Elementos de Probabilidade

Introdução

Fenômeno: Qualquer transformação que ocorre com um corpo do universo

Dois tipos de Fenômenos

- Ex1: Imagine um corpo cuja velocidade é de 60 km/h. Em quanto tempo gastará para percorrer 120 km?
  - **Fenômeno determinístico**

- Ex2: Após o lançamento de um dado, qual será o seu resultado?
  - Resposta: Posso dizer que <u>é provável</u> que ocorra o resultado 1, ou 2, ou 3, ou 4 ou 5, ou 6
    - **Fenômeno probabilístico**

Introdução

A maioria dos fenômenos de que trata a estatística é de natureza aleatória: são fenômenos probabilísticos.

Conceitos:

1) Experimento aleatório ou não determinístico:

É o experimento que repetido sob as mesmas condições, conduz a resultados, em geral, distintos.

2) Espaço amostral (S): Conjunto de todos os possíveis resultados (ocorrências) de um experimento aleatório;

3) Evento (E): Qualquer subconjunto de resultados (ocorrências)

- **3.1) Evento Simples:** *ex. sair nº 1 no lançamento de um dado*
- **3.2) Evento Composto.** *ex. sair nº par no lançamento de um dado*
- **3.3) Evento Certo:** *ex. sair nº 1, 2 , 3 , 4, 5 ou 6 no lançamento de um dado*
- **3.4) Evento Impossível:** *ex. sair nº 0 no lançamento de um dado*

Princípio da multiplicação

EXEMPLO: Um jogo consiste em lançar dois dados simultaneamente e verificar a soma dos resultados obtidos. Qual a Probabilidade de ocorrer a soma 3?

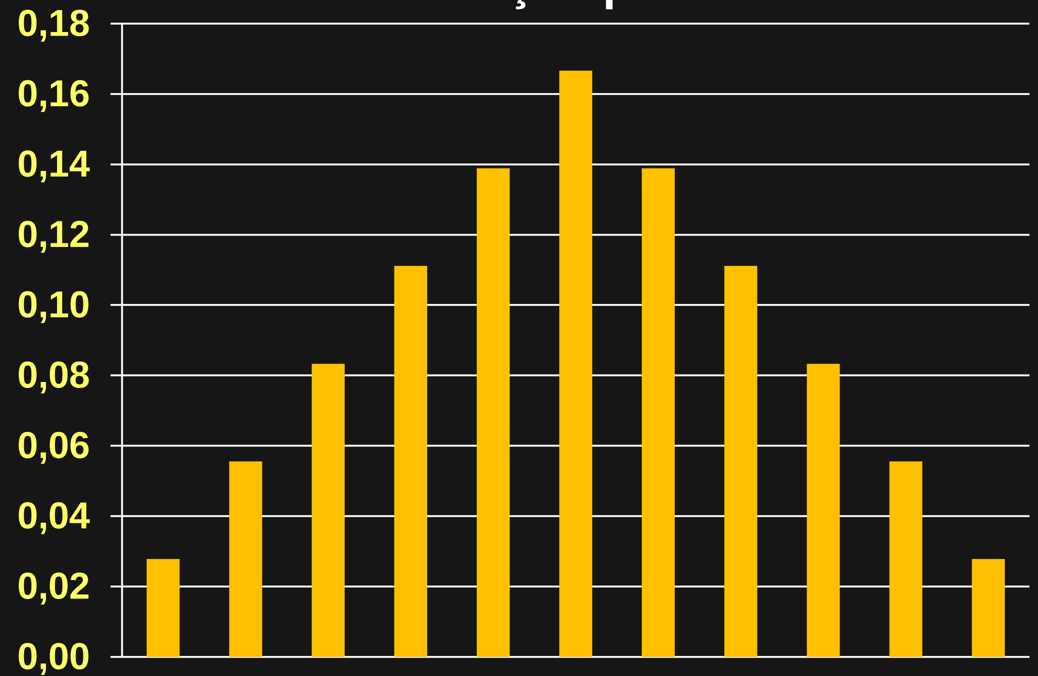
1º Dado	2º Dado	Soma
1	1	2
	2	3
	3	4
	4	5
	5	6
	6	7
2	1	3
	2	4
	3	5
	4	6
	5	7
	6	8
3	1	4
	2	5
	3	6
	4	7
	5	8
	6	9

