$

Exemplo



A é interno a λ

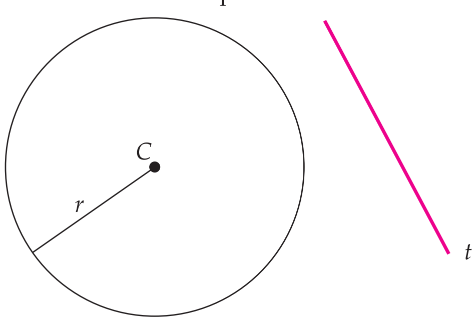
$B \in \lambda$

D é externo a λ

1.5. Posições de uma Reta em Relação a uma Circunferência

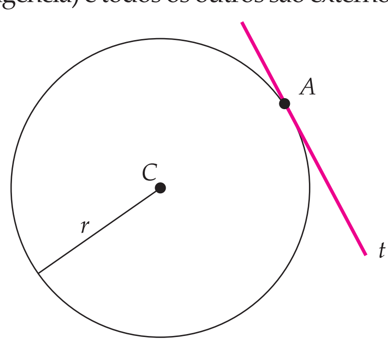
I. Reta externa

Uma reta é **externa** a uma circunferência quando todos os seus pontos são externos a ela.



II. Reta tangente

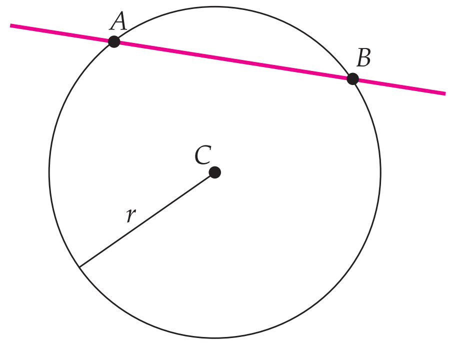
Uma reta é **tangente** a uma circunferência quando um de seus pontos pertence a ela (ponto de tangência) e todos os outros são externos a ela.



A é o ponto de tangência.

III. Reta secante

Uma reta é chamada de **secante** a uma circunferência quando tem dois pontos distintos em comum com ela.

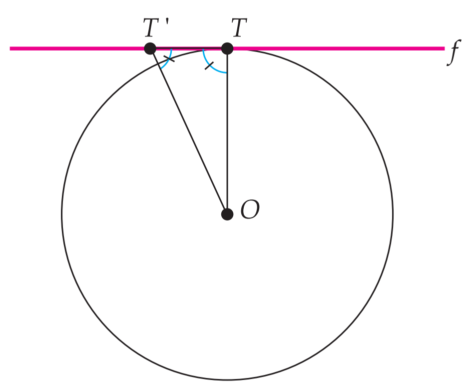


1.6. Propriedade da Reta Tangente

Toda reta t tangente a uma circunferência de centro O é perpendicular ao raio no ponto T de tangência.

Hipótese: $\begin{cases} t \text{ é tangente a } \lambda \\ T \text{ é ponto de tangente} \end{cases}$

Tese: $\overline{OT} \perp t$



Demonstração

Se a tangente não fosse perpendicular ao raio no ponto T, o raio $\overline{OT}$ formaria com t um ângulo agudo, e existiria um ponto $T' \in t$, de tal modo que o triângulo OTT′ fosse isósceles.

Então, como $OT = OT' =$ raio, o ponto T' pertenceria a λ, e a reta t e a circunferência λ teriam dois pontos distintos em comum, o que é um absurdo.

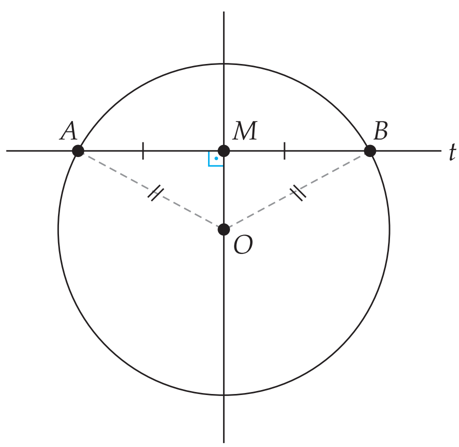
Assim, t é tangente ao raio, isto é, $\overline{OT} \perp t$.

1.7. Propriedade da Reta Secante

Se uma reta t é secante a uma circunferência λ, de centro O, em dois pontos A e B, então sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é perpendicular a t.

Hipótese: t é secante a λ em A e B.

Tese: $\overleftrightarrow{OM} \perp t$



Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \\ OA = OB \\ \overline{OM} \text{ é comum} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta OAM \cong \Delta OMB$$

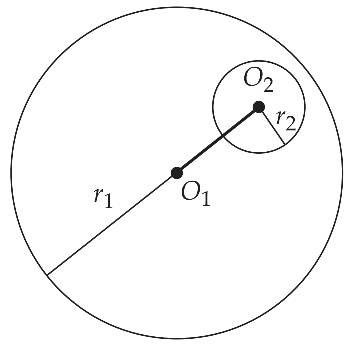
$$\Delta OAM \equiv \Delta OBM \Rightarrow O\hat{M}A = O\hat{M}B = 90°$$

Assim, $\overleftrightarrow{OM} \perp t$

1.8. Posições Relativas de Duas Circunferências

I. Internas

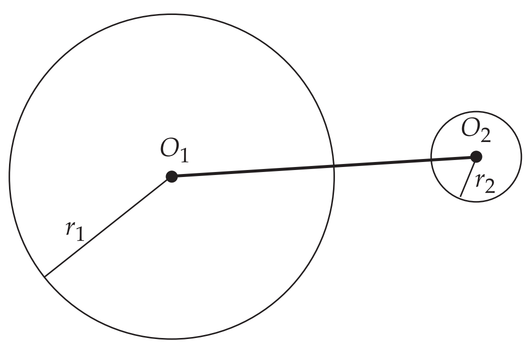
Duas circunferências são **internas** quando todos os pontos de uma forem internos à outra. Em particular, quando os centros coincidem, são **concêntricas**.



$$O_1O_2 < r_1 - r_2$$

II. Externas

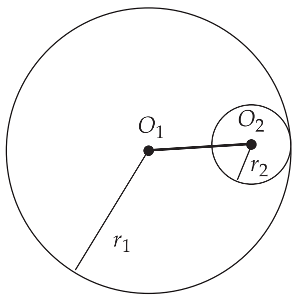
Duas circunferências são **externas** quando todos os pontos de uma forem externos à outra.



$$O_1O_2 > r_1 + r_2$$

III. Tangentes internamente

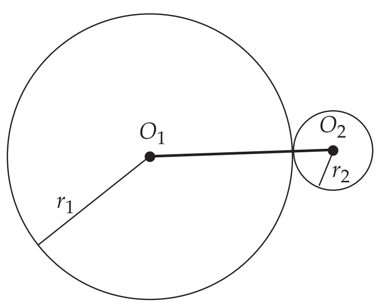
Duas circunferências são **tangentes internamente** quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma delas forem interiores à outra.



$$O_1O_2 = r_1 - r_2$$

IV. Tangentes externamente

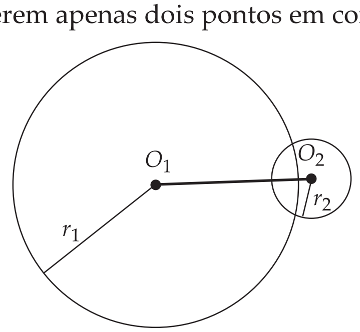
Duas circunferências são **tangentes externamente** quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma delas forem externos à outra.



$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

V. Secantes

Duas circunferências são **secantes** quando tiverem apenas dois pontos em comum.



$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

Exercícios Resolvidos

01. Qual a posição relativa de duas circunferências de raios r e f, sendo d a distância entre seus centros, em cada caso abaixo:

a) $r = 2$ cm, $R = 4$ cm, $d = 7$ cm
b) $r = 3$ cm, $R = 4$ cm, $d = 7$ cm
c) $r = 3$ cm, $R = 7$ cm, $d = 4$ cm
d) $r = 4$ cm, $R = 6$ cm, $d = 1$ cm

Resolução

a) $\left.\begin{matrix} 4+2=6 \\ 4-2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7 > 4+2 \Rightarrow d > R + r$

Resposta: *Portanto, são externas.*

b) $4 + 3 = 7 \Rightarrow d = R + r$

Resposta: *Portanto, são tangentes externamente.*

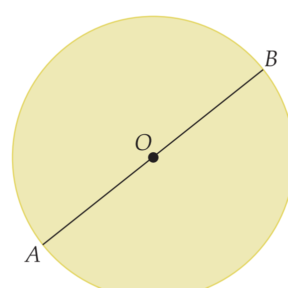
c) $\left.\begin{matrix} 7+3=10 \\ 7-3=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 = 7 - 3 \Rightarrow d = R - r$

Resposta: *Portanto, tangentes internamente.*

d) $\left.\begin{matrix} 6+4=10 \\ 6-4=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 < 6 - 4 \Rightarrow d < R - r$

Resposta: *Portanto, são internas.*

02. Determine o raio do círculo de centro O, dados: $AB = 3x - 3$ e $OA = x + 3$.



Resolução

$$\left.\begin{matrix} AB = \text{diâmetro} \\ OA = \text{raio} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{2} = OA$$

$$\frac{3x-3}{2} = x + 3$$

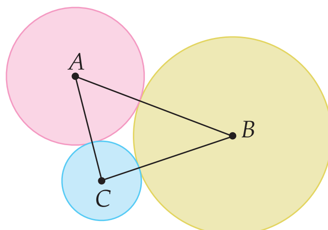
$3x - 3 = 2x + 6$

$x = 9$

$OA = R = 9 + 3 = 12$

Resposta: *O raio mede 12.*

03. Na figura, as circunferências são tangentes duas a duas, e os centros são os vértices do triângulo ABC. Sendo $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 6$ cm, determine os raios das circunferências.



Resolução

Sejam r_1, r_2 e r_3 os raios das circunferências de centros A, B e C, respectivamente, e d_1, d_2 e d_3 as distâncias entre seus centros. Teremos:

→ *as circunferências de centros A e B são tangentes exteriormente, então:*

$d_1 = r_1 + r_2$
$d_1 = AB = 7$ cm

$\boxed{r_1 + r_2 = 7}$ (1)

→ *as circunferências de centros B e C são tangentes exteriormente, então:*

$d_3 = r_3 + r_2$
$d_3 = BC = 6$ cm

$\boxed{r_3 + r_2 = 6}$ (2)

→ *as circunferências de centros A e C são tangentes exteriormente, então:*

$d_2 = r_1 + r_3$
$d_2 = AC = 5$ cm

$\boxed{r_1 + r_3 = 5}$ (3)

fazendo (1) – (2)

$r_1 + \cancel{r_2} - r_3 - \cancel{r_2} = 7 - 6$

$\boxed{r_1 - r_3 = 1}$ (4)

(3) + (4):

$r_1 + \cancel{r_3} + r_1 - \cancel{r_3} = 5 + 1$

$2r_1 = 6$

$\boxed{r_1 = 3}$

Voltando em (1):

$3 + r_2 = 7$

$\boxed{r_2 = 4}$

Voltando em (2):

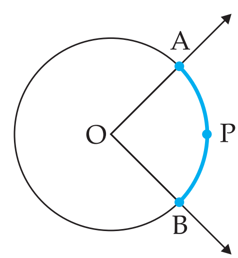
$r_3 + 4 = 6$

$\boxed{r_3 = 2}$

***Resposta**: Os raios são 2 cm, 3 cm e 4 cm.*

2. Ângulo Central

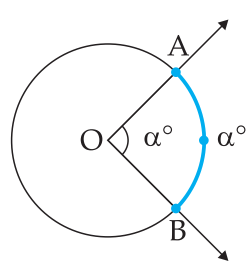
Ângulo central é o que tem o **vértice no centro** da circunferência. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é o seu arco correspondente.



∢ AOB é central.

$\overset{\frown}{APB}$ é o arco correspondente do ∢ AOB.

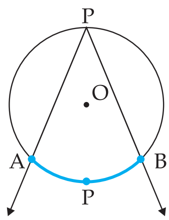
A medida de um ângulo central é igual à medida de seu arco correspondente.



$\Rightarrow A\hat{O}B = m\,(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$

3. Ângulo Inscrito

Ângulo inscrito é o que tem **vértice na circunferência** e **lados secantes** à mesma. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é o seu arco correspondente.



$\sphericalangle$ APB é inscrito.

$\overset{\frown}{APB}$ é o arco correspondente do $\sphericalangle$ APB.

4. Propriedade do Ângulo Inscrito

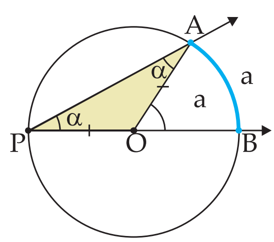
> A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do seu arco correspondente.

Hipótese: $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{a} \text{ é a medida do} \\ \text{arco correspondente} \\ \text{do ângulo inscrito } A\hat{P}B. \end{array} \right.$

Tese: $A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$

Demonstração

1º Caso – O centro *O* pertence a um lado do ângulo.



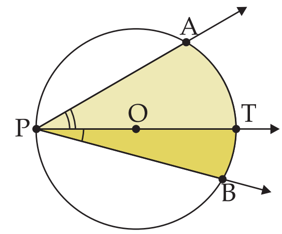
Sendo $A\hat{P}B = \alpha$, temos:

$OA = OP = \text{raio} \Rightarrow O\hat{A}P = O\hat{P}A = \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} A\hat{O}B = a \text{ (central)} \\ \sphericalangle AOB \text{ ext. ao } \Delta AOB \end{array} \right\} \Rightarrow a = \alpha + \alpha$$

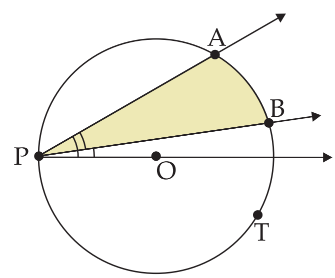
Assim, $a = 2\alpha$, ou seja: $A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$

2º Caso – o centro é interior ao ângulo.



$$\left. \begin{array}{ll} A\hat{P}T = \dfrac{m(\overset{\frown}{AT})}{2} & (1^{\underline{o}} \text{ caso}) \\ B\hat{P}T = \dfrac{m(\overset{\frown}{BT})}{2} & (1^{\underline{o}} \text{ caso}) \\ A\hat{P}B = A\hat{P}T + B\hat{P}T & \\ m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AT}) + m(\overset{\frown}{BT}) & \\ m(\overset{\frown}{AB}) = a & \end{array} \right\} \Rightarrow A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$$

3º Caso – o centro é externo ao ângulo.



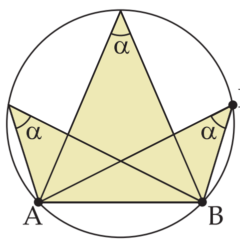
$$\left. \begin{array}{ll} A\hat{P}T = \dfrac{m(\overset{\frown}{AT})}{2} & (1^{\underline{o}} \text{ caso}) \\ B\hat{P}T = \dfrac{m(\overset{\frown}{BT})}{2} & (1^{\underline{o}} \text{ caso}) \\ A\hat{P}B = A\hat{P}T - B\hat{P}T & \\ m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AT}) - m(\overset{\frown}{BT}) & \\ m(\overset{\frown}{AB}) = a & \end{array} \right\} \Rightarrow A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$$

Como, obrigatoriamente, um dos três casos acontece, $A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$.

5. Conseqüências da Propriedade do Ângulo Inscrito

5.1. Arco Capaz

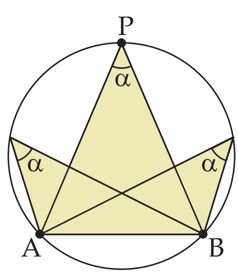
Dois ângulo inscritos em uma mesma circunferência, com o mesmo arco correspondente, têm medidas iguais.



O arco $\overset{\frown}{APB}$ é chamado de arco capaz de α.

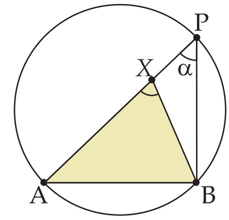
5.2. Pontos não Pertencentes ao Arco Capaz

Sendo $\overline{AB}$ uma corda de uma circunferência λ, e P um ponto dessa circunferência, com $A\hat{P}B = \alpha$, dizemos que $\overset{\frown}{APB}$ é o arco capaz de α, isto é, todos os pontos do arco $\overset{\frown}{APB}$ vêem o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida α.



Se tomarmos um ponto **X** do semiplano $\left(P, \overleftrightarrow{AB}\right)$ que não pertence $\overset{\frown}{APB}$, teremos:

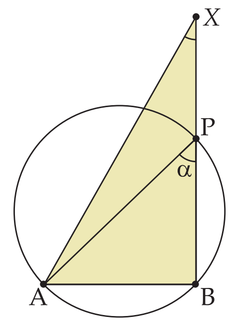
I. Se **X é interno** à circunferência.



$A\hat{X}B$ é externo ao ΔPXB e $B\hat{P}X = \alpha$.

Assim, $A\hat{X}B > \alpha$.

II. Se **X é externo** à circunferência.

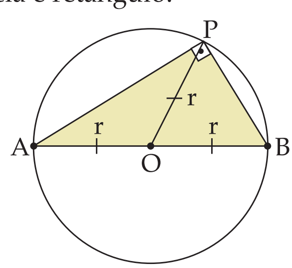


$\sphericalangle$ $A\hat{P}B$ é externo ao ΔAXP e $A\hat{P}B = \alpha$.

Assim, $A\hat{X}B < \alpha$.

5.3. Triângulo Retângulo

Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

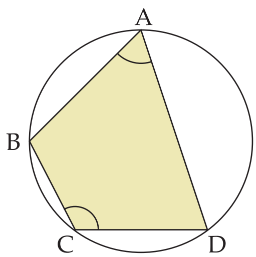


$m\,(\overset{\frown}{AB}) = 180°$, então $A\hat{P}B = \dfrac{m\,(\overset{\frown}{AB})}{2} = 90°$

Nota – A mediana relativa à hipotenusa $\overline{OP}$ tem medida igual à metade de AB.

5.4. Quadrilátero Inscrito

Todo quadrilátero inscrito em uma circunferência tem ângulos opostos suplementares.



$$B\hat{A}D = \frac{m(\overset{\frown}{BCD})}{2} \quad \text{e} \quad B\hat{C}D = \frac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2}$$

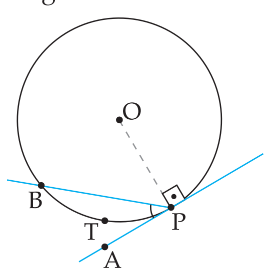
Como $m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BAD}) = 360°$

$2\,B\hat{A}D + 2\,B\hat{C}D = 360°$ ou $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180°$

6. Ângulo de Segmento

6.1. Definição

Ângulo de segmento é o que tem o vértice na circunferência, um de seus lados é secante e o outro é tangente.



∢ APB é de segmento.

$\overset{\frown}{PTB}$ é o arco correspondente do ∢ APB.

> A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do seu arco correspondente.

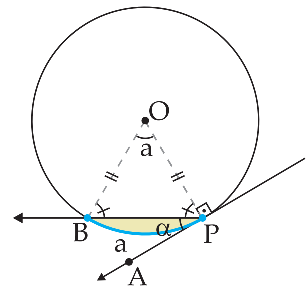
6.2. Propriedade

Hipótese: a é a medida do arco correspondente do ângulo de segmento APB.

Tese: $A\hat{P}B = \dfrac{a}{2}$

Demonstração

1º Caso: ∢ APB é agudo.



Sendo $A\hat{P}B = \alpha < 90°$, temos:

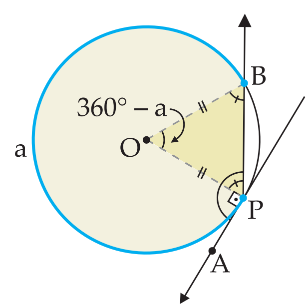
$OB = OP \Rightarrow O\hat{B}P = O\hat{P}B = 90° - \alpha$

No ΔOBP: $a + (90° - \alpha) + (90° - \alpha) = 180°$

Assim: $a = 2\alpha$, ou seja:

$$A\hat{P}B = \frac{a}{2}$$

2º Caso – ∢ APB é obtuso.



Sendo $A\hat{P}B = \alpha > 90°$, temos:

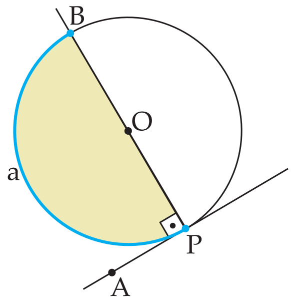
$OB = OP \Rightarrow O\hat{B}P = O\hat{P}B = \alpha - 90°$

No ΔOBP: $(360° - a) + (\alpha - 90°) + (\alpha - 90°) = 180°$

Assim: $a = 2\alpha$, ou seja:

$$A\hat{P}B = \frac{a}{2}$$

3º Caso – ∢ APB é reto.



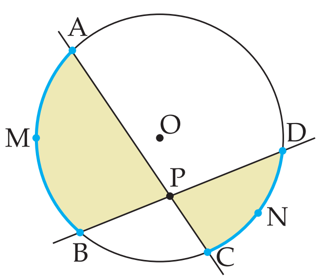
$$\left.\begin{array}{l} a = 180° \\ A\hat{P}B = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{P}B = \frac{a}{2}$$

Como, obrigatoriamente, um dos três casos acontece, $A\hat{P}B = \frac{a}{2}$.

