CAPÍTULO I – Matemática Básica

1. Expressões Numéricas

São expressões matemáticas que envolvem operações com números.

Exemplos:

$7 + 5 + 4$ $\quad$ $5 + 20 - 87$ $\quad$ $(6 + 8) - 10$ $\quad$ $(5 \cdot 4) + 15$

1.1. Importância dos parênteses

Todos reconhecem a importância da colocação das vírgulas para o significado das sentenças.

Exemplos:

Tio Paulo, Sérgio vai ao cinema!

Tio, Paulo Sérgio vai ao cinema!

Verifica-se que estas duas sentenças possuem significados diferentes pela simples deslocação da vírgula.

Nas expressões e sentenças matemáticas, os sinais de associação (parênteses, colchetes, chaves) podem funcionar como verdadeiras vírgulas.

A expressão $10 - 5 + 2$ pode ter resultados diferentes, conforme a colocação dos parênteses:

$$(10 - 5) + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$10 - (5 + 2) = 10 - 7 = 3$$

Daí a importância dos sinais de associação.

1.2. Prioridade das operações numa expressão matemática

Nas operações em uma expressão matemática deve-se obedecer a seguinte ordem:

a) Potenciação ou Radiciação $\quad$ b) Multiplicação ou Divisão $\quad$ c) Adição ou Subtração

Observações quanto a prioridade:

a) Antes de cada uma das três operações citadas anteriormente, deve-se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves.

b) A multiplicação pode ser indicada por um “x” ou por um ponto “•” ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.

Exemplo 1: Resolva a expressão 20 – [–3 + (–5 + 18 + 6) – 1]

Resolução:

= 20 – [–3 + (19) – 1]

= 20 – [–3 + 19 – 1] (*)

= 20 – [15]

= 20 – 15 = 5

Exemplo 2: Resolva a expressão 2 – {–11 + [17 – (–12 + 10) – 3]}

Resolução:

= 2 – {– 11 + [17 – (–2) – 3]}

= 2 – {– 11 + [17 + 2 – 3]}

= 2 – {– 11 + [16]}

= 2 – {–11 + 16}

= 2 – {5}

= 2 – 5 = –3

Exemplo 3: Resolva a expressão 20 + 3(–4) – 2(–5)

Resolução:

= 20 – 12 + 10

= 30 – 12

= 18

Exemplo 4: Resolva a expressão 20 + [3 – 5 • 2 + (3 – 5) • 2]

Resolução:

= 20 + [3 – 10 + (–2) • 2]

= 20 + [3 – 10 – 4]

= 20 + [–11]

= 20 – 11 = 9

(*) **OBSERVAÇÃO:**

Para efetuar a soma de números inteiros temos duas possibilidades. Exemplo:

1º) Efetuar na ordem que aparece: –3 + 9 – 1 + 6 = 6 – 1 + 6 = 5 + 6 = 11.

2º) Somar os positivos e os negativos separadamente, e depois efetuamos a soma: –3 + 9 – 1 + 6 = –3 – 1 + 9 + 6 = –4 + 15 = 11

CAPÍTULO II – Cálculo Algébrico
Parte I – Monômios

1. Expressões Algébricas

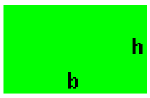
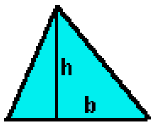
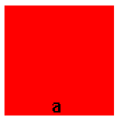
No cotidiano, muitas vezes usamos expressões sem perceber que as mesmas representam expressões algébricas ou numéricas.

Numa papelaria, quando calculamos o preço de um caderno somado ao preço de duas canetas, usamos expressões como 1x + 2y, onde x representa o preço do caderno e y o preço de cada caneta.

Num colégio, ao comprar um lanche, somamos o preço de um refrigerante com o preço de um salgado, usando expressões do tipo 1x + 1y onde x representa o preço do salgado e y o preço do refrigerante.

Usamos a subtração para saber o valor do troco. Por exemplo, se V é o valor total de dinheiro disponível e T é o valor do troco, então temos uma expressão algébrica do tipo V – (1x + 1y) = T.

As expressões algébricas são encontradas muitas vezes em fórmulas matemáticas. Por exemplo, no cálculo de áreas de retângulos, triângulos e outras figuras planas.

Expressão algébrica	Objeto matemático	Figura
$A = b \cdot h$	**Área do retângulo**	
$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	**Área do triângulo**	
$P = 4a$	**Perímetro do quadrado**	

Então, expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais.

Exemplos:

A = 2a + 7b
B = (3c + 4) – 5
C = 23c + 4

As letras nas expressões são chamadas **variáveis.** Isto significa que cada letra pode ser substituída por um valor numérico.

2. Classificação das expressões algébricas

As expressões algébricas classificam-se de acordo com o diagrama abaixo:

$$\text{Expressão algébrica}\begin{cases}\text{Racional}\begin{cases}\text{Inteira}\\ \text{Fracionária}\end{cases}\\ \\ \text{Irracional}\end{cases}$$

2.1. Expressão algébrica racional

É aquela em que a parte literal não está sujeita à operação de radiciação.

Exemplos:

a) $4xy$

b) $5x + 6y$

c) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{5}\,z$

d) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

e) $4x^2 - 7x + 3$

Uma expressão algébrica racional pode ser inteira ou fracionária.