1º Dado	2º Dado	Soma
4	1	5
	2	6
	3	7
	4	8
	5	9
	6	10
5	1	6
	2	7
	3	8
	4	9
	5	10
	6	11
6	1	7
	2	8
	3	9
	4	10
	5	11
	6	12

- **Resposta:** P(E)= 2/36

Soma (E)	F	P (E)
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36
Total	36	1

Distribuição probabilística



A freqüência relativa de um valor estima a Probabilidade:

i) Verdadeira (Q^{do} se tem a informação de todos os indivíduos da População)

ii) "Aproximada" (Q^{do} se tem uma amostra representativa da população) - **Estimada**

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{N° de elementos de E}}{\text{n° de elementos de S}}$$

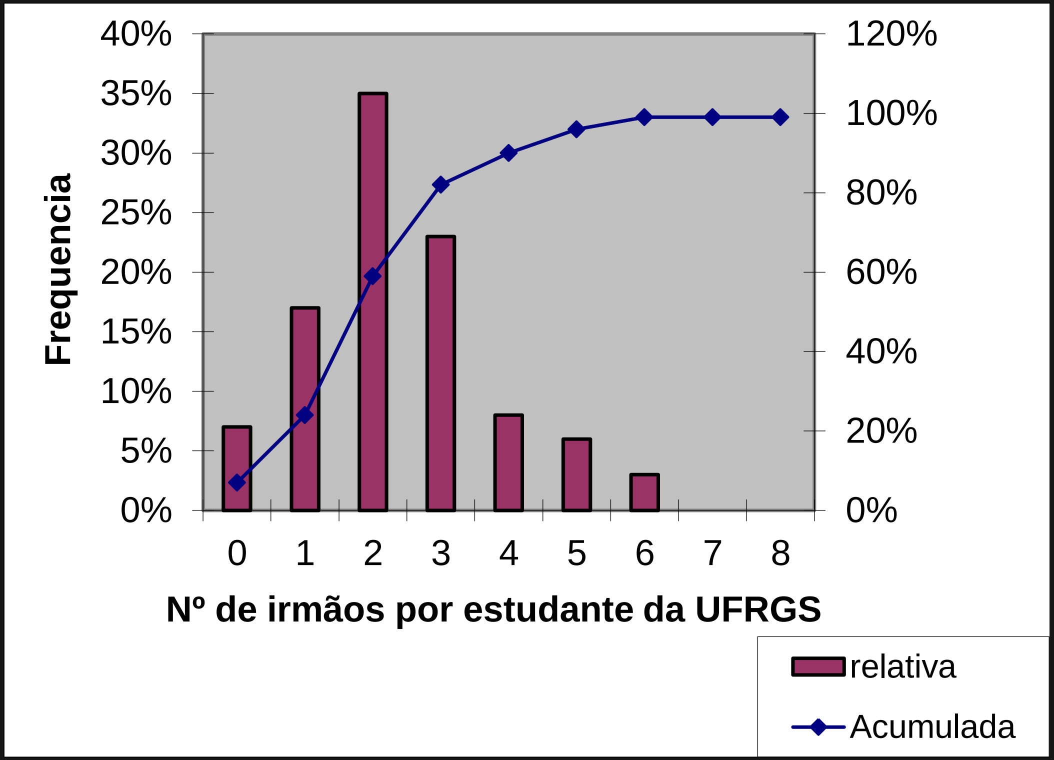
Exemplo: Frequência relativa a partir de uma amostragem

- Número de irmãos relatados por 115 estudantes universitários da UFRGS (1986 e 1992)

Nº de irmãos	F	Fr	Fr_{ac}
0	8	0,07	0,07
1	20	0,17	0,24
2	40	0,35	0,59
3	26	0,23	0,82
4	9	0,08	0,90
5	7	0,06	0,96
6	4	0,03	0,99
7	0	0,00	0,99
8	0	0,00	0,99
9	1	0,01	1,00

Σ F=

Gráfico Combinado



Probabilidade Conjunta

- **Exemplo:** Considerando alunos da 1ª e 2ª série do ensino médio de uma escola. Dentre eles será escolhido um representante que tenha média 9 ou 10 para participar de um concurso.
  – Qual a Probabilidade de que ele seja da 1ª série? E da 2ª?
  – Qual a Probabilidade de que seja um aluno com média 9? E média 10?