7. Ângulo de Vértice Interno

7.1. Definição

Ângulo de vértice interno é o que tem o vértice no interior da circunferência e seus lados são secantes a ela.



∢ APB, ∢ BPC, ∢ CPD e ∢ APD são ângulos de vértice interno.

$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes dos ângulos APB e CPD.

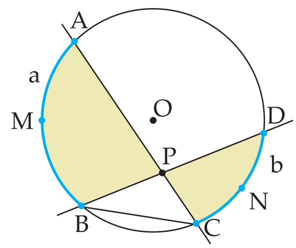
7.2. Propriedade

> A medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade da soma das medidas dos seus arcos correspondentes.

Hipótese: a e b são as medidas dos arcos correspondentes dos ângulos de vértice interno APB e CPD.

Tese: $A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{a + b}{2}$

Demonstração



$B\hat{C}P = \frac{a}{2}$ e $C\hat{B}P = \frac{b}{2}$

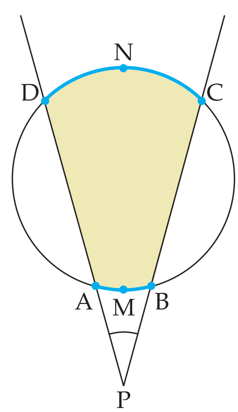
∢ APB é externo ao ΔBPC.

Assim: $A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a + b}{2}$

8. Ângulo de Vértice Externo

8.1. Definição

Ângulo de vértice externo é o ângulo que tem o vértice no exterior da circunferência e seus lados são secantes a ela.



∢ APB é de vértice externo.

$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes do ∢ APB.

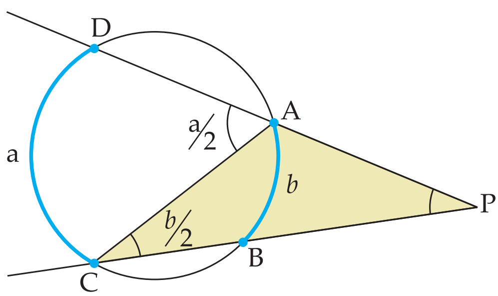
8.2. Propriedade

> A medida de um ângulo de vértice externo é igual à metade da diferença das medidas dos seus arcos correspondentes.

Hipótese: a e b são as medidas dos arcos correspondentes dos ângulos de vértice externo APB.

Tese: $A\hat{P}B = \dfrac{a - b}{2}$

Demonstração



$B\hat{C}A = \dfrac{b}{2}$ e $C\hat{A}D = \dfrac{a}{2}$

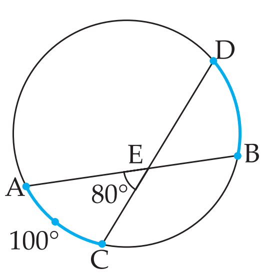
$\sphericalangle$ CAD é externo ao ΔCAP.

Assim:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} + A\hat{P}B, \text{ ou seja: } A\hat{P}B = \frac{a - b}{2}$$

Exercício Resolvido

01. Na figura, $A\hat{E}C = 80°$ e $\overset{\frown}{AC} = 100°$. Determine a medida do arco $\overset{\frown}{BD}$.



Resolução

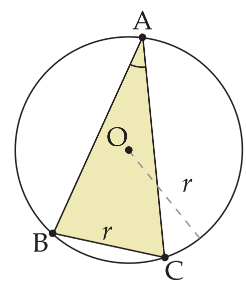
$A\hat{E}C$ *é ângulo de vértice interno, logo:*

$$A\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow 80 = \frac{100 + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

$100 + \overset{\frown}{BD} = 160$

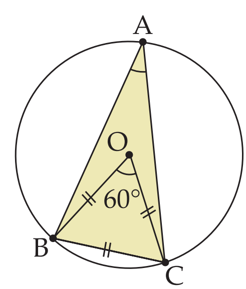
Resposta: $\boxed{\overset{\frown}{BD} = 60°}$

02. No triângulo ABC da figura abaixo, o lado BC e o Raio da circunferência são congruentes. Calcular $B\hat{A}C$.



Resolução

- *Unir o centro O aos vértices B e C, obtendo-se o triângulo equilátero OBC.*



- $B\hat{O}C$ *é um ângulo central, logo:*

  $B\hat{O}C = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 60°$

- $B\hat{A}C$ *é um ângulo inscrito, logo:*

  $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

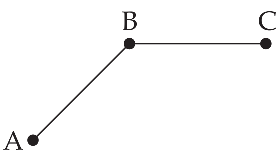
Resposta: $\boxed{B\hat{A}C = 30°}$

Capítulo 05. Estudo dos Polígonos

1. Definições e Elementos

1.1. Segmentos Consecutivos

Dois segmentos são **consecutivos** quando são distintos e têm uma **extremidade comum.**



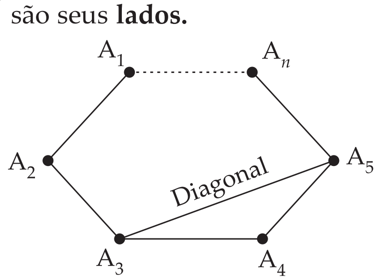
$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos.

1.2. Polígonos e seus Elementos

Consideremos n ($n \geq 3$) pontos ordenados $A_1, A_2, ..., A_n$, e os n segmentos consecutivos por eles determinados: $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, ... , $\overline{A_n A_1}$, de modo que não existam dois segmentos consecutivos colineares.

Polígono $A_1 A_2 ... A_n$ é a reunião dos pontos dos n segmentos considerados.

Os pontos $A_1, A_2, ..., An$ são os **vértices** do polígono e os segmentos $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, ... , $\overline{A_n A_1}$ são seus **lados.**



Polígono A_1, A_2 ... A_n

Os segmentos determinados por dois vértices não consecutivos são as **diagonais** do polígono.

2. Posição de um Ponto

Consideremos um polígono e um ponto P não pertencente a ele.

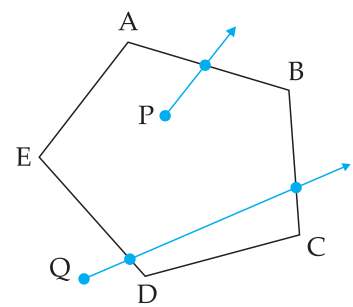
Tomando uma semi-reta com origem P, que não passa por vértice algum do polígono, esta semi-reta intercepta o polígono em n **pontos.**

Então:

1º) O ponto P **é interno** ao polígono se, e somente se, n **é ímpar.**

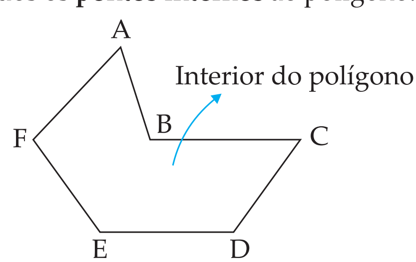
2º) O ponto P **é externo** ao polígono se, e somente se, n **é par.**

Exemplo



P é interno ao polígono.
Q é externo ao polígono.

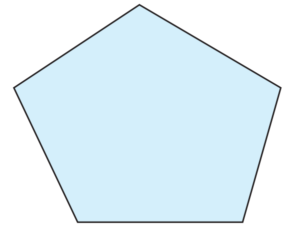
O **interior** de um polígono é o conjunto de todos os **pontos internos** ao polígono.



O conjunto dos pontos externos ao polígono é o **exterior** do polígono.

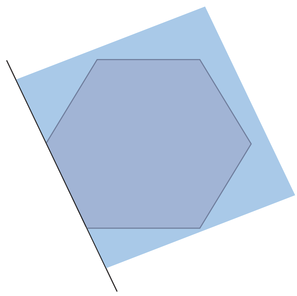
3. Região Poligonal

Região poligonal é a reunião do polígono com seu interior.



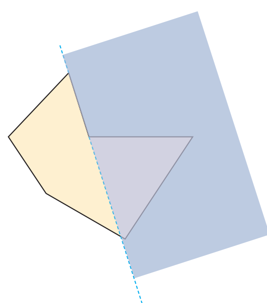
4. Polígono Convexo e Polígono Côncavo

Um polígono é **convexo** se, e somente se, qualquer reta suporte, de um lado do polígono, deixar todos os outros **lados num mesmo semiplano,** dos dois que ela determina.



Num polígono convexo, a região poligonal é convexa.

Um polígono que **não é convexo** é **côncavo.**



Num polígono côncavo, a região poligonal é côncava.

5. Nomenclatura

O nome dos polígonos é dado de acordo com o número n de lados, assim:

1º caso: $3 \leq n \leq 9$

$n = 3$ ..... **triângulo**

$n = 4$ ..... **quadrilátero**

$n = 5$ ..... **pentágono**

$n = 6$ ..... **hexágono**

$n = 7$ ..... **heptágono**

$n = 8$ ..... **octógono**

$n = 9$ ..... **eneágono**

2º caso: n é múltiplo de 10

$n = 10$ ..... **decágono**

$n = 20$ ..... **icoságono**

$n = 30$ ..... **tricágono**

$n = 40$ ..... **quadricágono**

$n = 50$ ..... **pentacágono**

$n = 60$ ..... **hexacágono**

3º caso: $n > 10$ e não múltiplo de 10

O nome inicia pelo prefixo que indica a unidade (uno, duo, tri, quadri, penta, hexa, hepta, octo e enea) e termina pela dezena.

$n = 11$ ..... unodecágono ou undecágono

$n = 12$ ..... duodecágono ou dodecágono

$n = 16$ ..... hexadecágono

$n = 18$ ..... octodecágono

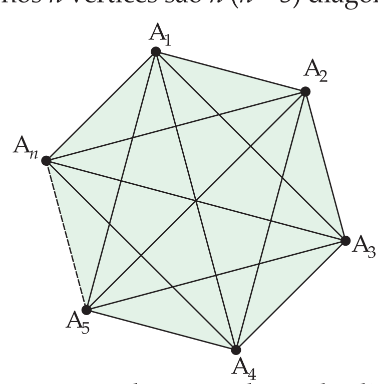
$n = 25$ ..... penta-icoságono

$n = 37$ ..... heptatricágono

$n = 56$ ..... hexapentacágono

6. Número de Diagonais de um Polígono Convexo

Num polígono convexo $A_1 A_2 \ldots A_n$ com n lados, em cada vértice, temos $(n - 3)$ diagonais, então nos n vértices são $n\,(n - 3)$ diagonais.



No entanto, desse modo, cada diagonal está sendo contada duas vezes, por exemplo, $\overline{A_1 A_3}$ e $\overline{A_3 A_1}$, então o número d de diagonais é:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

7. Ângulos de um Polígono Convexo

7.1. Teorema 1

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $S_i = (n-2) \cdot 180°$.

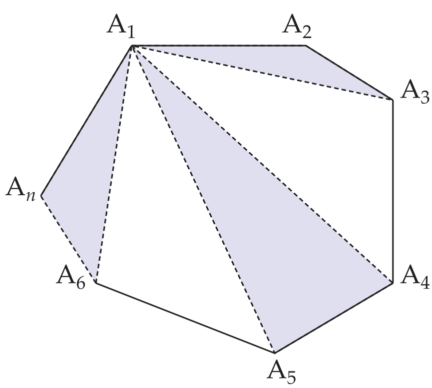
Hipótese: polígono convexo com n lados.

Tese: $S_i = (n-2) \cdot 180°$

Demonstração

Consideremos um polígono convexo $A_1 A_2 \dots A_n$ com n lados, e tracemos as $(n-3)$ diagonais que partem do vértice A_1, obtendo os $(n-2)$ triângulos:

$$\left(A_1 A_2 A_3,\ A_1 A_3 A_4,\ A_1 A_4 A_5,\ \dots,\ A_1 A_{n-1} A_n\right)$$



A soma das medidas dos ângulos internos dos $(n-2)$ triângulos é igual à soma das medidas dos ângulos internos do polígono.

Como em cada triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é 180°, temos:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

7.2. Teorema 2

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo com n lados é 360°.

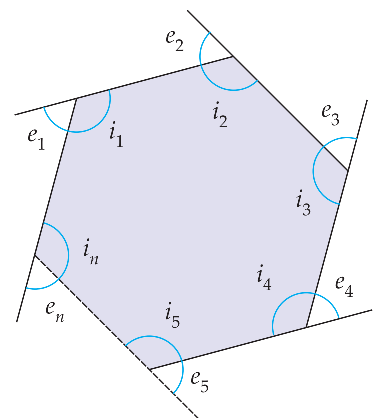
Hipótese: polígono convexo com n lados.

Tese: $S_e = 360°$

Demonstração

Consideremos um polígono convexo $A_1 A_2 \dots A_n$ com n lados.

Sejam $i_1, i_2, \dots, i_n$ os ângulos internos do polígono e $e_1, e_2, \dots, e_n$ os ângulos externos respectivos.



Assim:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 + e_1 = 180° \\ i_2 + e_2 = 180° \\ i_3 + e_3 = 180° \\ \text{-----------------} \\ i_n + e_n = 180° \end{array}\right\} +$$

$$\overline{S_i + S_e = n \cdot 180°}$$

Como $S_i = (n-2) \cdot 180°$, temos:

$S_e = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180°$, então: $S_e = 360°$

Observações

1ª) Quando nos referimos a um polígono fica subentendido que o polígono é convexo.

2ª) Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Exercícios Resolvidos

01. Qual é o polígono em que a soma das medidas dos ângulos internos é o quádruplo da soma das medidas dos ângulos externos?

Resolução

$Si = 4 \cdot Se$

$(n - 2) \cdot 180^0 = 4 \cdot 360^0 \ \ (: 180^0)$

$n - 2 = 4 \cdot 2$

$n - 2 = 8$

$n = 10$

Resposta

O polígono é o decágono.

02. Os números que exprimem o número de lados de três polígonos são $n - 3$, n e $n + 3$. Determine o número de lados desses polígonos, sabendo que a soma de todos os seus ângulos internos vale 3 240°.

Resolução

Pelas condições do problema, temos:

$S_1 = (n - 3 - 2) \cdot 180 = (n - 5) \cdot 180$

$S_2 = (n - 2) \cdot 180$

$S_3 = (n + 3 - 2) \cdot 180 = (n + 1) \cdot 180$

$S_1 + S_2 + S_3 = 3\,240$

$(n-5) \cdot 180 + (n-2) \cdot 180 + (n+1) \cdot 180 = 3\,240$

$[n - 5 + n - 2 + n + 1] \cdot 180 = 3\,240$

$3n - 6 = 18$

$3n = 24 \Rightarrow n = 8$

Então, teremos:

$n - 3 = 8 - 3 = 5$ *lados*

$n = 8$ *lados*

$n + 3 = 8 + 3 = 11$ *lados*

Resposta

5 lados, 8 lados e 11 lados

03. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono que tem um número de diagonais igual ao quádruplo do número de lados?

Resolução

$d = \dfrac{n(n-3)}{2}$ *e* $d = 4n$. *Então,*

$4n = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Como $n \neq 0$, *podemos dividir ambos os membros por* n.

$4n = \dfrac{n-3}{2} \Rightarrow 8 = n - 3$

$n = 11$

$Si = (n - 2) \cdot 180^0$

$Si = (11 - 2) \cdot 180^0$

$Si = 9 \cdot 180^0$

$Si = 1\,620^0$

Resposta

A soma das medidas dos ângulos internos vale $1\,620^0$.

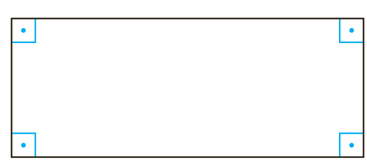
8. Ângulos Internos e Externos de um Polígono Regular

8.1. Polígono Regular

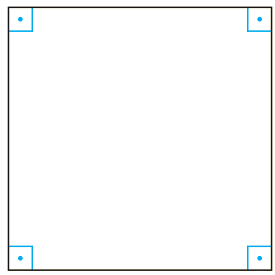
Um **polígono é regular** se, e somente se, for eqüilátero (lados congruentes) e eqüiângulo (ângulos congruentes).

Exemplos

Losango é um quadrilátero eqüilátero.

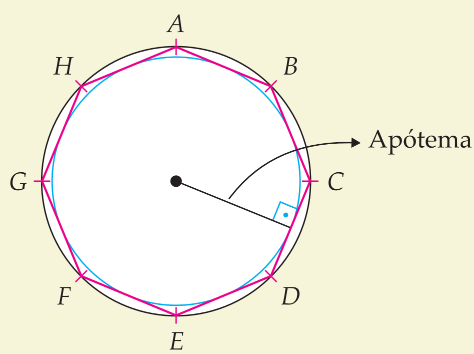


Retângulo é um quadrilátero eqüiângulo.



Quadrado é um quadrilátero regular.

Propriedade: todo polígono regular possui um ponto que, eqüidistante dos seus vértices e também eqüidistante de seus lados, é chamado de centro do polígono.



A distância do centro do polígono regular aos seus lados é o **apótema do polígono regular.**

8.2. Ângulos

I. Ângulos Internos

Num polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo interno é:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

II. Ângulos Externos

Num polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo externo é:

$$\boxed{a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}}$$

Nota: como $a_i + a_e = 180°$, conhecendo a medida de cada ângulo externo, podemos achar a medida de cada ângulo interno e vice-versa.

8.3. Outros Ângulos em um Polígono Regular

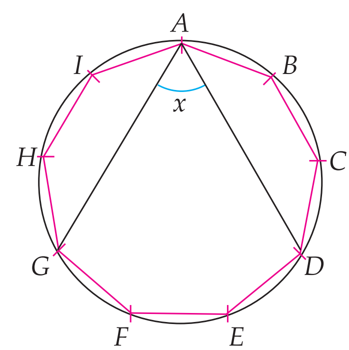
Como todo polígono regular é inscritível, podemos calcular a medida de seus ângulos a partir da teoria dos ângulos na circunferência.

Exemplos

a) Num eneágono regular *ABCDEFGHI*, calcular a medida do ângulo $G\hat{A}D$.

Resolução

Construindo o polígono inscrito em uma circunferência, temos:



$$m\,(\overset{\frown}{GF}) = m\,(\overset{\frown}{FE}) = m\,(\overset{\frown}{ED}) = \frac{360°}{9} = 40°$$

$$G\hat{A}D = \frac{m\,(\overset{\frown}{GD})}{2} = \frac{3\cdot 40°}{2}$$

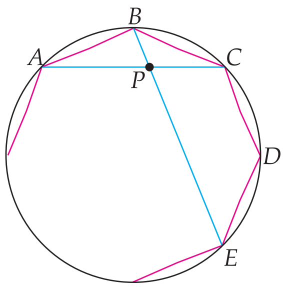
Assim: $G\hat{A}D = 60°$

***Resposta**:* $G\hat{A}D = 60°$

b) As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BE}$ de um polígono regular *ABCDE* formam um ângulo agudo com medida 54°. Qual é esse polígono?

Resolução

Construindo o polígono regular inscrito em uma circunferência, temos:



O ângulo $A\hat{P}B$ é um ângulo de vértice interno na circunferência, então:

$$A\hat{P}B = \frac{m\,(\overset{\frown}{AB}) \;+\; m\,(\overset{\frown}{CE})}{2}$$

Sendo n o número de lados, temos:

$$m\,(\overset{\frown}{AB}) = \frac{360°}{n} \text{ e } m\,(\overset{\frown}{CE}) = 2 \cdot \frac{360°}{n}$$

$$\text{Assim: } 54° = \frac{\dfrac{360°}{n} + \dfrac{720°}{n}}{2}$$

Logo: $n = 10$

Resposta

O polígono é o decágono regular.

Exercícios Resolvidos

01. Os números dos lados de dois polígonos convexos são consecutivos e um deles tem 9 diagonais a mais que o outro. Que polígonos são esses?

Resolução

Seja x o número de lados do menor polígono, logo o outro terá $x + 1$ lados.

Teremos:

$$d_1 = \frac{x(x-3)}{2} \text{ e } d_2 = \frac{(x+1)(x+1-3)}{2}$$

com $d_2 - d_1 = 9$

$$d_2 - d_1 = \frac{(x+1)(x-2)}{2} - \frac{x(x-3)}{2}$$

$$9 = \frac{\cancel{x^2} - x - 2 - \cancel{x^2} + 3x}{2}$$

$-x - 2 + 3x = 18$

$2x = 20$

$\boxed{x = 10}$ *Então* $\boxed{x + 1 = 11}$

Resposta

Os polígonos são o decágono e o undecágono.

02. A medida de cada ângulo externo de um polígono regular é $\frac{1}{4}$ da medida de um ângulo interno. Quantas diagonais tem o polígono?

Resolução

(I) $a_e + a_i = 180°$ *e* $a_e = \dfrac{1}{4}\, a_i$

ou $a_i = 4\, ae$ subst. em (I)

$ae + 4\,ae = 180^o \Rightarrow ae = 36^o$

$$\frac{360^0}{n} = 36^0$$

$\boxed{n = 10}$

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10 \cdot (10-3)}{2}$$

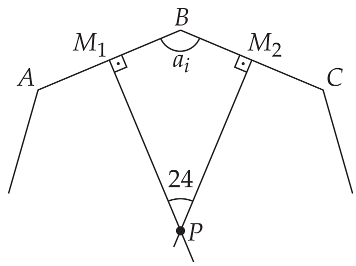
$d = 35$

Resposta

O polígono tem 35 diagonais.

03. As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Determine o número de diagonais desse polígono.

Resolução



No quadrilátero M_1BM_2P temos:

$a_1 + 90° + 90° + 24 = 360$

$a_1 = 360 - 204$

$a_1 = 156$

Sabemos que:

$$156 = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$

$156n = 180n - 360$

$24n = 360$

$n = 15$

O número de diagonais será

$$d = \frac{15(15-3)}{2} = \frac{15\cdot 12}{2}$$

$d = 90$

Resposta: *O polígono tem 90 diagonais*

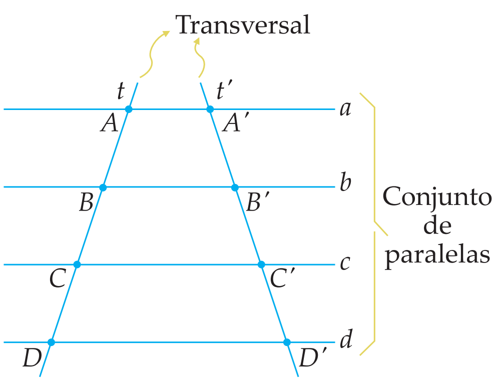
Capítulo 06. Teoremas de Tales e da Bissetriz Interna

1. Definições

Transversal de um conjunto de retas paralelas é uma reta do plano das paralelas que é concorrente com todas as retas do conjunto.

Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do conjunto de paralelas.

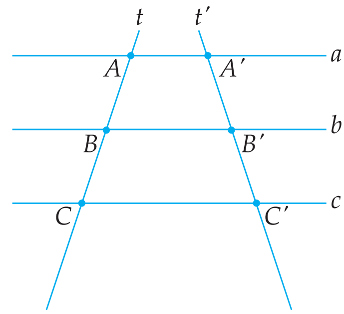
Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos que têm por extremidades pontos correspondentes.



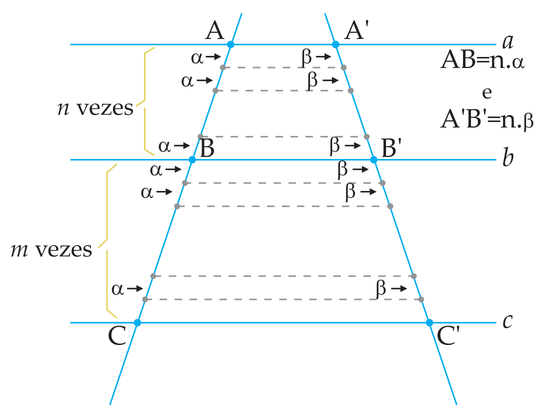
$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$; $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$ são exemplos de segmentos correspondentes.

2. Teorema de Tales

Se duas retas são transversais de um conjunto de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.



- **Hipótese:** $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ correspondentes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.
- **Tese:** $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$
- **Demonstração:** Seja α a medida de um segmento que divide $\overline{AB}$ e cabe exatamente *n* vezes em $\overline{AB}$.
  Traçando paralelas à reta *a*, como mostra a figura, encontraremos β na outra transversal, que divide $\overline{A'B'}$ e também cabe exatamente *n* vezes em $\overline{A'B'}$.



a//b//c

É claro que α não tem obrigação de dividir $\overline{BC}$. Assim, marcando α sucessivamente em $\overline{BC}$, vamos supor que C esteja na (m + 1)–ésima parte, ou seja, entre o m–ésimo e (m + 1)–ésimo pontos da divisão. Traçando paralelas à reta **a**, vemos que o mesmo se verifica na outra transversal.

Então podemos escrever:

$$m \cdot \alpha < BC\,(m+1)\,\alpha$$
e
$$m \cdot \beta < B'C' < (m+1)\,\beta$$

Dividindo respectivamente por $n\alpha$ e $n\beta$, temos:

$$\frac{m \cdot \alpha}{n \cdot \alpha} < \frac{BC}{AB} < \frac{(m+1)\,\alpha}{n \cdot \alpha}$$
e
$$\frac{m\beta}{n\beta} < \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{(m+1)\,\beta}{n\beta}$$

ou seja:

$$\frac{m}{n} > \frac{AB}{BC} > \frac{n}{m+1} \quad e \quad \frac{n}{m} > \frac{A'B'}{B'C'} > \frac{n}{m+1}$$

Quando m tende ao infinito, $m + 1$ se aproxima de m e $\frac{n}{m+1}$ se aproxima de $\frac{n}{m}$.

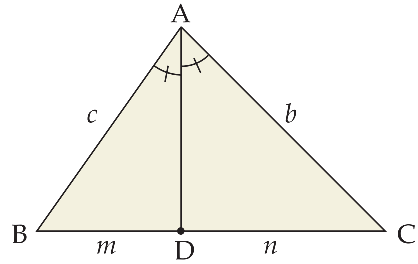
Então:

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}}$$

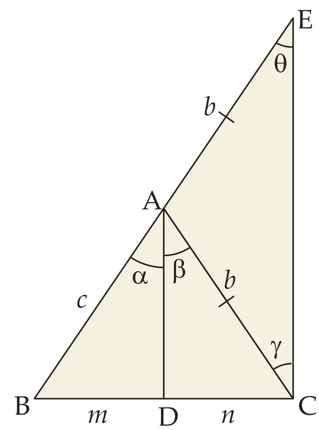
3. Teorema da Bissetriz Interna

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna (bissetriz de um ângulo interno) divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Seja $\overline{AD}$ a bissetriz do ângulo BAC no triângulo ABC com AB = c, AC = b, BD = m e DC = n.



- **Hipótese**: $\overline{AD}$ é bissetriz interna.
- **Tese**: $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$
- **Demonstração**: Traçando, pelo vértice C do triângulo ABC, $\overline{CE}$ paralelo à bissetriz $\overline{AD}$, conforme a figura:



$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta\ (\overline{AD}\ \text{é biss.}) \\ \alpha = \theta\ (\text{corresp.}) \\ \beta = \gamma\ (\text{alt. int.}) \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \gamma$$

Assim, o ΔACE é isósceles com AC = AE = b.

Pelo teorema de Tales

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \quad ou \quad \frac{c}{b} = \frac{m}{n}$$

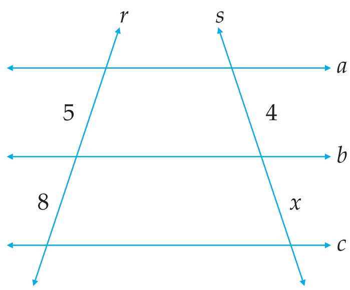
ou seja:

$$\boxed{\frac{c}{m} = \frac{b}{n}}$$

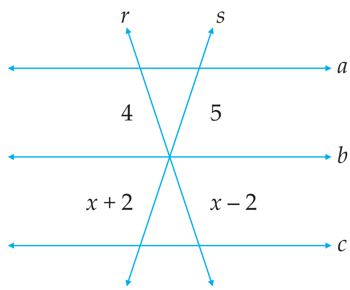
Exercícios Resolvidos

01. Em cada uma das figuras $a//b//c$, r e s são transversais. Ache o valor de x.

a)



b)



Resolução

a) Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{8} \Rightarrow 5x = 32 \Rightarrow x = 6,4$$

Resposta: $x = 6,4$

b) Pelo teorema de Tales:

$$\frac{4}{x-2} = \frac{5}{x+2} \Rightarrow 4\,(x+2) = 5\,(x-2)$$

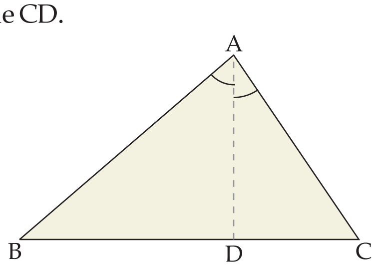
$4x + 8 = 5x - 10 \Rightarrow$

Resposta:

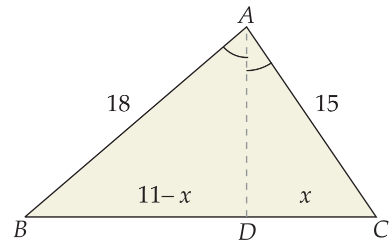
$4x - 5x = -10 - 8$

$x = 18$

02. No triângulo ABC, $\overline{AD}$ é bissetriz interna, AB = 18 cm, AC = 15 cm e BC = 11 cm. Calcule CD.



Resolução



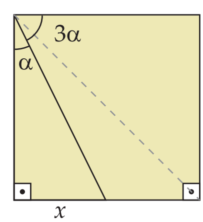
Pelo Teorema da Bissetriz Interna temos:

$$\frac{18}{11-x} = \frac{15}{x} \Rightarrow 18x = 165 - 15x$$

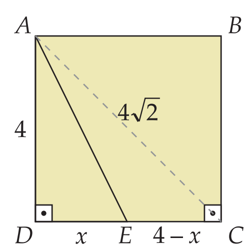
$\Rightarrow 33x = 165 \Rightarrow x = 5$

Resposta: $AC = 5$

03. O quadrado da figura tem lado 4 cm e diagonal $4\sqrt{2}$ cm. Calcule x.



Resolução



Note que AE é bissetriz interna do ΔADC, logo:

$$\frac{4}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{4-x} \Rightarrow 16 - 4x = 4\sqrt{2}\,x$$

$$4\,(4-x) = 4\sqrt{2}\,x \Rightarrow 4 = \sqrt{2}\,x + x$$

$$x\,(\sqrt{2}+1) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}+1}$$

Racionalizando, encontra-se $x = 4\,(\sqrt{2}-1)$

Resposta: $x = 4\,(\sqrt{2}-1)$.

Capítulo 07. Semelhança de Triângulos.

1. Semelhança

1.1. Figuras Semelhantes

Definição: Duas figuras são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência entre qualquer ponto de uma das figuras com um ponto de outra, de modo que:

1º ângulos determinados por pontos correspondentes (ângulos correspondentes) são sempre congruentes.

2º segmentos com extremidades correspondentes (segmentos **homólogos**) são proporcionais.

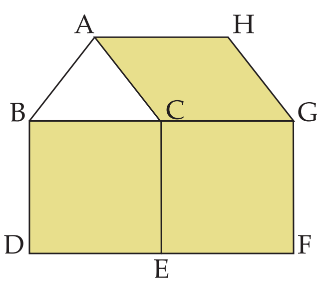


figura 1

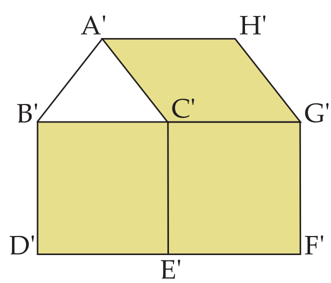


figura 2

Se:

$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$;...; $H \leftrightarrow H'$,

então:

$$B\hat{A}C = B'\hat{A}'C';\ A\hat{B}D = A'\hat{B}'D';\ldots$$

$$\ldots A\hat{H}G = A'\hat{H}'G'$$

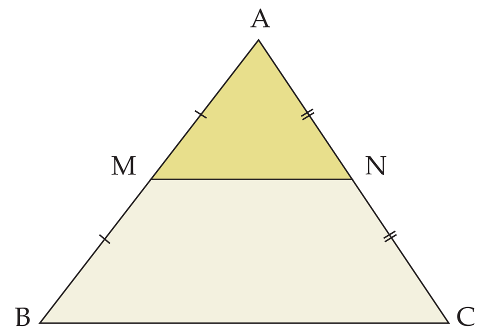
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \ldots = \frac{HG}{H'G'} = k$$

k é a razão entre as figuras 1 e 2.

1.2. Exemplo e Contra-Exemplo

I. Exemplo de figuras semelhantes

A base média $\overline{MN}$ de um triângulo ABC determina dois triângulos semelhantes.



ΔABC é semelhante ao ΔAMN, pois

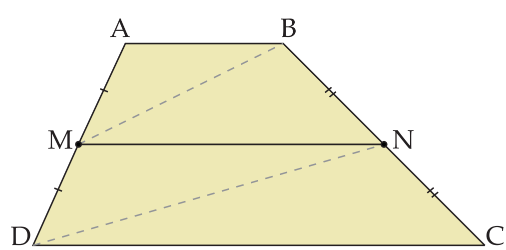
$$M\hat{A}N = B\hat{A}C;\ A\hat{M}N = A\hat{B}C;\ A\hat{N}M = A\hat{C}B$$

$$\text{e}\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ é a razão de semelhança.

II. Contra-exemplo de figuras semelhantes

A **base média** $\overline{MN}$ de um trapézio ***ABCD,*** com bases de medidas diferentes, determina dois trapézios ABNM e MNCD que não são semelhantes.



Embora

$B\hat{A}M = N\hat{M}D;\; A\hat{B}N = M\hat{N}C;$

$A\hat{M}N = M\hat{D}C;\; B\hat{N}M = N\hat{C}D$

Os trapézios ABNM e MNCD não são semelhantes pois

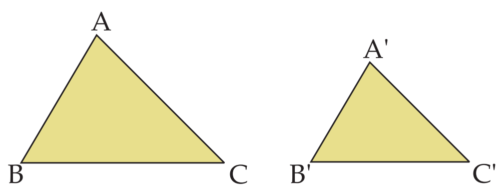
$$\frac{AB}{MN} \neq \frac{BN}{NC} \neq \frac{MN}{CD} \neq \frac{AM}{MD}$$

Podemos notar ainda que $A\hat{B}M \neq M\hat{N}D$

1.3. Triângulos Semelhantes

Definição: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

1º) ângulos correspondentes sejam congruentes.
2º) lados homólogos sejam proporcionais.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}';\ \hat{B} = \hat{B}';\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{e} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

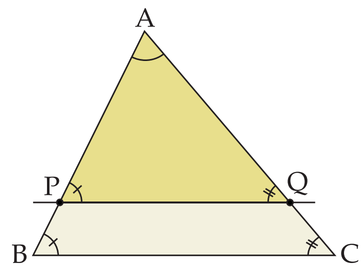
k = razão de semelhança.

> **Nota:** Para facilitar a identificação de ângulos correspondentes e lados homólogos, identificamos triângulos semelhantes colocando os vértices correspondentes na mesma sequência, isto é, quando dizemos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, já estamos fixando as correspondências:
>
> $A \leftrightarrow D;\ B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$

1.4. Teorema Fundamental

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Consideramos um triângulo ABC e tracemos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$, que encontra os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em dois pontos P e Q.



- **Hipótese:** $\overline{PQ} // \overline{BC}$
- **Tese:** $\Delta APQ \sim \Delta ABC$
- **Demonstração:** Para provarmos que os triângulos APQ e ABC são semelhantes, devemos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

I. Ângulos congruentes

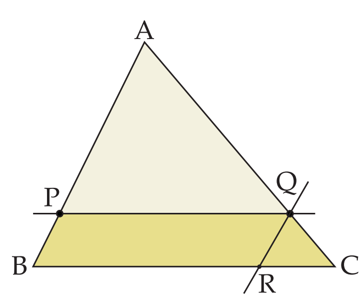
$$\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \hat{P} = \hat{B} \text{ e } \hat{Q} = \hat{C}$$

(ângulos correspondentes)

Então:

$\hat{P} = \hat{B};\ \hat{Q} = \hat{C}$ e $\hat{A}$ é comum (I)

II. Lados proporcionais



$\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{BC}$ então pelo teorema de Tales:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC} \quad (I)$$

Traçando $\overleftrightarrow{QR}//\overleftrightarrow{AB}$, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{BR}{BC} \quad (II)$$

De (I) e (II) temos:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{BR}{BC}$$

Como PQRB é paralelogramo PQ = BR

então:

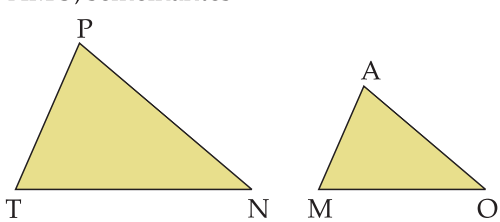
$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} \quad (II)$$

III. Conclusão

A partir de (I) e (II), concluímos que $\Delta APQ \sim \Delta ABC$.

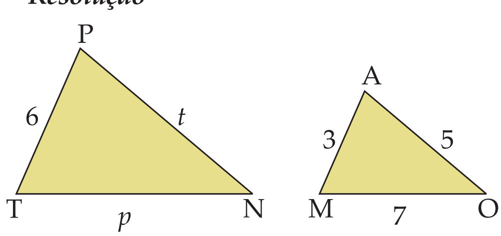
Exercícios Resolvidos

01. Dados os triângulos semelhantes PTN e AMO, semelhantes



com AM = 3 cm, MO = 7 cm e AO = 5 cm, pede-se calcular a razão de semelhança e os outros dois lados do ΔPTN, sabendo-se que PT = 6cm.

Resolução



Como sabemos:

$$\Delta PTN \sim \Delta AMO \Rightarrow \frac{p}{7}=\frac{t}{5}=\frac{6}{3}=2$$

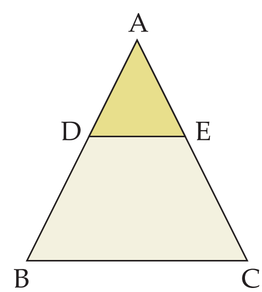
A razão de semelhança é 2

$$\frac{p}{7}=\frac{t}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{p}{7}=2\Rightarrow p=14\\ \frac{t}{5}=2\Rightarrow t=10\end{cases}$$

Resposta: *A razão de semelhança é 2 e os outros dois lados do ΔPTN medem 10 cm e 14 cm.*

02. Um triângulo ABC tem os lados AB = 12m, AC = 13m e BC = 15m. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado BC do triângulo determina um triângulo ADE, em que DE = 5 cm. Calcular AD e AE.

Resolução



AB = 12 *AC = 13*

BC = 15 *DE = 5*

Calcular

AD = x *AE = y*

$$\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BC}\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12}=\frac{y}{13}=\frac{5}{15}$$

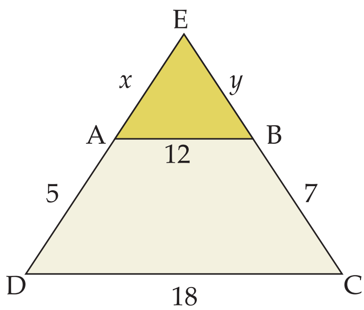
$$\frac{x}{12}=\frac{5}{15}\Rightarrow x=4$$

$$\frac{y}{13}=\frac{5}{15}\Rightarrow y=\frac{13}{3}$$

Resposta: $AD = 4\ m$ e $AE=\frac{13}{3}\ m.$

03. As bases de um trapézio medem 12 m e 18 m e os lados oblíquos às bases medem 5 m e 7 m. Determine os lados do menor triângulo que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

Resolução



$$AB \,//\, DC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$$

pois $\Delta EAB \sim \Delta EDC$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+7} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{y}{y+7} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 14$$

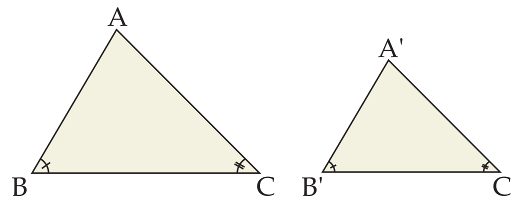
Resposta: *12 m, 10 m e 14 m*

2. Casos de Semelhança

De acordo com a definição, para concluirmos que dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar as congruências dos seus três ângulos e a proporcionalidade dos seus três lados. No entanto, existem situações em que podemos concluir a semelhança de dois triângulos sem analisarmos todas as condições exigidas pela definição, essas situações são chamadas de **casos de semelhança**.

- **1º caso: AA~**

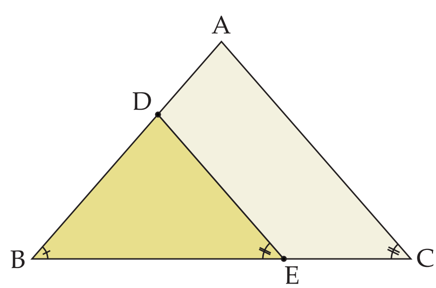
Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{B}' \\ \quad e \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo $AB > A'B'$, consideremos o ponto D em $\overleftrightarrow{BA}$ de modo que $BD = B'A'$, e um ponto E em $\overleftrightarrow{BC}$ de modo que $B\hat{E}D = \hat{C}'$.



$$BD = B'A';\ \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{E} = \hat{C} \Rightarrow$$

$$\Delta DBE \cong \Delta A'B'C' \text{ (I)}$$

$$\hat{E} = \hat{C} \Rightarrow \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DBE \text{ (II)}$$

de (I) e (II) concluímos que

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

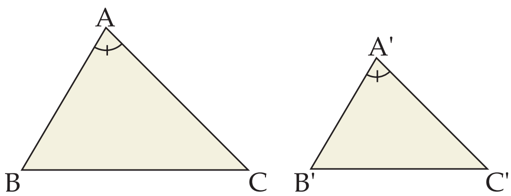
Nota: Se $AB = A'B'$,

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ e, portanto,

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ com razão de semelhança 1.