Alunos da 1ª e 2ª série do ensino médio escola X			
Média	1ª série	2ª série	Total
9	172	220	392
10	28	80	108
Total	200	300	500

- **Solução:** Temos 500 alunos e vamos sortear 1.

  As probabilidades são:
  - P (1º série) = 200/500 = 0,40
  - P (2ª Série) = 300/500 = 0,60
  - P (9) = 392/500 = 0,78
  - P (10) = 108/500 = 0,22

- **Questão:** Se estou interessado no seguinte evento (E):

  - média 10 e 2ª série.

A probabilidade associada a este evento é:

- P (E) = 80/500 = 0,16

Probabilidade Conjunta: Ocorrência com duas característica

- **Nota:** Quando duas variáveis são independentes, o fato de se ter conhecimento sobre uma delas não altera a expectativa sobre a probabilidade da outra.
  - **Ex:** Saber de antemão se a pessoa é do sexo masculino ou feminino não altera a probabilidade de que ela tenha o tipo sanguíneo O ou A do sistema ABO

Probabilidade Condicional

Definição 1: É dita probabilidade condicional quando a probabilidade de um evento depende da condição em que ele está sendo considerado.

Ex1: A probabilidade uma pessoa apresentar o tipo sanguíneo A pode depender de sua condição étnica.
- Constatação: todos indígenas não-miscigenados da Amazônia possuem o tipo sanguíneo O.

Aplicação: Utilizada para testar associação entre variáveis

Ex2: Crianças que nascem com peso baixo costumam ter mais problemas de saúde nos primeiros meses de vida.

- **Tabela 1.** **Incidência de baixo peso ao nascer em recém-nascidos de Pelotas, RS, em 1982, conforme o uso de fumo, pela mãe, durante a gravidez**

Classificação da Mãe	Baixo Peso			Probabilidade de baixo peso
	Sim	Não	Total	
Fumante	275	2.144	2.419	0,114
Não-fumante	311	4.496	4.807	0,065

Fonte: Barros e colaboradores. 1984

Exemplo 1: De uma urna com 25 bolas vermelhas e 15 azuis, queremos retirar 2 bolas. Qual a Probabilidade de que a 1ª seja azul e a 2ª vermelha, sem reposição?

Solução:

- A probabilidade de que a 1ª seja azul é 15 em 40 → P(A) = 15/40 = 0,38
- A probab. de que a 2ª seja vermelha é 25 em 39 → P(B) = 25/39 = 0,64

Neste caso a Probabilidade de "B" depende de "A". Dizemos que é uma *probabilidade condicional* retirar a bola vermelha, dado que já foi retirada uma azul. Notação: P(B/A)

Calculando os dois eventos temos:

P(AB) = P(A) . P(B/A)

P(AB) = 0,38 . 0,64 = 0,24

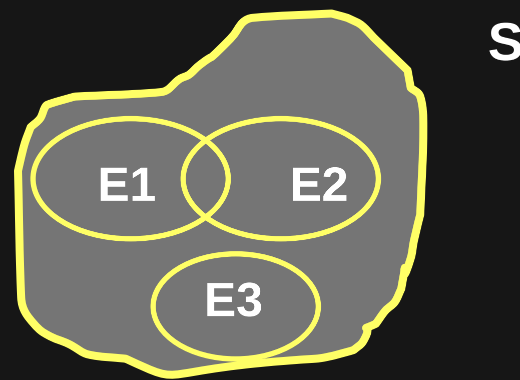
Teorema da multiplicação e adição

- **Nota:** No exercício anterior. Caso de haver reposição das bolas tiradas o evento se torna independente
- P(AB) = P(A) . P(B)

- **Obs:** em apenas um lançamento de <u>uma</u> moeda não é possível ocorrer cara e coroa simultaneamente. Esses eventos são mutuamente exclusivos. Então P(AB) = 0.
- E a Probabilidade de ocorrer A ou B?

P (A ou B) = P(A) + P(B) → Teorema da adição

Teoria dos Conjuntos e Probabilidade



Conceitos

Espaço amostral (S):

Evento (E):

- podemos associar um numero *não negativo menor ou igual a 1*

$$P(E) = \frac{\text{nº de elementos de E}}{\text{nº de elementos de S}} = \frac{n\,(E)}{n\,(S)}$$

$0 \leq P(E) \leq 1$

Exemplo. E_1: ocorrência do *nº 2* em um lançamento de dado.