- **2º caso: LAL~**

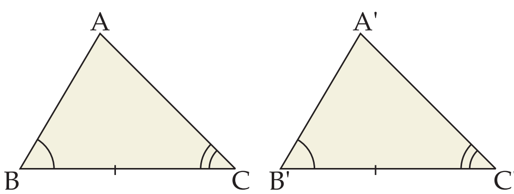
Se dois triângulos possuem dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

- **3º caso: LLL~**

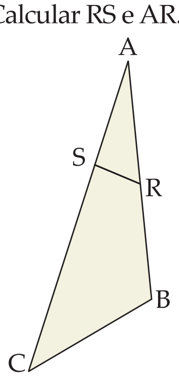
Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

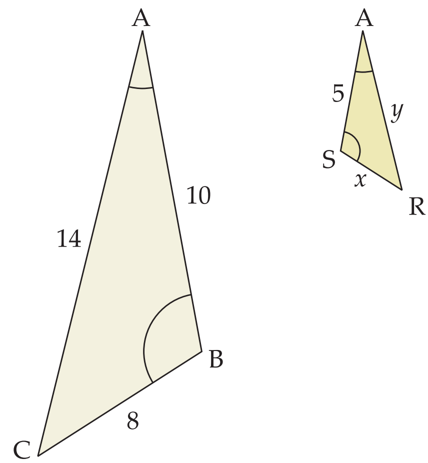
Exercícios Resolvidos

01. No ΔABC da figura, sabemos que AB = 10 cm, BC = 8 cm, AC = 14 cm, AS = 5 cm e $A\hat{S}R \cong A\hat{B}C$. Calcular RS e AR.



Resolução

Devemos perceber que o ângulo A é comum aos dois triângulos. Separamos os triângulos para visualizar melhor o caso de semelhança.



Vamos aplicar o caso AA:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ é comum} \\ \hat{S} \equiv \hat{B} \end{array}\right\} \Delta ASR \sim \Delta ABC$$

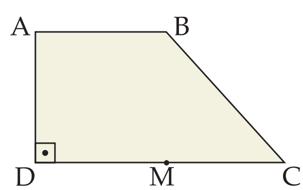
$$\frac{x}{8} = \frac{y}{14} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{5}{10} \Rightarrow x = 4$$

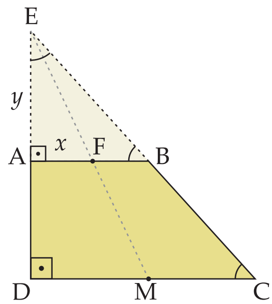
$$\frac{y}{14} = \frac{5}{10} \Rightarrow y = 7$$

Resposta: *RS = 4 e AR = 7.*

02. Os lados de um trapézio retângulo medem 6 m e 8 m e a altura mede 4 m; sabe-se que M é ponto médio da base maior, conforme a figura abaixo. Calcular as medidas de AE e AF.



AB = 6m
CD = 8m
AD = 4m
M médio de DC



Resolução

Pela figura $\Delta EAB \sim \Delta EDC$ (caso AA), pois $\hat{E}$ é ângulo comum e $\hat{A} = \hat{D}$.

Então, temos:

$$\Delta EAB \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{y}{y+4} = \frac{6}{8} \Rightarrow y = 12$$

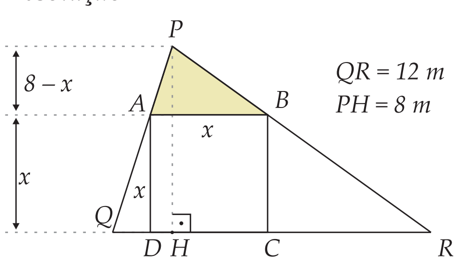
Também notamos que $\Delta EAF \sim \Delta EDM$

$$\frac{12}{16} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 3$$

Resposta: *AE = 12 m e AF = 3m*

03. Calcule o perímetro do quadrado ABCD inscrito num triângulo com base 12 m e altura 8 m.

Resolução



AB // QR $\Rightarrow \Delta PAB \sim \Delta PQR$

$$\frac{x}{12} = \frac{8-x}{8} \Rightarrow 8x = 96 - 12x$$

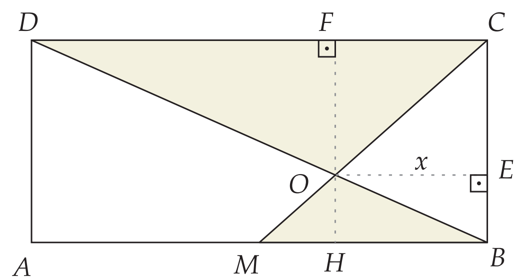
x = 4,8

O perímetro será $4{,}8 \cdot 4 = 19{,}2$ m.

Resposta: *O perímetro será 19,2 m.*

04. ABCD é um retângulo com AB = 12, AD = 9. Sejam **M** ponto médio do lado AB e **O** intersecção da diagonal BD com o segmento CM. Calcule a distância do ponto O até o lado BC.

Resolução



Pela figura $\Delta ODC \sim \Delta OBM$

$$\frac{12}{6} = \frac{OF}{OH} \Rightarrow OF = 2.OH$$

CE = 2EB

mas CE + EB = 9

então EB = 3 e CE = 6

$$\text{ainda: } \Delta COE \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{CB}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow x = 4$$

Resposta: *A distância do ponto O até o lado BC vale 4.*

Capítulo 08. Relações Métricas na Circunferência

1. Teoremas

1.1. Teorema 1

> Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de uma circunferência concorrem num ponto P do interior da mesma, então
> $$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

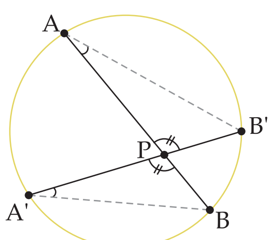
Hipótese: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{P\}$

P é interior à circunferência

Tese: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Demonstração

Construindo $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$, temos:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A'} \text{ (âng. insc. com mesmo arco)} \\ A\hat{P}B' = A'\hat{P}B \text{ (o. p. v)} \end{array}\right\} \overset{AA}{\Rightarrow}$$

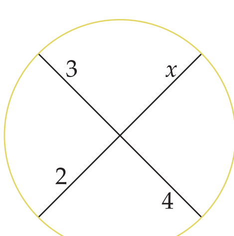
$\Rightarrow \Delta APB' \sim \Delta A'PB$

Então:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Exemplo

Calcule o valor de x na figura



Resolução

Pelo teorema 1:

$2 \cdot x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = 6$

Resposta $\Rightarrow x = 6$

1.2. Teorema 2

> Se as retas suportes de duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de uma circunferência concorrem num ponto P externo à mesma, então
> $$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

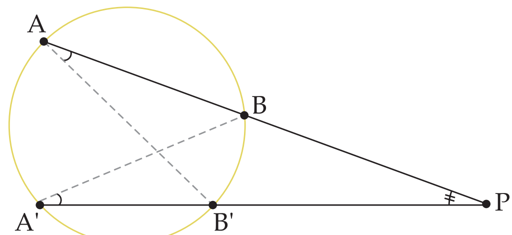
Hipótese: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{P\}$

P é exterior à circunferência

Tese: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Demonstração

Construindo $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$, temos:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A'} \text{ (inscr. com m / m arco)} \\ \hat{P} \text{ é comum} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

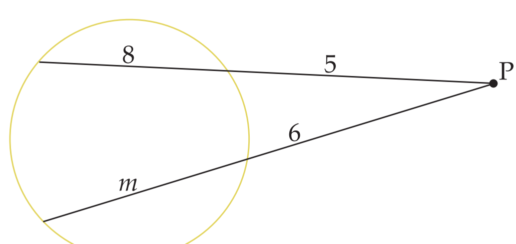
$\Rightarrow \Delta APB' \sim \Delta A'PB$

Então:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Exemplo

Calcular o valor de m na figura abaixo:



Resolução

Pelo teorema 2:

$(8 + 5) \cdot 5 = (m + 6) \cdot 6$

$13 \cdot 5 = 6m + 36 \Rightarrow m = \dfrac{29}{6}$

Resposta: $m = \dfrac{29}{6}$

1.3. Teorema 3

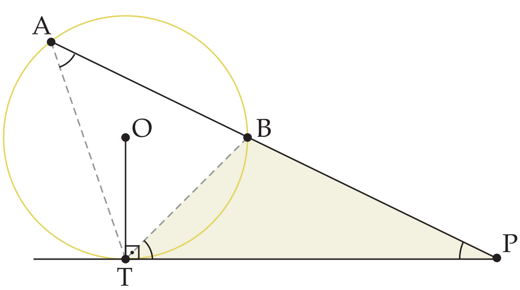
Se a reta suporte de uma corda $\overline{AB}$ de uma circunferência concorre com uma reta tangente a essa circunferência num ponto P, sendo T o ponto de tangência, então:

$$PA \cdot PB = (PT)^2$$

Hipótese: $\begin{cases} \overleftrightarrow{PA} \text{ é secante} \\ \text{e} \\ \overleftrightarrow{PT} \text{ é uma tangente} \end{cases}$

Tese: $PT^2 = PA \cdot PB$

Demonstração:



$$\left.\begin{array}{l} P\hat{A}T = P\hat{T}B = \dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2} \\ \hat{P} \text{ é comum} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PBT \sim \Delta PTA$$

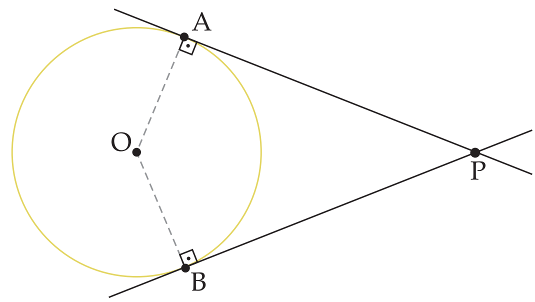
Então:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = (PT)^2$$

2. Tangência

2.1. Retas Tangentes por um Ponto Externo

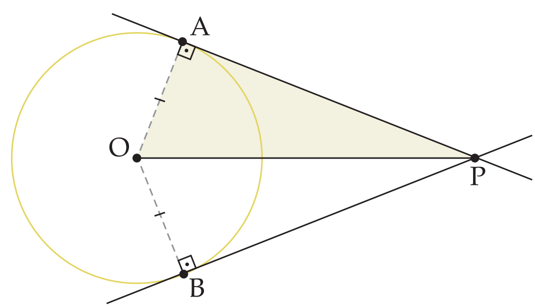
Dado um ponto P externo e uma circunferência, existem duas retas distintas que passam por P e são tangentes a ela em dois pontos A e B.



Propriedade: $PA = PB$

Demonstração

Unindo o ponto P ao centro O, obtemos dois triângulos OAP e OBP.

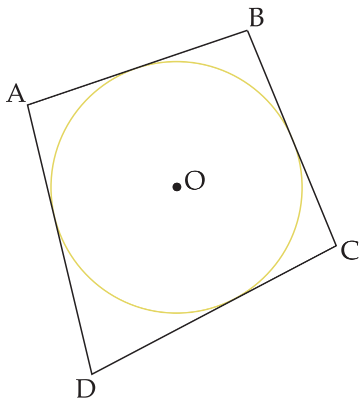


$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = \text{raio} \\ \overline{OP} \text{ é comum} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAP \cong \Delta OBP$$

Assim $PA = PB$

2.2. Quadriláteros Circunscritíveis

Quando é possível circunscrever um quadrilátero numa circunferência, dizemos que o quadrilátero é circunscritível.

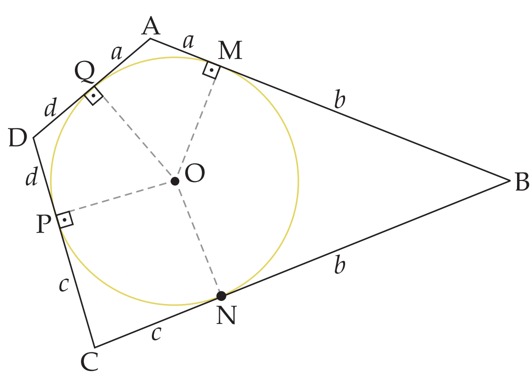


Propriedade:

Se um quadrilátero convexo está circunscrito a uma circunferência, então a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois.

Demonstração

Consideremos um quadrilátero *ABCD* circunscrito a uma circunferência de centro *O*, com seus lados tangentes nos pontos *M*, *N*, *P* e *Q* da circunferência.



Então:

$AM = AQ = a$

$BM = BN = b$

$CN = CP = c$

$DP = DQ = d$

Assim:

$AB + CD = (AM + BM) + (CP + DP) = a + b + c + d$

$BC + AD = (BN + CN) + (AQ + DQ) = b + c + a + d$

Logo: $AB + CD = BC + AD$

Observação: A recíproca da propriedade também é verdadeira.

Assim:

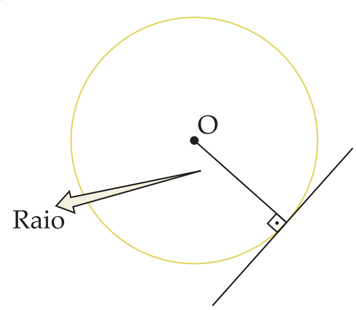
Se num quadrilátero convexo a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois, então o quadrilátero é circunscritível.

2.3. Estrutura de uma Figura com Tangência

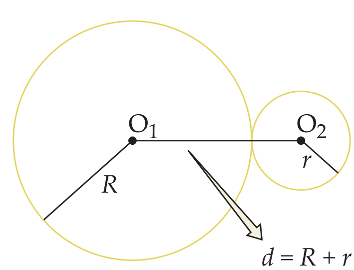
Resolvemos problemas nas figuras com tangência a partir da estrutura da figura, e esta é obtida colocando-se raios de modo conveniente.

Regras básicas para colocar raios:

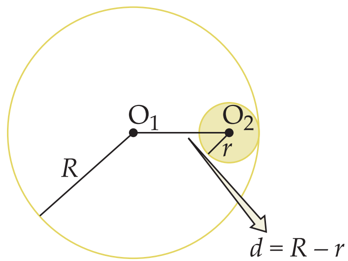
1ª) Colocamos raio no ponto onde uma reta é tangente à circunferência.



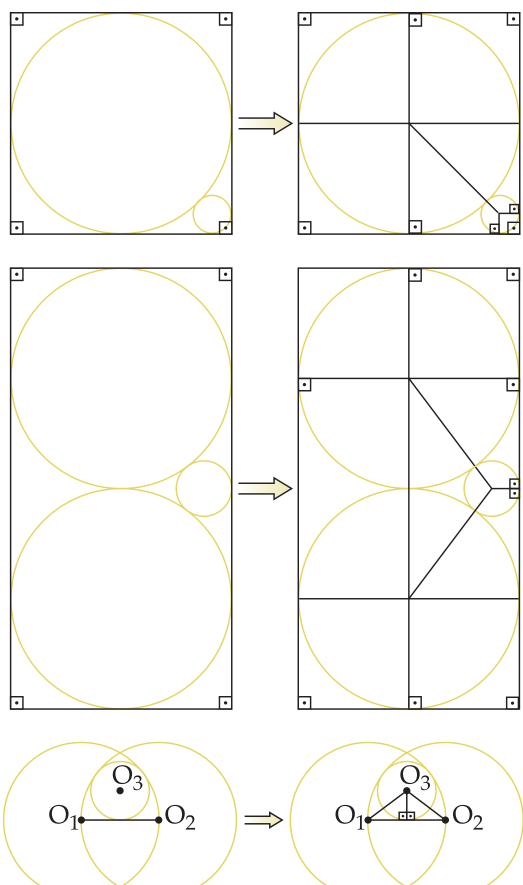
2ª) Colocamos raios unindo os centro das circunferências externamente, lembrando que a distância entre os centros é igual à soma dos raios.



3ª) Colocamos raios unindo os centros das circunferências tangentes internamente, lembrando que a distância entre os centros é igual à diferença dos raios.



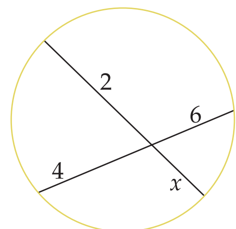
Exemplos de Estrutura



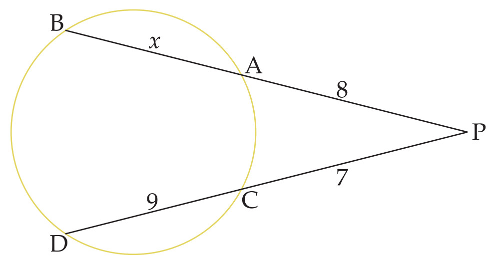
Exercícios Resolvidos

01. Calcule x nas figuras abaixo:

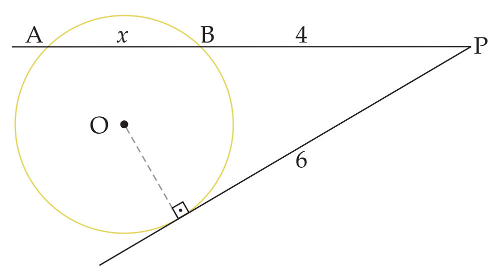
a)



b)



c)



Resolução

a) Teorema 1
$2 \cdot x = 4 \cdot 6$
$2x = 24$
$x = 12$

b) Teorema 2
$(8 + x) \cdot 8 = (7 + 9) \cdot 7$
$64 + 8x = 16 \cdot 7$
$8x = 112 - 64$
$8x = 48 \Rightarrow x = 6$

c) Teorema 3
$6^2 = (4 + x) \cdot 4$
$36 = 16 + 4x$
$4x = 20 \Rightarrow x = 5$

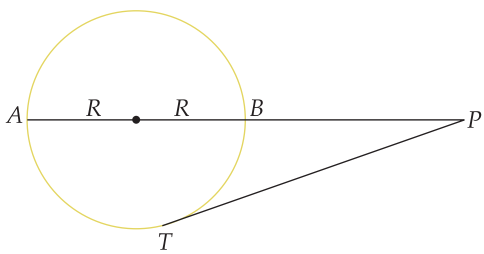
Respostas

a) $x = 12$ *b)* $x = 2$ *c)* $x = 5$

02. (EPCAR) De um ponto P, traça-se uma tangente e uma secante a um círculo. Se o segmento $\overline{PA}$ da secante é o dobro do segmento tangente e mede 16 m, qual deve ser, em m, o raio do círculo, se a secante contém o diâmetro do mesmo?

a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{6}$
d) 5
e) 6

Resolução



$PA = 16$

$PT = 8$

$PB = 16 - 2R$

Pelo teorema 3:

$PA \cdot PB = (PT)^2$

$8^2 = 16 \cdot (16 - 2R) \Leftrightarrow 64 = 16\,(16 - 2R)$

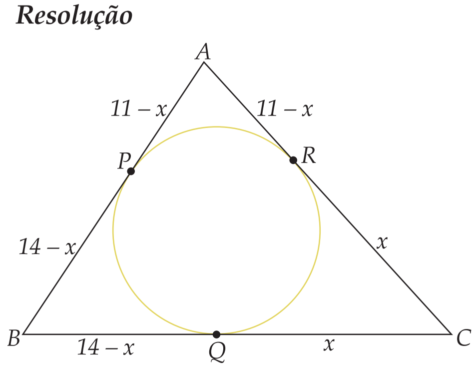
$4 = 16 - 2R \Rightarrow 2R = 12$

$R = 6$

Resposta: *E*

03. Seja R o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC, com o lado $\overline{AC}$. Se $AB = 9$ cm, $BC = 14$ cm e $AC = 11$ cm, calcular a medida de $\overline{CR}$.

Resolução



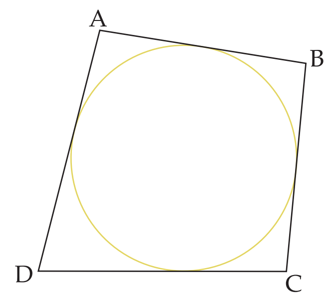
$$\begin{cases} CR = CQ = x \\ AR = AP = 11 - x \\ BP = BQ = 14 - x \end{cases}$$

$AB = 9 \therefore (11 - x) + (14 - x) = 9$

logo: $x = 8$

Resposta: $CR = 8$ *cm*

04. Calcular a medida do lado $\overline{BC}$ do quadrilátero circunscrito na circunferência, sendo $AB = 10$ cm, $CD = 15$ cm e $AD = 13$ cm.



Resolução

$AB = 10$ *cm*

$CD = 15$ *cm*

$AD = 13$ *cm*

$BC = x$

Sabemos que

$AB + CD = AD + BC$

$10 + 15 = 13 + x$

$25 = 13 + x$

$x = 25 - 13$

$x = 12$

Resposta: *O lado BC mede 12 cm.*

Capítulo 09. Relações Métricas no Triângulo Retângulo

1. Triângulos Retângulos Semelhantes

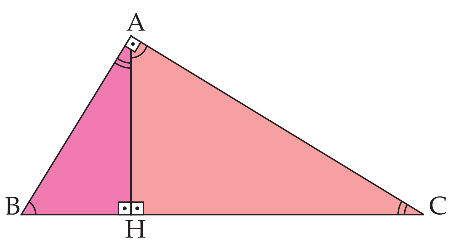
> Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois triângulos retângulos semelhantes ao primeiro e semelhantes entre si.

Consideremos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$ e altura $\overline{AH}$.

Hipótese: $\hat{A} = 90°$ e $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

Tese: $\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$

Demonstração



$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \text{ é comum} \\ A\hat{H}B = B\hat{A}C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HBA$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{C} \text{ é comum} \\ A\hat{H}C = B\hat{A}C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HAC$$

Assim: $\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$

2. Relações Métricas

Consideremos um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa $\overline{BC}$ e altura $\overline{HA}$.

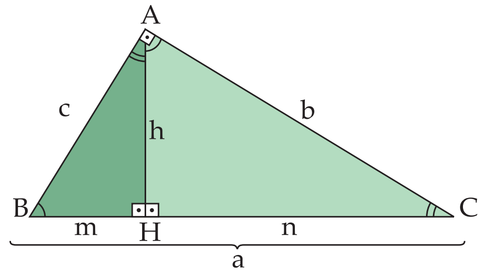
Sejam:

$BC = a$ (hipotenusa)

$AB = c$ e $AC = b$ (catetos)

$AH = h$ (altura)

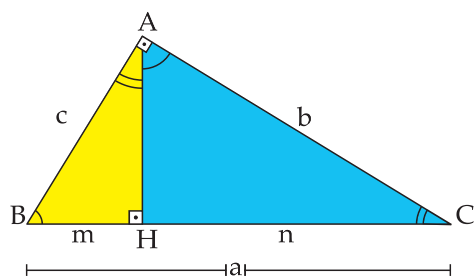
$BH = m$ e $CH = n$ (projeções dos catetos sobre a hipotenusa)



b$_1$) $\boldsymbol{b^2 = a \cdot n}$ **e** $\boldsymbol{c^2 = a \cdot m}$

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto.

Demonstração



$$\Delta HBA \sim \Delta ABC$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \text{ ou } \frac{c}{a} = \frac{m}{c}$$

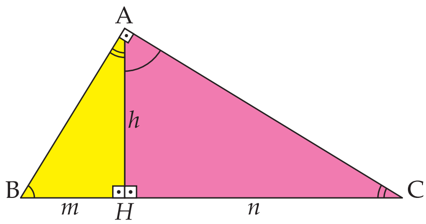
Assim: $c^2 = a \cdot m$

Analogamente, para os triângulos HAC e ABC, mostramos que $b^2 = a \cdot n$.

b$_2$) $\boldsymbol{h^2 = m \cdot n}$

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos.

Demonstração



$$\Delta HBA \sim \Delta HAC$$

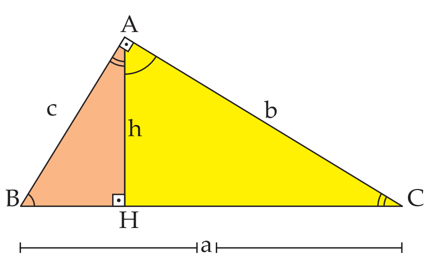
$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

Assim: $h^2 = m \cdot n$

b_3) $\boldsymbol{b \cdot c = a \cdot h}$

Em todo triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa pela altura relativa a ela.

Demonstração



$$\Delta HBA \sim \Delta ABC$$

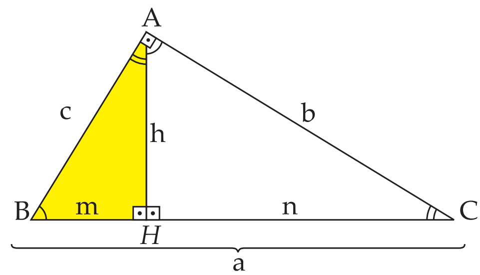
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{a} = \frac{h}{b}$$

Assim: $b \cdot c = a \cdot h$

3. Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração



$\Delta HBA \sim \Delta ABC \Rightarrow c^2 = a \cdot m$

$\Delta HAC \sim \Delta ABC \Rightarrow b^2 = a \cdot n$

Assim: $b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$

ou $\quad b^2 + c^2 = a\,(n + m)$

como $n + m = a$, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

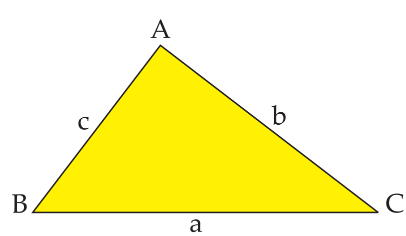
Assim: $b^2 + c^2 = a^2$

4. Recíproca do Teorema de Pitágoras

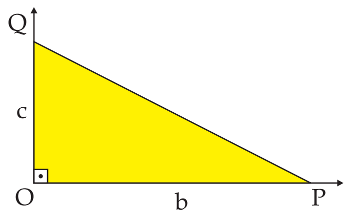
Se as medidas dos lados de um triângulo são tais que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados das outras duas, então esse triângulo é retângulo.

Demonstração

Considere um triângulo ABC com lados a, b e c, conforme a figura:



Sobre os lados de um ângulo reto de vértice O, tomemos os pontos P e Q de modo que $OP = b$ e $OQ = c$.



Como o triângulo OPQ é um retângulo:

$$OP^2 + OQ^2 = PQ^2$$

ou seja

$$PQ^2 = b^2 + c^2$$

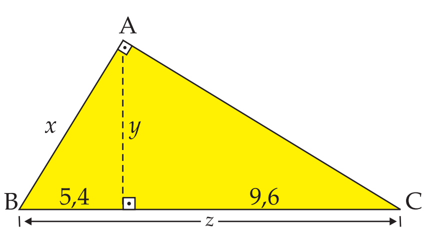
Mas $b^2 + c^2 = a^2$, então $PQ^2 = a^2$

Assim: $PQ = a$

$$\left.\begin{array}{l} PQ = BC \\ OP = AC \\ OQ = AB \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta OPQ \cong \Delta ABC$$

Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor de x, y e z no triângulo retângulo:



Resolução

Cálculo de z

$z = 9,6 + 5,4 = 15$

Cálculo de x

Vamos aplicar a relação $c^2 = am$

$x^2 = 15 \cdot 5,4$ $\quad x = \sqrt{81}$

$x^2 = 81$ $\quad x = 9$

Cálculo de y

Vamos aplicar a relação $h^2 = mn$.

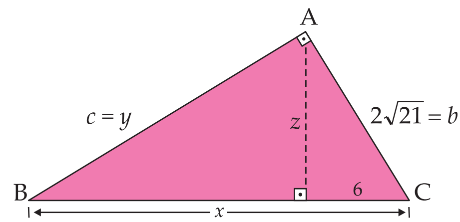
$y^2 = 5,4 \cdot 9,6$

$y^2 = 51,84$

$y = \sqrt{51,84}$

Resposta: $y = 7,2$

02. Calcular o valor de x, y e z no triângulo retângulo:



Resolução

Cálculo de x

Vamos aplicar a relação $\Rightarrow b^2 = a \cdot n$

$$\left(2\sqrt{21}\right)^2 = x \cdot 6 \Rightarrow 4 \cdot 21 = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{6} \Rightarrow x = 14$$

Resposta: $x = 14$

Cálculo de y

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 + y^2$$

$$14^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 + y^2$$

$$196 = 84 + y^2$$

$$196 - 84 = y^2$$

$$112 = y^2$$

$$y = \sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7}$$

Resposta: $y = 4\sqrt{7}$

Cálculo de z

Vamos aplicar a relação $\Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$

$$y \cdot 2\sqrt{21} = x \cdot z$$

$$\left(4\sqrt{7}\right) \cdot \left(2\sqrt{21}\right) = 14z$$

$$8\sqrt{147} = 14z$$

$$8\sqrt{7^2 \cdot 3} = 14z$$

$$8 \cdot 7\sqrt{3} = 14z$$

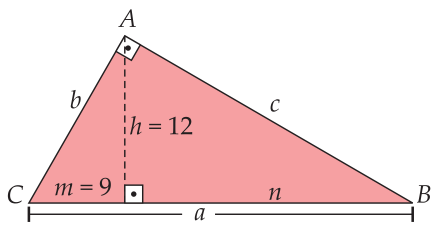
$$x = \frac{8 \cdot 7\sqrt{3}}{14}$$

Resposta: $x = 4\sqrt{3}$

03. (Cesgranrio-RJ) Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 e o menor dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, 9. O menor lado do triângulo mede:

a) 12,5
b) 13
c) 15
d) 16
e) 16,5

Resolução



Usando-se as relações métricas no triângulo retângulo ABC, *vem:*

$h^2 = m \cdot n \;\Rightarrow\; 12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow n = 16$

$a = m + n \;\Rightarrow\; a = 9 + 16 \Rightarrow a = 25$

$b^2 = a \cdot m \;\Rightarrow\; b^2 = 25 \cdot 9 \Rightarrow b^2 = 225 \Rightarrow b = 15$

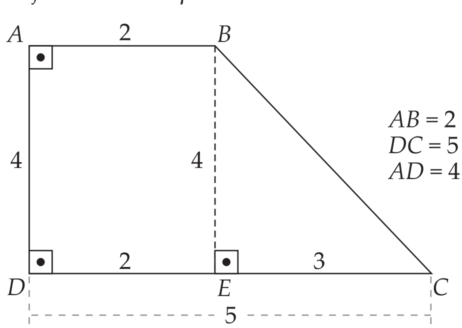
Resposta: *C*

04. (Fuvest-SP 2000) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

Resolução

Seja ABCD o trapézio dado.



No ΔBCE, *temos:*

$BE = \text{altura do trapézio} = 4$

$EC = DC - AB = 5 - 2 = 3$

$BC^2 = BE^2 + EC^2$

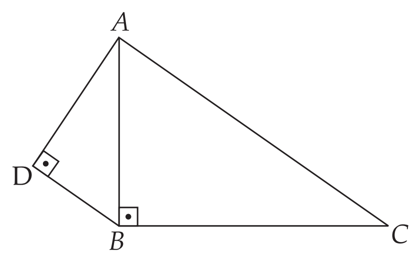
$BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\therefore\; BC = 5$

Perímetro $= 2 + 4 + 5 + 5 = 16$

Resposta: *C*

05. (Mackenzie-SP) Na figura, $AC = 2AB = 4DB$. A razão entre as medidas de $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$ é:



a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução

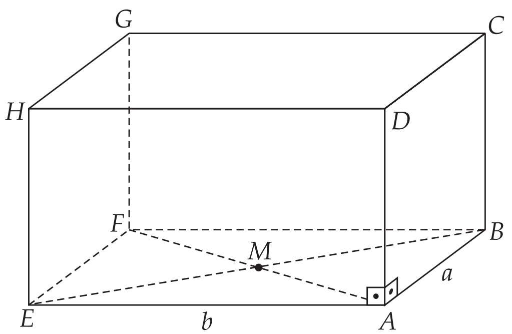
Temos $AC = 2\,AB = 4\,DB \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} AC = 4\,DB \\ AB = 2\,DB \end{array} \right.$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo ADB, $AD^2 + DB^2 = AB^2 \Leftrightarrow AD^2 + DB^2 = (2DB)^2 \Leftrightarrow AD = DB\sqrt{3}$

Resposta: Portanto, a razão entre as medidas *AD* e *AC* é dada por $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB\sqrt{3}}{4\,DB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

06. (Fuvest-SP) No paralelepípedo reto retângulo da figura abaixo, sabe-se que $AB = AD = a$, $AE = b$ e que M é a interseção das diagonais da face $ABFE$. Se a medida de $\overline{MC}$ também é igual a b, o valor de b será:

a) $\sqrt{2}\ a$
b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ a$
c) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}\ a$
d) $\sqrt{3}\ a$
e) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\ a$



Resolução

Como $\overline{BC}$ é perpendicular à face ABFE, BCM é um triângulo retângulo em B. Logo:

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 + \left(\frac{BE}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + \frac{BE^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + \frac{a^2 + b^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 = 5a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{5}{3}}\ a$$

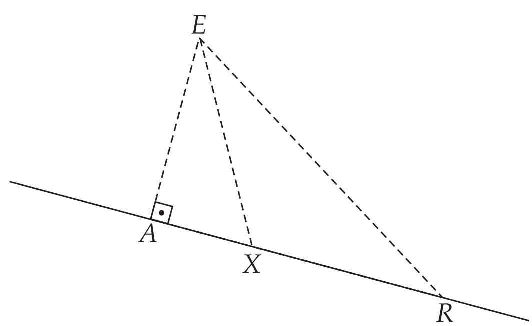
Resposta: *E*

07. (PUC-SP) Uma estação de tratamento de água (ETA) localiza-se a 600 m de uma estrada reta. Uma estação de rádio localiza-se nessa mesma estrada, a 1000 m da ETA. Pretende-se construir um restaurante, na estrada, que fique à mesma distância das duas estações. A distância do restaurante a cada uma das estações deverá ser de:

a) 575 m
b) 600 m
c) 625 m
d) 700 m
e) 750 m

Resolução

Na figura a seguir, $\overleftrightarrow{AR}$ representa a estrada; E, a estação de tratamento de água (ETA); R, a estação de rádio e X, o restaurante. Temos AE = 600 e ER = 1000; logo, pelo teorema de Pitágoras, $AR = \sqrt{1000^2 - 600^2} = 800\,\text{m}$



Devemos ter EX = XR; logo, no triângulo retângulo AEX, $EX^2 = AE^2 + AX^2 \Leftrightarrow XR^2 = AE^2 + (AR - XR)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow XR^2 = 600^2 + 800^2 - 1600 \cdot XR + XR^2 \Leftrightarrow$$

Resposta: *XR = 625 m.*

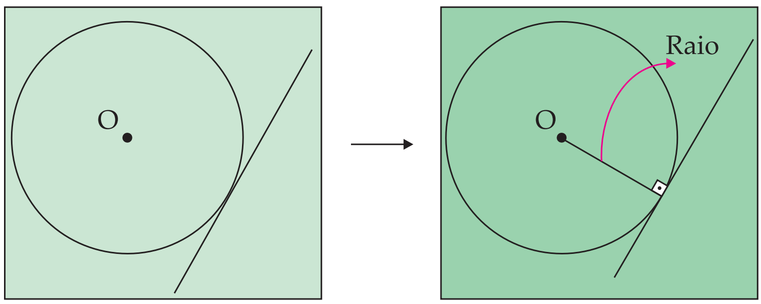
Logo, a distância do restaurante a cada uma das duas estações é de 625 m.

5. Problemas de Tangência

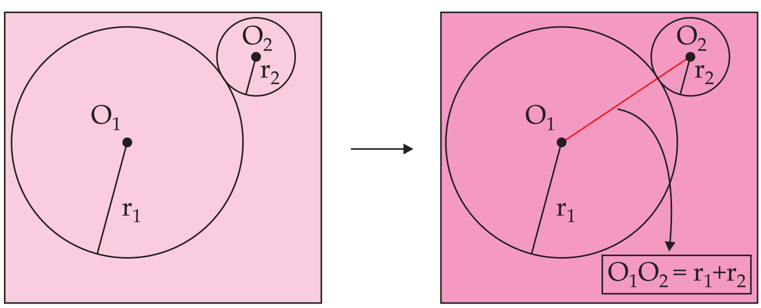
Os problemas que envolvem retas e circunferências tangentes são resolvidos a partir da estrutura da figura, que se obtém colocando raios de forma adequada.

Para facilitar essa colocação de raios, vamos apresentar três regras básicas.

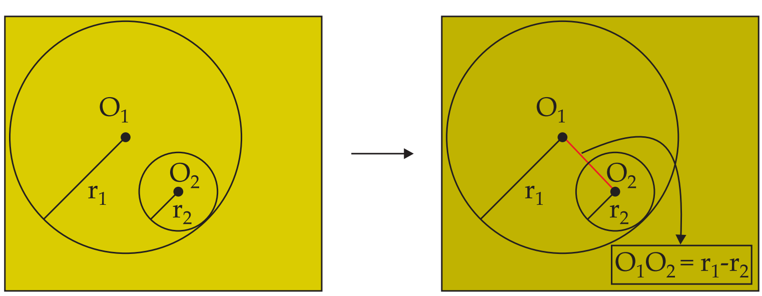
1º) Toda vez que houver **reta tangenciando** circunferência, é fundamental colocar o raio perpendicular à reta exatamente no **ponto de tangência.**



2º) Quando na figura houver **circunferências tangentes externamente**, devemos colocar raios unindo os centros das mesmas. É importante registrar que a distância entre os centros é igual à soma das medidas dos raios.

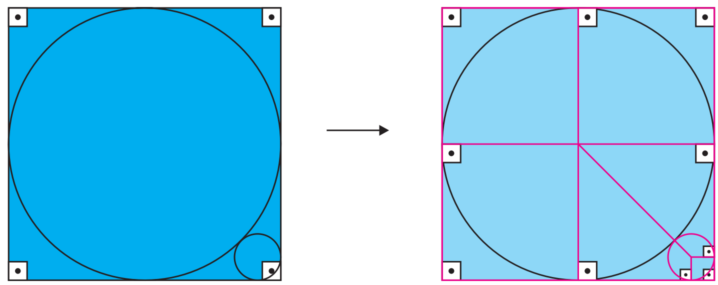


3º) Quando houver na figura **circunferências tangentes internamente,** devemos unir os centros das mesmas. É importante registrar que a distância entre os centros é igual à diferença das medidas dos raios.

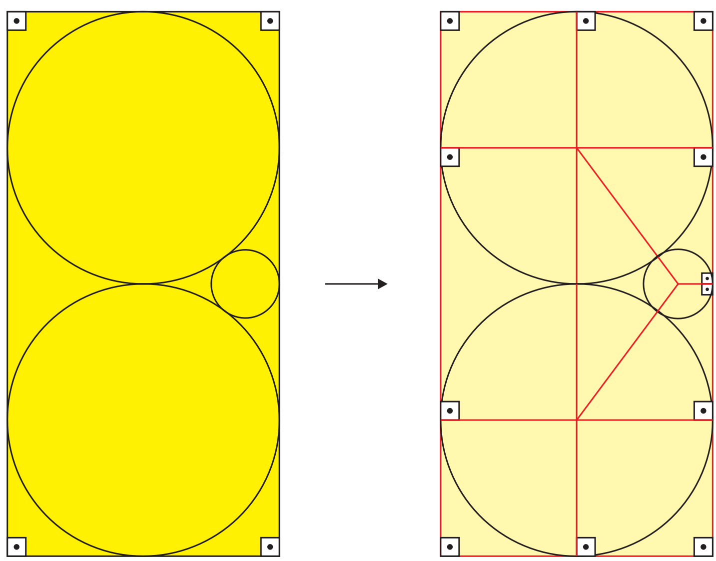


Exemplos de Estruturas

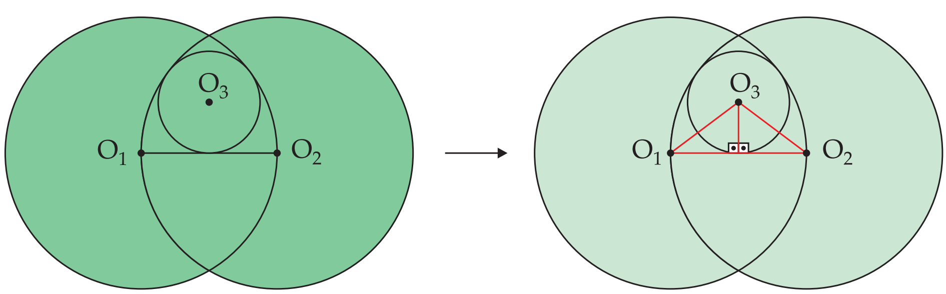
1º)



2º)



3º)

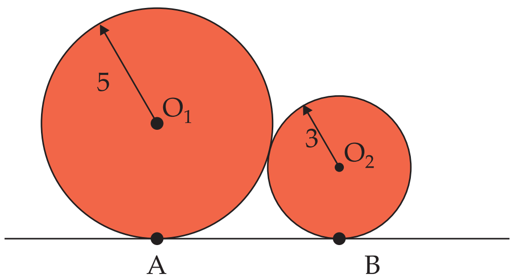


Quando obtemos a estrutura da figura, a solução do problema normalmente é obtida utilizando as relações métricas nos triângulos retângulos.

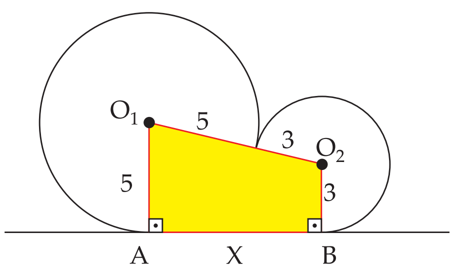
Exercícios Resolvidos

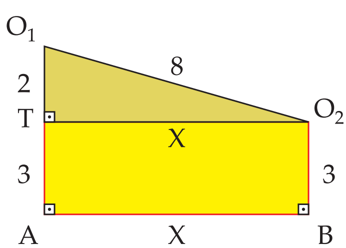
01. Os raios das circunferências tangentes são 5 cm e 3 cm e A e B são pontos de tangência.

Calcule a medida de $\overline{AB}$.