$P(E_1) = 1/6$

Teoria dos Conjuntos e Probabilidade

Exemplo. E_1: ocorrência do nº 2 em um lançamento de dado.

$P(E_1) = 1/6$

E_2: ocorrência do nº 4 em um lançamento de dado. $P(E_2) = 1/6$

Probabilidade de ocorrer 2 ou 4 em um lançamento de dado.

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$n(E_1) = 1$

$n(E_2) = 1$

$n(E_1 \cup E_2) = 1 + 1 = 2$

$S = 6$

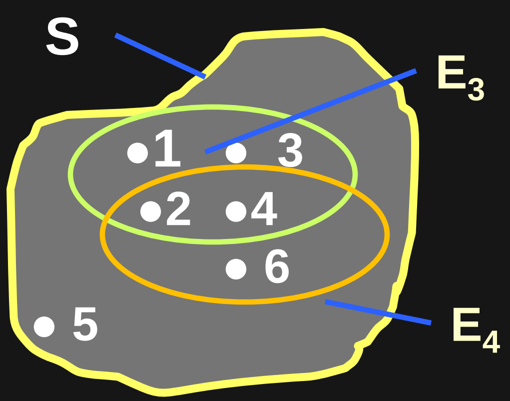
$P(E_1 \cup E_2) = (1/6) + (1/6)$

Teoria dos Conjuntos e Probabilidade

Exemplo.

E_3: ocorrência de resultados menores que 5.

E_4: ocorrência de números pares



Observe que n (E_3) = 4 e n (E_4) = 3 e n (E_3 U E_4) = 5, por que há dois elementos comuns (2 e 4)

Conclusão: os eventos não são mutuamente exclusivos como no exemplo anterior

$P(E_3 \cup E_4) = 5/6$

Corresponde a:

$$P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4) - P(E_3 \cap E_4)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$4/6 + 3/6 - 2/6 = 5/6$$

Cálculo por análise Combinatória

Exemplo A: considerando uma urna com 3 bolas, uma de cada cor. De quantas maneiras posso:

1. **Retirar 3 bolas?**
2. **Retirar 2 bolas?**

Exemplo B: Três bolas são retiradas ao acaso, <u>sem reposição</u>, de uma urna que contém 2 bolas Brancas, 3 Vermelhas e 5 Azuis. Qual a probabilidade de retirarmos 3 bolas sendo uma de cada cor?

Exemplo C: Considerando os mesmos dados do problema anterior e suponhamos que X seja uma variável que representa o total de bolas vermelhas retiradas, <u>sem restituição</u>, retirando-se 3 bolas da urna. Construir uma tabela que mostre a distribuição das probabilidades de X.

CASOS SEM REPOSIÇÃO DE BOLAS:

I). O texto não fala sobre a ordem de retirada ➔ Combinação

II). Qdo a ordem de retirada interessa ➔ Arranjo

Resumo

Fenômeno determinístico: repetindo o experimento diversas vezes, nas mesmas condições, o resultado esperado é sempre o mesmo

Fenômeno probabilístico: repetindo o experimento, nas mesmas condições, não se pode esperar sempre o mesmo resultado

Espaço Amostral: todos os possíveis resultados (conjunto universo no qual se processa o experimento)

Evento: ocorrência desejada (subconjunto)

Evento impossível: é o evento que não ocorre

Eventos mutuamente exclusivos: a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro.

Eventos dependentes: a ocorrência de um depende da ocorrência do outro

Probabilidade é o limite da frequência relativa quando aumentamos o n° de experimentos. Quanto mais vezes repetirmos a experiência, mais a frequência relativa se aproxima de P(E)

Probabilidade conjunta: probabilidade de ocorrência com duas ou mais características

Probabilidade condicional: probabilidade de ocorrência do evento B mediante a ocorrência anterior de A

Multiplicação de probabilidades: probabilidade de ocorrer E1 e E2 simultaneamente

$P(E1E2) = P(E1) . P(E2)$

Linguagem de conjuntos: $P(E1 \cap E2) = P(E1) . P(E2)$

Se E1 e E2 são dependentes. $P(E1E2) = P(E1).P(E2/E1)$,

Adição de Probabilidades: **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.**

Se A e B são mutuamente exclusivos $P(A \cap B) = 0$