Resolução





No ΔO_1O_2T*, temos:*

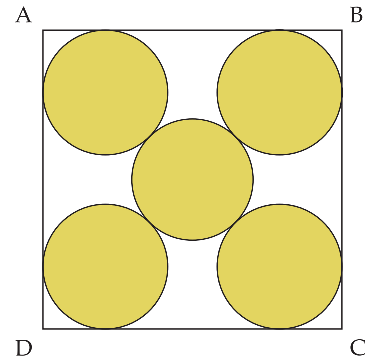
$$O_1O_2^2 = O_1T^2 + O_2T^2$$

$$8^2 = 2^2 + x^2$$

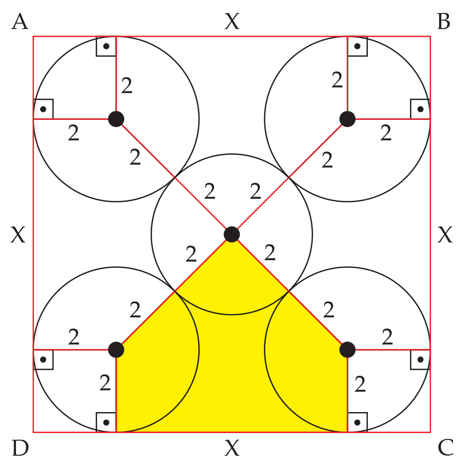
$$x^2 = 60 \therefore x = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

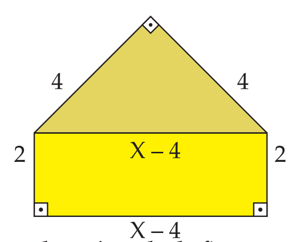
Resposta: *Logo,* $AB = 2\sqrt{15}\ cm$

02. As cinco circunferências da figura têm raio 2 cm. Calcule as medidas dos lados do quadrado *ABCD*.



Resolução





No triângulo retângulo da figura temos:

$$(x-4)^2 = 4^2 + 4^2$$

$$(x-4)^2 = 32$$

$$x - 4 = \mp 4\sqrt{2}$$

$$x = 4 + 4\sqrt{2}$$

ou

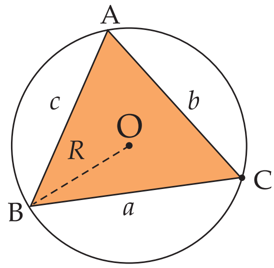
$$x = 4 - 4\sqrt{2}\ \text{(não convém)}$$

Assim, os lados do quadrado ABCD medem $4 + 4\sqrt{2}\ cm$.

Capítulo 10. Senos e Co-Senos: Teoremas

1. Teorema dos Senos

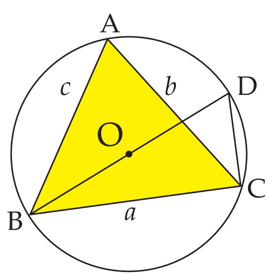
Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos numa razão igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.



$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R}$$

1.1. Demonstração para o Caso de um Triângulo Acutângulo

Consideremos um triângulo acutângulo *ABC*, de lados *a*, *b* e *c*, inscrito numa circunferência de centro O, e tracemos o diâmetro $\overline{BD}$, construindo o triângulo *BCD*.

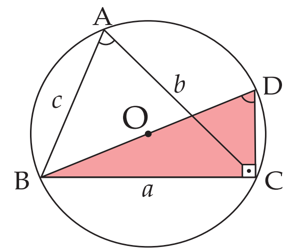


Notamos que:

1º) Os ângulos *BAC* e *BDC*, por serem inscritos com o mesmo arco, são congruentes $\left(\hat{A} = \hat{D}\right)$.

2º) O triângulo *BCD* é retângulo em *C*, pois $\overline{BD}$ é diâmetro.

Assim, no ΔBCD, temos:



$$\text{sen}\,\hat{D} = \frac{BC}{BD}$$

como $\hat{D} = \hat{A}$, $BC = a$ e $BD = 2R$, temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R}$$

Analogamente, concluímos que:

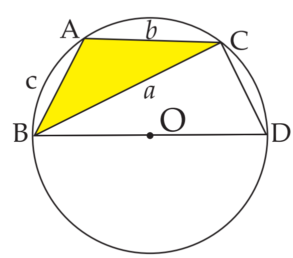
$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Assim:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R}$$

1.2. Demonstração para o Caso de um Triângulo Obtusângulo

Consideremos um triângulo obtusângulo *ABC*, de lados *a*, *b* e *c*, inscrito numa circunferência de centro *O*, e tracemos o diâmetro $\overline{BD}$, construindo o triângulo *BCD*.

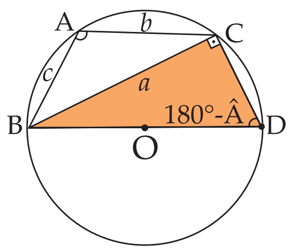


Notamos que:

1º) Os ângulos BAC e BDC são suplementares, pois $ABDC$ é um quadrilátero inscrito numa circunferência $\left(\hat{D} = 180° - \hat{A}\right)$.

2º) O triângulo BCD é retângulo em C, pois $\overline{BD}$ é diâmetro.

Assim, no ΔBCD, temos:



$$\text{sen } \hat{D} = \frac{BC}{BD}$$

Como $BC = a$, $BD = 2R$ e Sen $\hat{D}$ = Sen $\hat{A}$, temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R}$$

Para os ângulos agudos procedemos da mesma forma que no item anterior (triângulo acutângulo), obtendo:

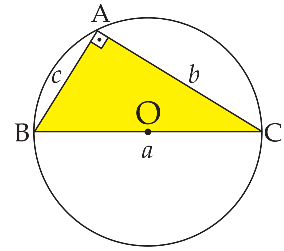
$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

Assim:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

1.3. Demonstração para o Caso de um Triângulo Retângulo

Consideremos um triângulo retângulo ABC, de lados a, b e c, inscrito numa circunferência de centro O.



Notamos que:

1º) sen $\hat{A} = 1$ e $a = 2R$, então $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$.

2º) $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$, então $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$.

3º) $\text{sen } \hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$, então $\dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

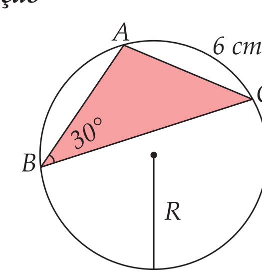
Assim:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

Exercícios Resolvidos

01. Num triângulo ABC, temos que $\hat{B} = 30°$ e que $AC = 6$ cm. Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Resolução



$$\frac{6}{\text{sen } 30°} = 2R$$

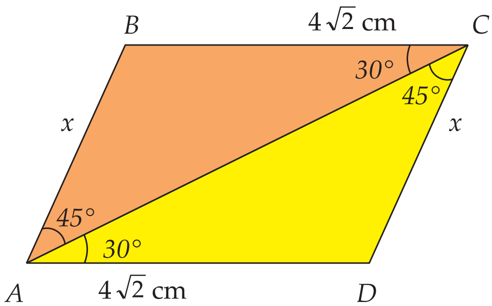
como $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, *temos*

$$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow \boxed{R = 6 \text{ cm}}$$

Resposta: *O raio mede 6 cm.*

02. Num paralelogramo *ABCD*, a diagonal $\overline{AC}$ divide o ângulo *BAD* em dois ângulos agudos de medidas 30° e 45°. Sendo a medida do maior lado do paralelogramo $4\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do menor lado.

Resolução



No ΔACD*, temos:*

$$\frac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 30°}$$

Assim: $4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

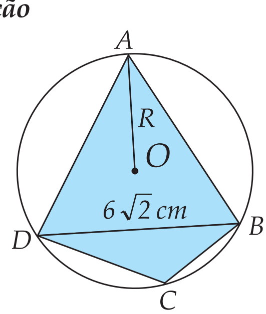
Logo, $x = 4$

Resposta: *O menor lado mede 4 cm.*

03. Num quadrilátero inscritível *ABCD*, os ângulos opostos *BAD* e *BCD* são tais que $\hat{C} = 3\cdot\hat{A}$.

Sabendo que a diagonal $\overline{BD}$ mede $6\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do raio de circunferência circunscrita ao quadrilátero.

Resolução



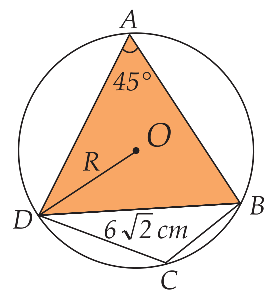
Sendo $\hat{A} = \alpha$*, temos que* $\hat{C} = 3\alpha$.

Como $\hat{A} + \hat{C} = 180°$*, visto que ABCD é um quadrilátero inscritível, temos:*

$\alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

logo $\hat{A} = 45°$

Consideremos o ΔABD*, então:*



$$\frac{6\sqrt{2}}{\text{sen}\,45°} = 2R$$

$$6\sqrt{2} = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

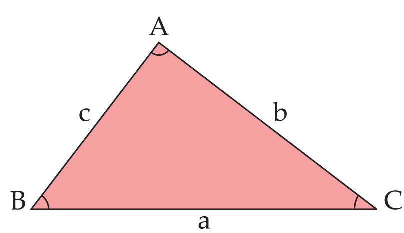
Assim: $R = 6$

Resposta: *O raio mede 6 cm.*

Obs. – Notamos que, quando dizemos que um quadrilátero está inscrito numa circunferência, ela está circunscrita ao quadrilátero.

2. Teorema dos Co-senos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo por eles formado.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos\hat{B}$$

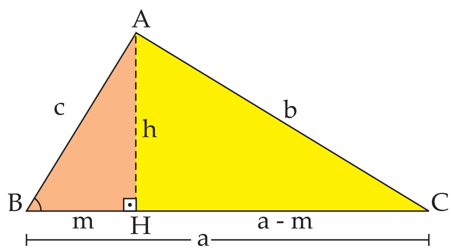
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\hat{C}$$

2.1. Demonstração

Consideremos um triângulo ABC, de lados a, b e c.

Demonstraremos o teorema para o lado $\overline{AC}$ nos casos em que o ângulo ABC é agudo, obtuso ou reto, e sabemos que a demonstração para os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ é feita de modo análogo.

1º Caso: $\hat{B} < 90°$



Sendo

BH = m

CH = a – m

AH = h

temos

No Δ ABH: $h^2 = c^2 - m^2$ (I)

No Δ ACH: $h^2 = b^2 - (a - m)^2$ (II)

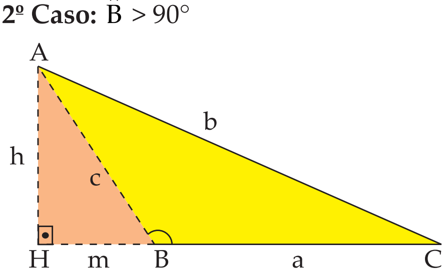
(I) = (II) $\Rightarrow c^2 - m^2 = b^2 - (a - m)^2$

Assim $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,am$

como $m = c \cdot \cos \hat{B}$ no Δ ABH, temos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

2º Caso: $\hat{B} > 90°$



BH = m ; CH = $a + m$; AH = h

temos:

No Δ AHB: $h^2 = c^2 - m^2$ (I)

No Δ AHC: $h^2 = b^2 - (a + m)^2$ (II)

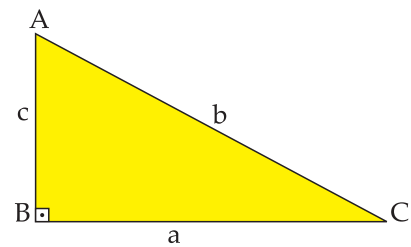
(I) = (II) $\Rightarrow c^2 - m^2 = b^2 - (a + m)^2$

Assim: $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,am$

Como: $m = c \cdot \cos(180° - \hat{B}) = -c \cdot \cos \hat{B}$,

temos: $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

3º Caso: $\hat{B} = 90°$



Δ ABC é retângulo, então:

$a^2 + c^2 = b^2$ (I)

e

$\cos \hat{B} = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot \cos \hat{B} = 0$ (II)

Fazendo (I) – (II), temos:

$a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \hat{B} = b^2$

Conclusão – O teorema dos cossenos pode ser aplicado em qualquer triângulo.

2.2. Síntese

Consideremos um triângulo ABC, com lados de medidas a, b e c. Sabemos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$

Então:

$\hat{A} = 90° \Rightarrow \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\hat{A} < 90° \Rightarrow \cos \hat{A} > 0 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

$\hat{A} > 90° \Rightarrow \cos \hat{A} < 0 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

3. Natureza de um Triângulo

Consideremos um triângulo ABC, com lados de medidas a, b e c. Sendo BAC o maior dos ângulos internos do triângulo, temos:

1º) o lado de medida **a**, oposto a BAC, é o maior lado do triângulo;

2º) a natureza do triângulo ABC depende fundamentalmente do ângulo BAC, pois:

se BAC é agudo ⇒ Δ ABC é acutângulo;

se BAC é reto ⇒ Δ ABC é retângulo;

se BAC é obtuso ⇒ Δ ABC é obtusângulo.

Então, a partir da Síntese concluímos que:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ retângulo

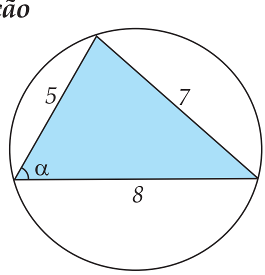
$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ acutângulo

$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ obtusângulo

Exercícios Resolvidos

1. Calcular a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo com lados 5, 7 e 8.

Resolução



$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$$

$$80 \cos\alpha = 40 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \frac{1}{4} = 1$$

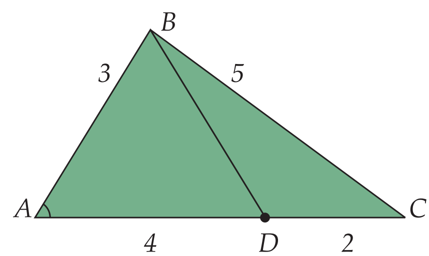
$$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \; (0° < \alpha < 180°)$$

$$\frac{7}{sen\,\alpha} = 2R \; (\text{Teorema dos senos})$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: *A medida do raio da circunferência circunscrita é* $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

02. Na figura abaixo, calcule a medida do segmento $\overline{BD}$, sabendo que AB = 3 cm, BC = 5 cm, AD = 4 cm e DC = 2 cm.



Resolução

No Δ ABC, temos:

$$5^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos\hat{A}$$

$$36 \cos\hat{A} = 20 \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{5}{9}$$

No Δ ABD temos:

$$BD^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\hat{A}$$

$$BD^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{5}{9}$$

$$BD^2 = 25 - \frac{40}{3} = \frac{35}{3}$$

$$\therefore\; BD = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}\,cm$$

Resposta: $BD = \frac{\sqrt{105}}{3}\,cm$

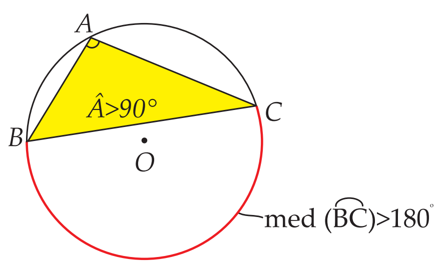
03. Mostre que o circuncentro do triângulo cujos lados medem 5 cm, 7 cm e 10 cm é externo ao triângulo.

Resolução

Sendo ABC o triângulo cujos lados medem AB = 5 cm, AC = 7 cm e BC = 10 cm, temos:

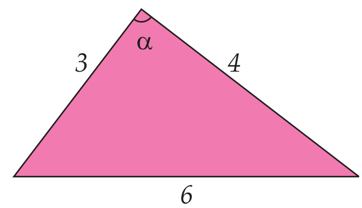
Como $10^2 > 5^2 + 7^2$, *sabemos que* $\hat{A} > 90°$.

Considerando a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, o arco $\overset{\frown}{BC}$ *correspondente ao ângulo inscrito BAC é maior que 180°, visto que* $\hat{A} > 90°$. *Assim, o centro dessa circunferência (circuncentro) é externo ao triângulo ABC.*



04. Calcule o seno do maior dos ângulos internos do triângulo cujos lados medem 3, 4 e 6.

Resolução



O maior ângulo é oposto ao lado que tem medida 6.

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$$

$$24\cos\alpha = -11 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-11}{24}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{11}{24}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{121}{576} = \frac{455}{576}$$

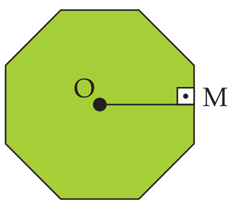
Como $0° < \alpha < 180°$, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{455}}{24}$

Resposta: *O seno do maior ângulo interno do triângulo é* $\dfrac{\sqrt{455}}{24}$.

Capítulo 11. Polígonos Regulares: Apótemas

1. Apótema de um Polígono Regular

Dado um polígono regular, chamamos de apótema do polígono regular o segmento traçado a partir do centro do polígono até o lado do mesmo, formando ângulo reto com o lado.

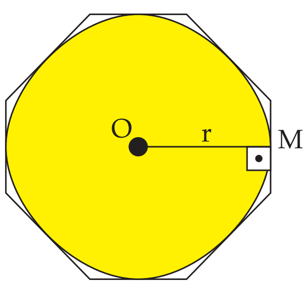


Octógono regular

$\overline{OM}$ é o apótema do polígono.

Observação

O apótema de um polígono regular também é o raio da circunferência inscrita no polígono.

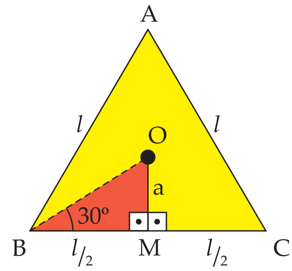


$\overline{OM}$ é o raio da circunferência inscrita no polígono.

2. Cálculo do Apótema dos Principais Polígonos Regulares

2.1. Triângulo eqüilátero

Consideremos um ΔABC eqüilátero de lado *l*, então a medida *a* de seu apótema será:



No ΔOBM temos:

$$tg\,30° = \frac{a}{\frac{l}{2}}$$

$$a = \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$$

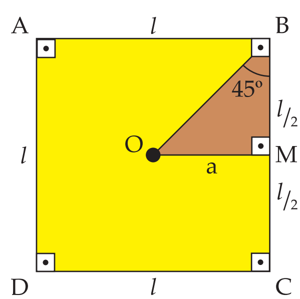
Importante

O ponto O também é baricentro no ΔABC, então OM é um terço da altura do triângulo eqüilátero. Assim:

$$a = \frac{l}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

2.2. Quadrado

Consideremos um quadrado ABCD de lado *l*, então a medida *a* de seu apótema será:



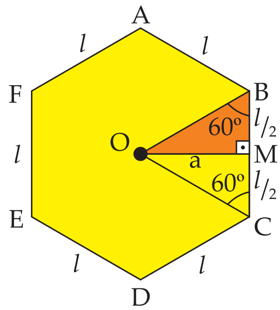
No ΔOBM, temos:

$$tg\,45° = \frac{a}{\frac{l}{2}}$$

$$a = \frac{l}{2} \cdot 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{l}{2}}$$

2.3. Hexágono Regular

Consideremos um hexágono regular ABCDEF de lado l, então a medida a de seu apótema será:



No ΔOBM, temos:

$$tg\,60° = \frac{a}{\frac{l}{2}}$$

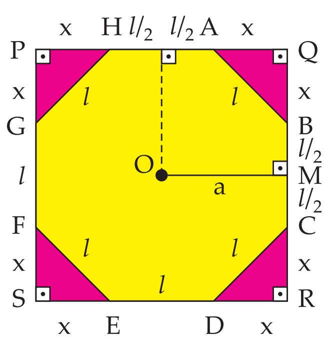
$$a = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Importante

O ΔOBC é eqüilátero, então o apótema do hexágono regular é igual à altura do triângulo eqüilátero de lado l.

2.4. Octógono Regular

Consideremos um octógono regular ABCDEFGH de lado l, então a medida a de seu apótema será:



PQRS é um quadrado de lado $l + 2x$.

No ΔAQB, temos:

$$x^2 + x^2 = l^2$$

$$x^2 = \frac{l^2}{2}$$

Então, $x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$

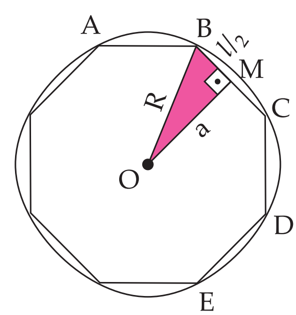
Assim: $a = \frac{l}{2} + x = \frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{l\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}}$$

3. Cálculo do Raio da Circunferência Circunscrita

Conhecendo as medidas dos lados e do apótema de um polígono regular, é possível encontrar a medida do raio da circunferência circunscrita com aplicação direta do teorema de Pitágoras.

Sendo ABCDE... um polígono regular de lado l e apótema a, a medida R do raio da circunferência circunscrita será:



No ΔOBM, temos:

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

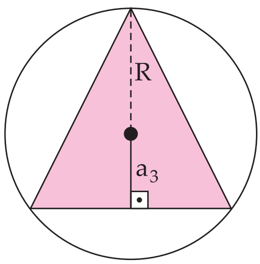
Assim: $$\boxed{R = \frac{\sqrt{4a^2 + l^2}}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

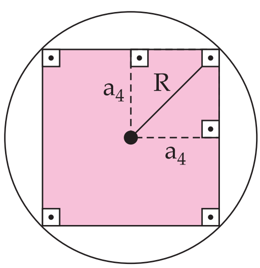
01. Calcular a razão entre os apótemas de um triângulo eqüilátero e de um quadrado inscrito numa mesma circunferência.

Resolução

Sendo R o raio da circunferência, temos:



$$R = 2a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$



$$R = a_4\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_4} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

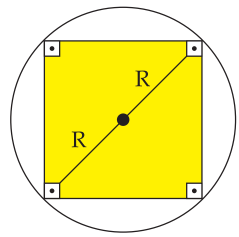
Logo, $\dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta

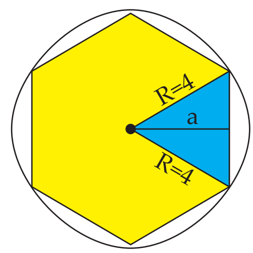
$$\frac{a_3}{a_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

02. Uma diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência mede 8 cm. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito na mesma circunferência.

Resolução



$2R = 8 \Rightarrow R = 4$ cm



$l = R = 4$ $\qquad a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$

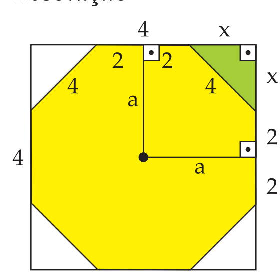
Assim: $a = 2\sqrt{3}$ *cm*

Resposta

O apótema é $2\sqrt{3}$ *cm*.

03. Calcular o apótema de um octógono regular de lado 4 cm.

Resolução



$$x^2 + x^2 = 4^2$$
$$x^2 = 8$$

Assim: $x = 2\sqrt{2}$

Logo: $a = 2 + x = 2 + \sqrt{2}$

Resposta

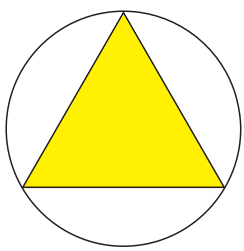
O apótema mede $(2 + \sqrt{2})$ *cm.*

Capítulo 12. Comprimento de Circunferências e Arcos

1. Limites do Comprimento de uma Circunferência

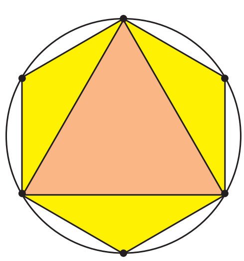
1.1. Polígonos Regulares Inscritos

Consideremos inicialmente um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência de comprimento *C*. Podemos concluir que:



o perímetro do triângulo é menor que o comprimento *C* da circunferência.

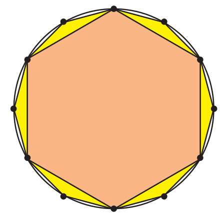
Em seguida, dupliquemos o número de lados do polígono, obtendo, assim, um hexágono regular inscrito. Podemos concluir que:



1º) o perímetro do hexágono é maior que o perímetro do triângulo;

2º) o perímetro do hexágono, embora menor que *C*, se aproximou mais de *C* em relação ao perímetro do triângulo.

Se continuarmos duplicando sucessiva e indefinidamente os números de lados dos polígonos regulares inscritos, podemos concluir que:



1º) o perímetro do polígono com número de lados duplicado é sempre maior que o perímetro do polígono anterior;

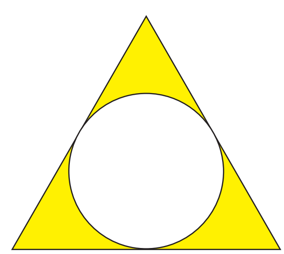
2º) o perímetro do polígono com número de lados duplicado se aproxima mais de *C* em relação ao perímetro do polígono anterior.

De acordo com o exposto, podemos concluir que:

o comprimento *C* de uma circunferência é o número para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares inscritos nessa circunferência quando o número de lados aumenta indefinidamente.

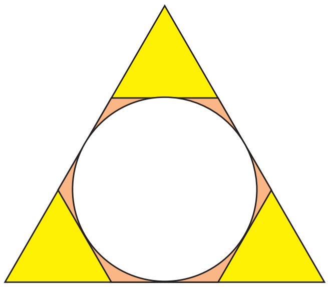
1.2. Polígonos Regulares Circunscritos

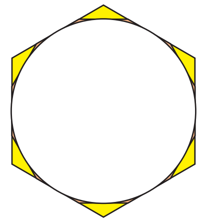
Consideremos inicialmente um triângulo eqüilátero circunscrito a uma circunferência de comprimento *C*. Podemos concluir que:



o perímetro do triângulo é maior que o comprimento *C* da circunferência.

Em seguida, dupliquemos o número de lados do polígono, obtendo, assim, um hexágono regular circunscrito. Podemos concluir que:





1º) o perímetro do hexágono é menor que o perímetro do triângulo;

2º) o perímetro do hexágono, embora maior que *C*, se aproximou mais de *C* em relação ao perímetro do triângulo.

Se continuarmos duplicando sucessiva e indefinidamente os números de lados dos polígonos regulares circunscritos, podemos concluir que:

1º) o perímetro do polígono com número de lados duplicado é sempre maior que o perímetro do polígono anterior;

2º) o perímetro do polígono com número de lados duplicados se aproxima mais de *C* em relação ao perímetro do polígono anterior.

De acordo com o exposto, podemos concluir que:

o comprimento *C* de uma circunferência é o número para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares circunscritos a essa circunferência quando o número de lados aumenta indefinidamente.

2. O Comprimento da Circunferência e o Número π

Sendo *R* o raio da circunferência de comprimento *C*, calculando os perímetros *p* e *P* dos polígonos regulares inscrito e circunscrito, respectivamente, com os números de lados duplicados sucessivamente a partir do hexágono, temos:

Nº de lados	*p*	*P*	Conclusão
6	$2R \cdot 3{,}00000$	$2R \cdot 3{,}46411$	$2R \cdot 3{,}00000 < C < 2R \cdot 3{,}46411$
12	$2R \cdot 3{,}10582$	$2R \cdot 3{,}21540$	$2R \cdot 3{,}10582 < C < 2R \cdot 3{,}21540$
24	$2R \cdot 3{,}13262$	$2R \cdot 3{,}15967$	$2R \cdot 3{,}13162 < C < 2R \cdot 3{,}15967$
48	$2R \cdot 3{,}13935$	$2R \cdot 3{,}14609$	$2R \cdot 3{,}13935 < C < 2R \cdot 3{,}14609$
96	$2R \cdot 3{,}14103$	$2R \cdot 3{,}14272$	$2R \cdot 3{,}14103 < C < 2R \cdot 3{,}14272$
192	$2R \cdot 3{,}14145$	$2R \cdot 3{,}14188$	$2R \cdot 3{,}14145 < C < 2R \cdot 3{,}14188$
384	$2R \cdot 3{,}14156$	$2R \cdot 3{,}14167$	$2R \cdot 3{,}14156 < C < 2R \cdot 3{,}14167$

Com o cálculo feito até 384 lados, temos certeza de que $C = 2R \cdot 3{,}141\ldots$

Se continuássemos o cálculo para um número de lados cada vez maior, conseguiríamos uma precisão também cada vez maior.

Chamando de π o número 3,141…, podemos escrever:

$$\boxed{C = 2R \cdot \pi}$$

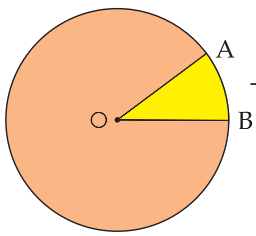
Observação – Apresentamos abaixo o número π com seus vinte primeiros decimais.

$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$

3. Comprimento de um Arco de Circunferência

Conhecendo a medida do arco, em graus ou em radianos, podemos determinar o comprimento do mesmo, na unidade em que a medida do raio for apresentada, usando uma regra de três simples.

3.1. Arco em Graus

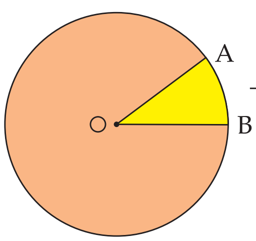


$\longrightarrow$ M $(\overset{\frown}{AB}) = \alpha°$

Sendo l o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos:

$$\begin{array}{ccc} 360° & \text{———} & 2\pi R \\ \alpha° & \text{———} & l \end{array} \Rightarrow \boxed{l = \dfrac{\pi R \alpha}{180°}}$$

3.2. Arco em Radianos



$\longrightarrow$ M $(\overset{\frown}{AB}) = \alpha_{rad}$

Sendo l o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ rad} & \text{———} & 2\pi R \\ \alpha \text{ rad} & \text{———} & l \end{array} \Rightarrow \boxed{l = \alpha \cdot R}$$

Exercícios Resolvidos

01. As rodas de um automóvel têm 32 cm de raio. Sabendo-se que ele desenvolve 1 500 rotações por minuto (1 500 rpm), calcule a distância, em km, percorrida em uma hora.

Resolução

Em 1 hora serão 60 · 1 500 = 90 000 rotações.

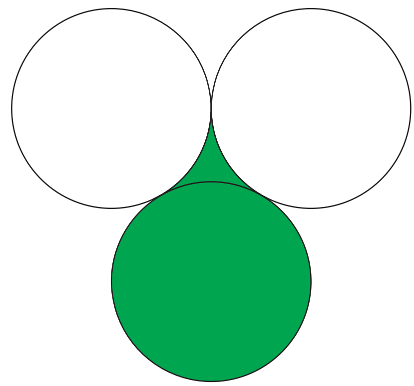
Em cada volta da roda, o automóvel se desloca $2\pi \cdot 32 = 64\pi$ cm.

Assim:

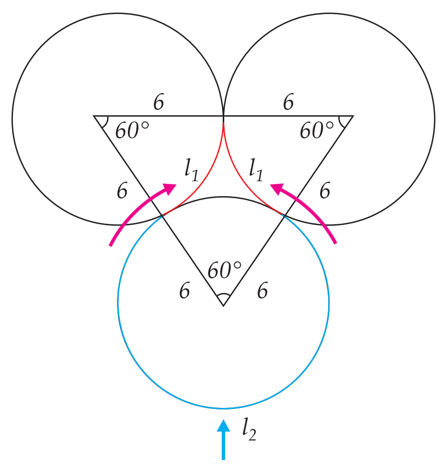
deslocamento = 90 000 · 64π cm = $57{,}6\pi$ km

***Resposta**: O deslocamento do automóvel em uma hora foi de $57{,}6\pi$ km.*

02. Considere a figura pintada, construída a partir de três circunferências de raio 6 cm. Calcule o perímetro da figura.



Resolução



Perímetro = $2l_1 + l_2$

em que:

$$l_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi \text{ cm}$$

$$l_2 = \frac{5\pi}{3} \cdot 6 = 10\pi \text{ cm}$$

Perímetro = $4\pi + 10\pi = 14\pi$ cm

***Resposta:** O perímetro é 14π cm.*

Capítulo 13. Áreas das Regiões Elementares

1. Conceitos Básicos

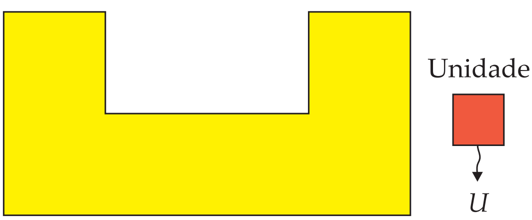
1.1. Noção Intuitiva de Área

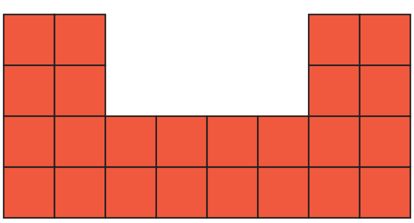
Intuitivamente, a área de uma região é um número que mede a sua "extensão", ou seja, a porção do plano ocupada por ela.

Quando fixamos uma unidade de medida, encontrar a área de uma região plana é determinar o número de unidades que "cabem" nessa região.

Exemplo

Considerando a região plana da figura e unidade de medida indicada, vamos determinar a área da região.





Área = 24U

1.2. Definição da Área de uma Região Poligonal

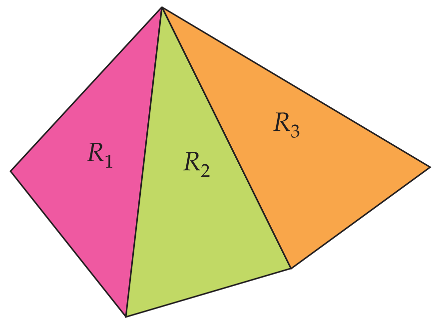
A cada região poligonal é associado um número real não-nulo chamado área, que deve satisfazer os postulados.

Postulado 1: polígonos congruentes têm regiões poligonais de mesma área.

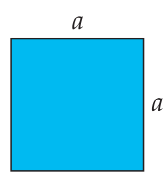
Postulado 2: se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais, sem ponto interior comum, então sua área é a soma das áreas dessas outras.

Exemplo

Sendo R_1, R_2 e R_3 três regiões triangulares que não têm ponto interior comum, a área da região R formada pela união das três regiões é a soma das áreas de R_1, R_2, e R_3.



Postulado 3: se uma região quadrada é limitada por quadrado de lado a, então a sua área é a^2.



Área = a^2

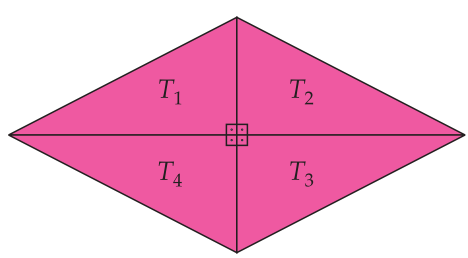
1.3. Regiões Poligonais Equivalentes

Duas regiões poligonais são equivalentes se, e somente se, elas tiverem a mesma área.

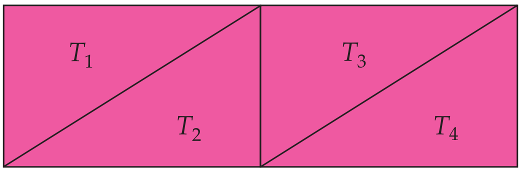
Exemplo

Sendo os quatro triângulos T_1, T_2, T_3 e T_4 congruentes, as duas regiões a seguir são equivalentes.

Região R_1 (losango)



Região R_2 (retângulo)



$$\left.\begin{array}{l} A(R_1)=A(T_1)+A(T_2)+A(T_3)+A(T_4) \\ A(R_2)=A(T_1)+A(T_2)+A(T_3)+A(T_4) \end{array}\right\} \rightarrow A(R_1)=A(R_2)$$

Indicamos:

$$\boxed{R_1 \approx R_2}$$

2. Cálculo de Áreas

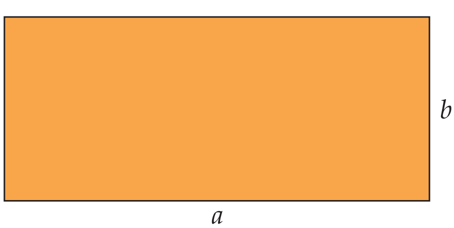
Para facilidade de linguagem, vamos omitir, daqui para a frente, a expressão região poligonal; usaremos apenas polígono. Assim, quando quisermos nos referir à área de uma região quadrada, por exemplo, diremos apenas área do quadrado.

2.1. Área de um Retângulo

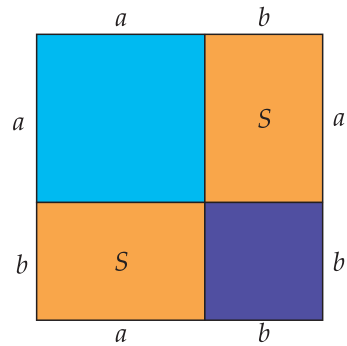
A área de um retângulo é igual ao produto de suas dimensões (comprimento e largura).

Demonstração

Consideremos um retângulo de dimensões a e b, conforme a figura:



Construindo um quadrado de lados $(a+b)$ e decompondo-o em retângulos e quadrados, temos:



$$a^2 + S + S + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2S + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

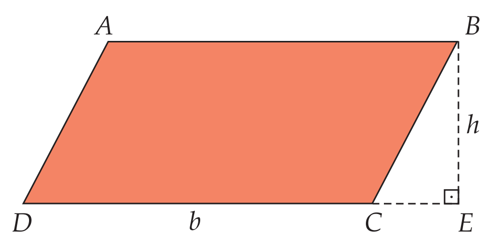
Assim: $2S = 2ab$ ou $\boxed{S = ab}$

2.2. Área de um Paralelogramo

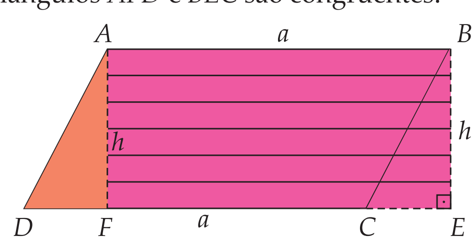
A área de um paralelogramo é o produto de uma base, ou seja, um lado, pela altura relativa.

Demonstração

Consideremos um paralelogramo $ABCD$ de base b e altura relativa h, conforme a figura:



Traçando a altura $\overline{AF}$, o retângulo $ABEF$ é equivalente ao paralelogramo $ABCD$, pois os triângulos AFD e BEC são congruentes.



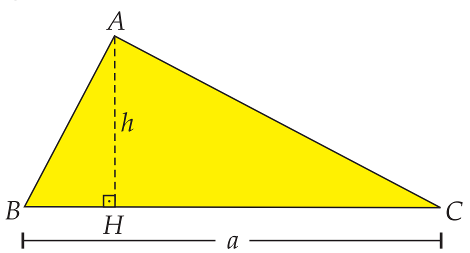
$$\boxed{S_{ABCD} = S_{ABEF} = ah}$$

2.3. Área de um Triângulo

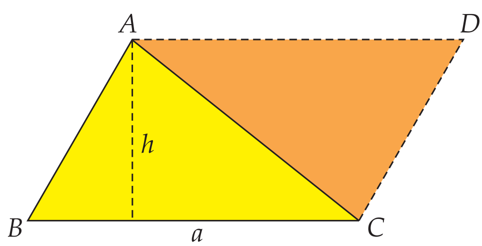
A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa.

Demonstração

Consideremos um triângulo ABC com base $BC = a$ e altura relativa $AH = h$, conforme a figura:



Traçando paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ pelos vértices C e A, respectivamente, temos:



$ADCB$ é paralelogramo e os triângulos ABC e CDA são congruentes.

Assim: $S_{ADCB} = 2S_{ABC} = ah$

ou seja,

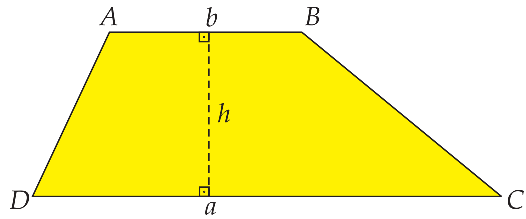
$$\boxed{S_{ABC} = \frac{ah}{2}}$$

2.4. Área de um Trapézio

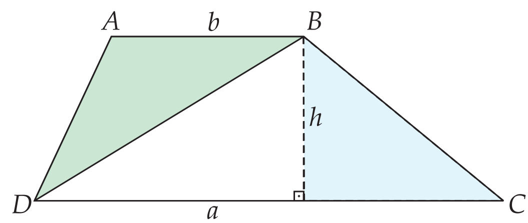
A área de um trapézio é igual ao produto da **semi-soma** das bases pela altura.

Demonstração

Consideremos um trapézio $ABCD$ com bases $AB = b$ e $CD = a$, e altura h, conforme a figura.



Traçando a diagonal $\overline{BD}$, temos:



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{a \cdot h}{2}$$

Assim:

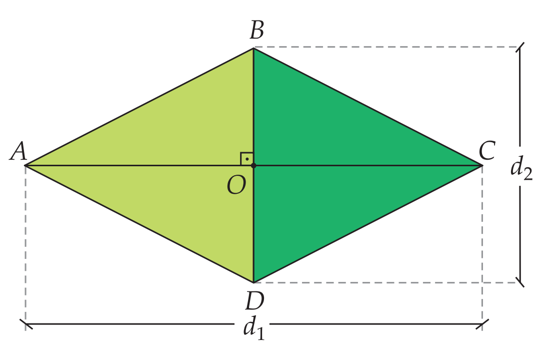
$$\boxed{S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h}$$

2.5. Área de um Losango

A área de um losango é igual ao **semiproduto** das diagonais.

Demonstração

Consideremos um losango $ABCD$ com diagonais $AC = d_1$ e $BD = d_2$ conforme a figura:



Assim:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AO}{2} + \frac{BD \cdot OC}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2}\left(AO + OC\right)$$

Como $AO + OC = AC$, temos:

$$S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

ou seja, $\boxed{S_{ABCD} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}}$

3. Divisão de uma Região Triangular em Partes Equivalentes

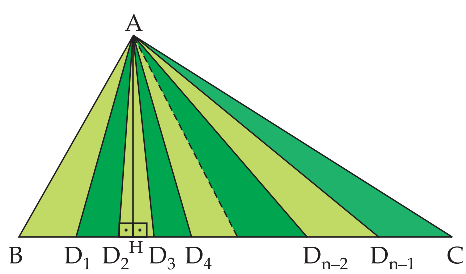
Dividimos uma região triangular em n partes equivalentes, traçando n–1 **cevianas,** a partir de um mesmo vértice, que dividem o lado oposto em n partes congruentes.

Demonstração

Consideremos num triângulo ABC de altura AH as cevianas

$\overline{AD_1}, \overline{AD_2}, \ldots, \overline{AD_{n-1}}$, de modo que

$BD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots = D_{n-1}C$



$$S_{ABD_1} = \frac{BD_1 \cdot AH}{2}; S_{AD_1D_2} = \frac{D_1D_2 \cdot AH}{2}; \ldots;$$

$$S_{AD_{n-1}C} \Rightarrow \frac{D_{n-1}C \cdot AH}{2}$$

Como $BD_1 = D_1D_2 = \ldots = D_{n-1}C$, temos:

$$\boxed{S_{ABD_1} = S_{AD_1D_2} = \ldots = S_{AD_{n-1}C}}$$

Exercícios Resolvidos

1) Calcular a área dos polígonos regulares abaixo, considerando que todos têm o mesmo lado l.

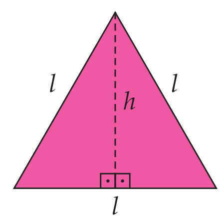
a) triângulo eqüilátero

b) hexágono regular

c) octógono regular

Resolução

a)

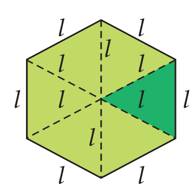


$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

b)

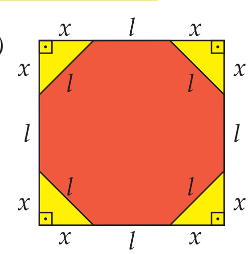


Área = 6 · Área do triângulo

$$\text{Área} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$$

c)



$$x^2 + x^2 = l^2 \Rightarrow x^2 = \frac{l^2}{2} \Rightarrow x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Área = (Área do quadrado) – 4 · (Área do triângulo)

$$Área = (l + 2x)^2 - 4 \cdot \frac{x \cdot x}{2}$$

$$Área = l^2 + 4lx + 4x^2 - 2x^2$$

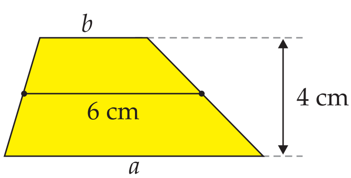
$$Área = l^2 + 4lx + 2x^2 = l^2 + 4l \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$Área = 2l^2 + 2l^2\sqrt{2}$$

Resposta: $Área = 2l^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

02. Um trapézio tem altura 4 cm e base média 6 cm. Calcule a área do trapézio.

Resolução



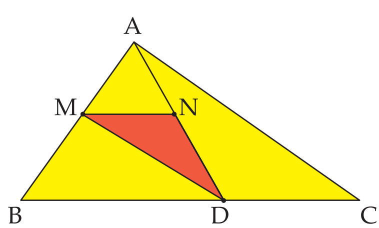
Sendo a e b as medidas das bases do trapézio, temos:

$$\frac{a+b}{2} = 6\ cm$$

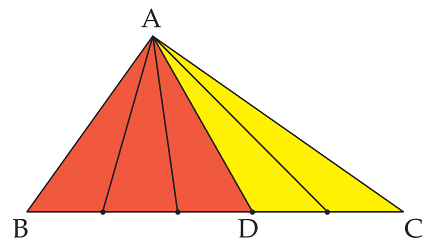
Assim, $área = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2$

Resposta: *24 cm²*

03. O triângulo ABC da figura tem área 120 cm², com BD = $\frac{3}{5}$ BC, AN = ND e AM = BM. Calcule a área do triângulo MND.

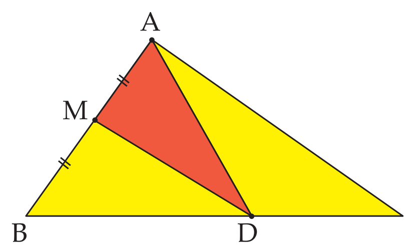


Resolução



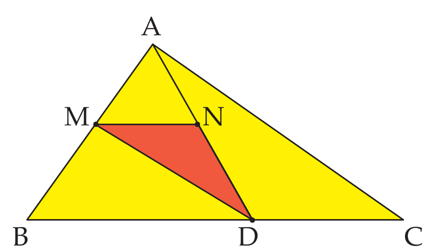
$$S_{ABD} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 120$$

$$S_{ABD} = 72\ cm^2$$



$$S_{ADM} = \frac{1}{2} S_{ABD}$$

$$S_{ADM} = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36\ cm^2$$



$$S_{MND} = \frac{1}{2} S_{ADM} = \frac{1}{2} \cdot 36$$

Resposta: $\boxed{S_{MND} = 18\ cm^2}$

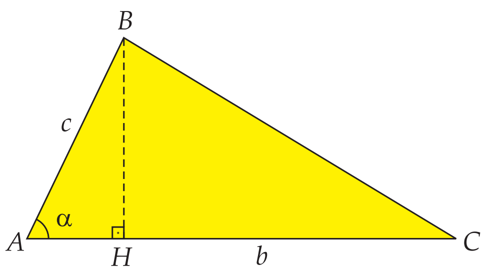
4. Área de um Triângulo em Função da Medida de Dois Lados e do Ângulo Compreendido

A área S de um triângulo de lados com medidas b e c e ângulo compreendido com medida α é:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Consideremos um triângulo de lados com medidas $AC = b$ e $AB = c$ e com $\hat{A} = \alpha$, então:

1º caso: $\alpha < 90°$



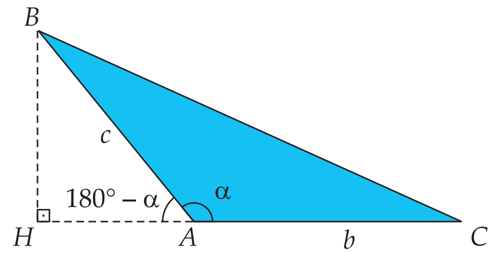
Sendo $\overline{BH}$ a altura do ΔABC em relação ao lado $\overline{AC}$, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Mas, $S = \dfrac{b \cdot BH}{2}$, então:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}}$$

2º caso: $\alpha > 90°$



Sendo $\overline{BH}$ a altura do ΔABC em relação ao lado $\overline{AC}$, temos:

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c \cdot \operatorname{sen}(180° - \alpha)$$

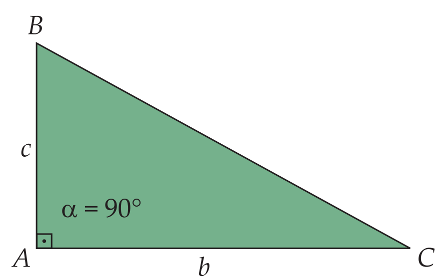
Como $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, então $BH = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Assim: $S = \dfrac{b \cdot BH}{2}$

ou seja:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}}$$

3º caso: a $= 90°$



$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Como $\operatorname{sen}\alpha = 1$, então:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}}$$

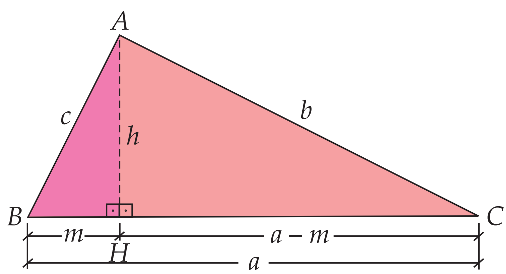
5. Fórmula de Heron

A área S de um triângulo de lados com medidas a, b e c e semiperímetro p é:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demonstração

Consideremos um triângulo ABC com lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, altura $AH = h$ e **projeção ortogonal** de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ igual a $BH = m$, conforme a figura:



No ΔABH: $c^2 = h^2 + m^2$ (I)

No ΔACH: $b^2 = (a-m)^2 + h^2$ (II)

Substituindo h^2 de (I) em (II), temos:

$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + c^2 - m^2$

$b^2 = a^2 - 2am + c^2$

Assim: $m = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ (III)

de (I) temos:

$h^2 = c^2 - m^2 = (c+m)(c-m)$ (IV)

substituindo (III) em (IV):

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \left(\frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{-a^2 + 2ac - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$4a^2h^2 = [(a+c)^2 - b^2]\,[b^2 - (a-c)^2]$

$4a^2h^2 = [a+c+b]\,[a+c-b]\,[b+a-c]\,[b-a+c]$

Como $2p = a + b + c$, logo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p-b)$

$b + a - c = b + a + c - 2c = 2p - 2c = 2(p-c)$

$b - a + c = b + a + c - 2a = 2p - 2a = 2(p-a)$

Assim:

$4a^2h^2 = 2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a)$

$a^2h^2 = 4p\,(p-b)\,(p-c)\,(p-a)$

Então:

$ah = 2\sqrt{p\,(p-b)(p-c)(p-a)}$

Mas, a área do ΔABC é:

$S = \dfrac{ah}{2}$, então:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

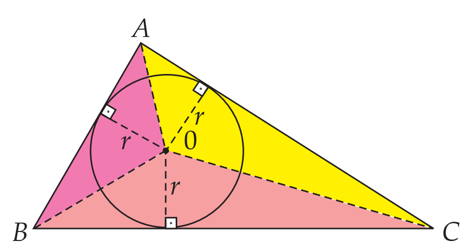
6. Fórmula da Área em Função do Raio da Circunferência Inscrita

A área S de um triângulo de semiperímetro p e raio da circunferência inscrita r é:

$$S = p \cdot r$$

Demonstração

Consideremos um triângulo ABC com a circunferência inscrita de raio r e centro O:



Os triângulos ABO, ACO e BCO têm áreas:

$$S_{ABO} = \frac{AB \cdot r}{2};\ S_{ACO} = \frac{AC \cdot r}{2};\ S_{BCO} = \frac{BC \cdot r}{2}$$

Mas, $S = S_{ABO} + S_{ACO} + S_{BCO}$, então:

$$S = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} = \left(\frac{AB + AC + BC}{2}\right) \cdot r$$

Como $\left(\frac{AB + AC + BC}{2}\right) = p$, temos:

$$\boxed{S = p \cdot r}$$

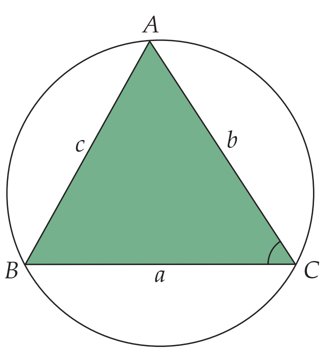
7. Fórmula da Área em Função do Raio da Circunferência Circunscrita

A área S de um triângulo de lados r com medidas a, b e c, e com raio da circunferência circunscrita R é:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Demonstração

Consideremos um triângulo ABC com a circunferência circunscrita de raio R.



$$S = \frac{ab \cdot sen\ \hat{C}}{2}$$

Aplicando o teorema dos senos no ΔABC, temos:

$$\frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R \rightarrow sen\hat{C} = \frac{c}{2R}$$

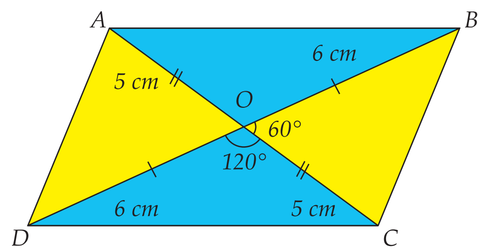
Assim: $\boxed{S = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2R}}$

ou $\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$

Exercícios Resolvidos

01) As diagonais de um paralelogramo medem 10 cm e 12 cm e formam um ângulo agudo de 60°. Calcule a área do paralelogramo.

Resolução



$$S_{ABCD} = 2S_{OBC} + 2S_{OCD}$$

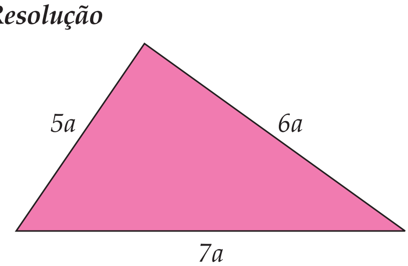
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot sen60°}{2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot sen120°}{2}$$

$$S_{ABCD} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim: $\boxed{S_{ABCD} = 30\sqrt{3}\ cm^2}$

02) Calcular a área do triângulo cujos lados têm medidas 5a, 6a e 7a.

Resolução



$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}$$

onde: $x = 5a;\ y = 6a;\ z = 7a$ *e*

$$p = \frac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$$

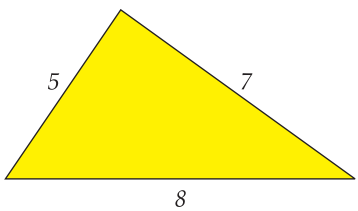
Assim: $S = \sqrt{9a(9a-5a)(9a-6a)(9a-7a)}$

$S = \sqrt{9a \cdot 4a \cdot 3a \cdot 2a} = 6a^2\sqrt{6}$

Logo $\boxed{S = 6\sqrt{6}\,a^2}$

03) Calcular as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo de lados 5, 7 e 8.

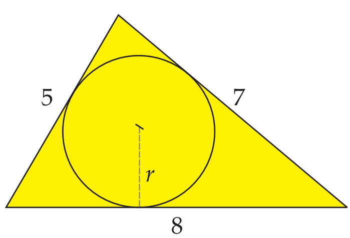
Resolução



$$p = \frac{5+7+8}{2} = 10$$

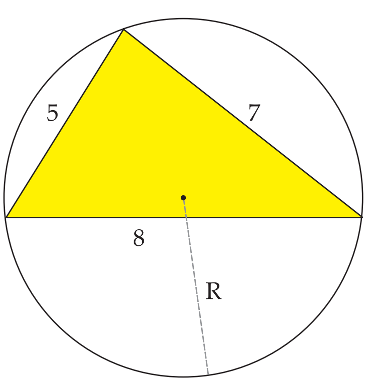
$$S_\Delta = \sqrt{10 \cdot (10-5)(10-8)(10-7)}$$

$$S_\Delta = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$$



$$S_\Delta = p \cdot r$$

$$\therefore 10\sqrt{3} = 10 \cdot r \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{3}}$$



$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4R}$$

$$R = \frac{\cancel{40} \cdot 7}{\cancel{40}\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

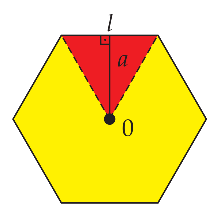
***Resposta**: Os raios das circunferências inscrita e circunscrita medem* $\sqrt{3}$ *e* $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

8. Área de um Polígono Regular

A área de um polígono regular é o produto do semiperímetro pelo apótema.

Demonstração

Consideremos um polígono regular com n lados, de centro O, com lado de medida l e apótema a. Então,



Unindo o centro O aos vértices do polígono, temos:

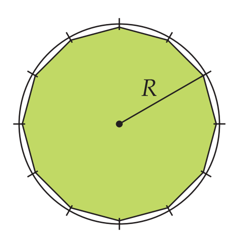
$$S = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l}{2} \cdot a$$

Como $nl = 2p$,

$$\boxed{S = p \cdot a}$$

9. Área de um Círculo

Consideremos um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência de raio R.



Sendo **a** o apótema do polígono, a sua área S será:

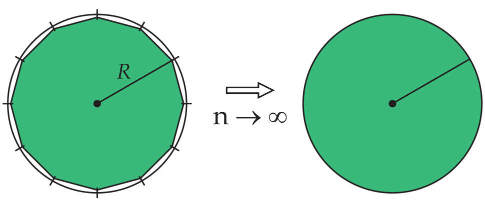
$$S = p \cdot a$$

Se o número n de lados for tão grande quanto se queira, o polígono tende a se aproximar da circunferência, e sua área se aproxima da área do círculo, assim,

$$\textbf{Área do círculo} = \lim_{n \to \infty} S$$

Polígono regular com n lados

Círculo



Notemos então que, quando n tende ao infinito, temos:

2p = comprimento da circunferência = $2\pi R$ então $p = \pi R$

e

a = raio da circunferência = R

Então,

Área do círculo = $\pi \cdot R \cdot R$

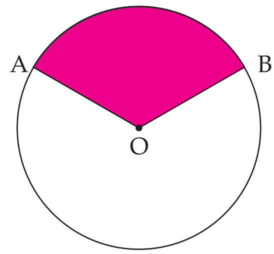
ou seja,

$$\boxed{\text{Área do círculo} = \pi \cdot R^2}$$

10. Área das Partes do Círculo

10.1. Setor Circular

Setor circular é a parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por dois raios com as extremidades nas extremidades do arco.



A área do setor circular é proporcional à medida do arco, então podemos calcular a sua área fazendo uma regra de três simples:

1º caso: arco medido em graus

Setor		arco
πR^2	———	$360°$
S	———	$\alpha°$

Assim, $\boxed{S = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha°}{360°}}$

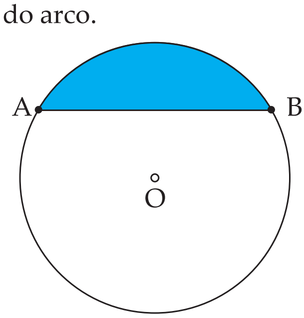
2º caso: arco medido em radianos

Setor		arco
πR^2	———	2π rad
S	———	α rad

Assim, $\boxed{S = \dfrac{R^2 \cdot \alpha}{2}}$

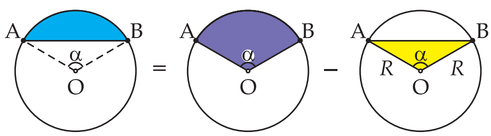
10.2. Segmento Circular

Segmento circular é a parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por uma corda com as extremidades nas extremidades do arco.



Calculemos a área de um segmento circular nos seguintes casos:

1º caso: corda menor que o diâmetro



$$S = S_{setor} - S_{triângulo}$$

Assim,

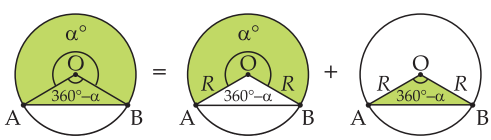
$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360°} - \frac{R \cdot R \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

ou seja,

$$S = R^2\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}\right)$$

com α medido em graus

2º caso: corda maior que o diâmetro



$$S = S_{setor} + S_{triângulo}$$

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360°} + \frac{R \cdot R \cdot \operatorname{sen}(360° - \alpha)}{2}$$

como sen (360° – α) = – sen α, temos:

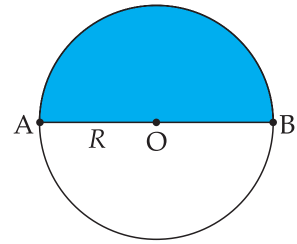
$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360°} - \frac{R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

ou seja,

$$S = R^2\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}\right)$$

com a medido em graus

3º caso: corda igual ao diâmetro

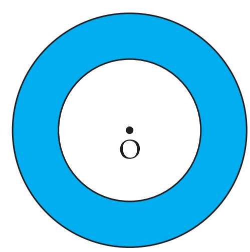


$$S = S_{semicírculo}$$

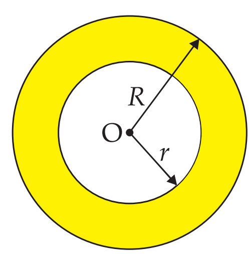
$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

10.3. Coroa Circular

Coroa circular é a parte do círculo limitada por duas circunferências distintas de mesmo centro (concêntricas).



A área de uma coroa circular de raios R e r é:

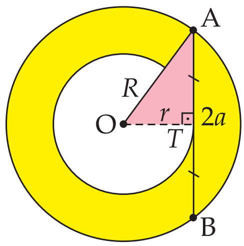


$S = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

$$S = \pi\,(R^2 - r^2)$$

Observação

É possível calcular a área de uma coroa circular conhecendo apenas a medida 2a de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência maior, tangente à circunferência menor.



No triângulo OAT, com T no ponto de tangência da corda $\overline{AB}$, temos:

$OA^2 = OT^2 + AT^2$

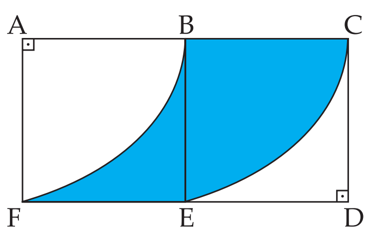
Assim, $R^2 = r^2 + a^2$

ou seja, $R^2 - r^2 = a^2$

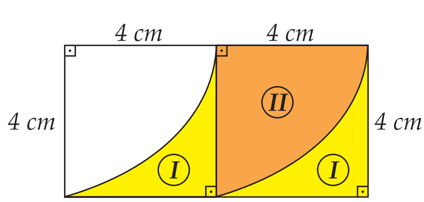
Logo, a área da coroa circular é:
$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$

Exercícios Resolvidos

01. Os arcos da figura têm raio 4 cm e centros em A e B. Calcular a área da região pontuada.

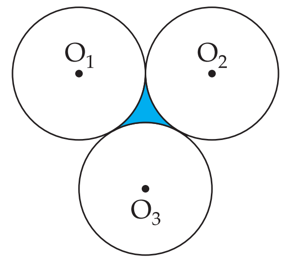


Resolução

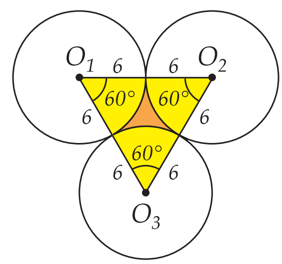


Área $= S_I + S_{II} = S_{quadrado}$
Resposta: *Área* $= 4^2 = 16$ *cm*

02. Os três círculos da figura têm o mesmo raio 6 cm. Calcular a área da região pintada.



Resolução



Área $= S_\Delta - 3\, S_{setor}$

Onde:

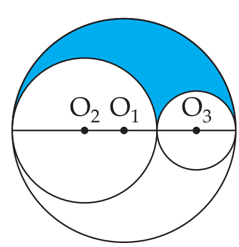
$$S_\Delta = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\ cm^2$$

$$S_{setor} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60°}{360°} = 6\pi\ cm^2$$

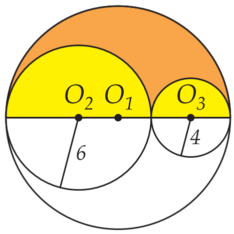
Área $= 36\sqrt{3} - 18\pi$

Resposta: $\boxed{Área = 18\left(2\sqrt{3} - \pi\right) cm^2}$

03. As duas circunferências menores da figura têm raios 6 cm e 4 cm. Calcule a área da região pintada.



Resolução



$$Diâmetro\ \ maior = 12\ cm + 8 cm = 20\ cm$$

$$Área = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} - \frac{\pi \cdot 6^2}{2} - \frac{\pi \cdot 4^2}{2} =$$

Resposta: $\boxed{Área = 24\,\pi\,cm^2}$