2.1.1. Racional inteira

É aquela que não possui parte literal no denominador.

Exemplos:

a) $3x + 7$ b) $\frac{4}{3}x + \frac{5}{2}y$ c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{4}$ d) $\sqrt{5}\,x + \frac{5}{7}y - x^2y^3$

2.1.2. Racional fracionária

É aquela que possui parte literal no denominador.

Exemplos:

a) $\frac{6}{x}$ b) $\frac{4x - 8}{3y}$ c) $\frac{a^3 - b^3}{ab} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a - b)^2}$

2.2. Expressão algébrica irracional

É aquela em que a parte literal está sujeita à operação de radiciação.

Exemplos:

a) $5\sqrt{x}$ b) $4\sqrt{a}\,y$ c) $6xy + \frac{3}{\sqrt{xy}}$ d) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{z^3}$

3. Monômios e polinômios

São expressões matemáticas especiais envolvendo valores numéricos e literais, onde podem aparecer somente operações de adição, subtração ou multiplicação. Os principais tipos são apresentados na tabela:

Nome	Número de termos	Exemplo
monômio	**um**	**$3xy$**
binômio	**dois**	**$6x^2y - 7y$**
trinômio	**três**	**$ax^2 + bx + c$**
polinômio	**vários**	**$2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$**

Termo é o nome que se dá a todo produto indicado.

Um termo pode ser **numérico** (quando nele só aparecem números) ou **algébrico** (quando nele aparecem números e letras, ou apenas letras). Observe os exemplos:

$$\left.\begin{matrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 7 \end{matrix}\right\} \text{Representam termos numéricos.}$$

$$\left.\begin{matrix} 3a \\ -5xy \\ m^2n \\ \frac{2}{3}ax^3y^2 \end{matrix}\right\} \text{Representam termos algébricos.}$$

Todo termo algébrico apresenta um **coeficiente** (parte numérica) e uma **parte literal.** Veja os exemplos:

a) $6xy \rightarrow \begin{cases} 6 \text{ é o coeficiente.} \\ xy \text{ é a parte literal.} \end{cases}$

b) $-15a^3xy^2 \rightarrow \begin{cases} -15 \text{ é o coeficiente.} \\ a^3xy^2 \text{ é a parte literal.} \end{cases}$

c) $\frac{4}{3}a^2bc^5 \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \text{ é o coeficiente.} \\ a^2bc^5 \text{ é a parte literal.} \end{cases}$

d) $xy^4 \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ é o coeficiente.} \\ xy^4 \text{ é a parte literal.} \end{cases}$

Nota: Também são consideradas termos as expressões formadas por um único número ou uma única letra. Assim, 5, –8, $\sqrt{3}$, x, y são termos.

4. Monômios ou termos semelhantes

Observem as seguintes afirmações:

a) Os monômios $5x$ e $-8x$ possuem a mesma parte literal.

b) Os monômios $-2ab$ e $10ab$ possuem a mesma parte literal.

c) Os monômios $3x$ e $5y$ não possuem a mesma parte literal.

d) Os monômios $6y^3$ e $9y^3$ possuem a mesma parte literal.

e) Os monômios $4x^2$ e $4x$ não possuem a mesma parte literal.

f) Os monômios m^2x e $-3m^2x$ possuem a mesma parte literal.

g) Os monômios $5x^2y$ e $2xy^2$ não possuem a mesma parte literal.

Dois ou mais monômios (ou termos algébricos) são denominados semelhantes quando têm a mesma parte literal, ou não têm parte literal.

Observação:

a) Por definição, são também semelhantes os monômios representados por números reais isolados. Exemplo: $3;\ \frac{1}{2};\ -10;\ 0{,}5;\ -\sqrt{2}$ são semelhantes.

b) Dois monômios semelhantes, cujos coeficientes são números opostos, denominam-se **monômios opostos.** Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 10x \text{ e } -10x \\ \frac{1}{3}y^2 \text{ e } -\frac{1}{3}y^2 \\ a^2b \text{ e } -a^2b \end{array}\right\}\text{são monõmios opostos}$$

5. Redução de termos semelhantes

A adição de dois ou mais polinômios é feita escrevendo-se um polinômio após o outro e conservando-se o sinal de cada termo. Em seguida faz-se a redução dos termos semelhantes, caso existam.

A subtração de dois polinômios é feita adicionando-se o primeiro polinômio ao oposto do segundo.

Exemplo 1: Determinar a soma $(a + 3ab - 2b) + (4a - 2ab - 4b)$

Resolução:

Eliminando os parênteses e reagrupando os termos semelhantes temos:

$= a + 3ab - 2b + 4a - 2ab - 4b$

$= a + 4a + 3ab - 2ab - 2b - 4b$

$= 5a + ab - 6b$

Exemplo 2: Determinar a soma $(5x^2 - 3x + 12) - (7x^2 - 4x + 15)$

Resolução:

Eliminando os parênteses e reagrupando os termos semelhantes temos:

$= 5x^2 - 3x + 12 - 7x^2 + 4x - 15$

$= 5x^2 - 7x^2 - 3x + 4x + 12 - 15$

$= -2x^2 + x - 3$

6. Valor numérico de uma expressão algébrica

É o valor obtido para a expressão, ao substituir as variáveis literais por valores numéricos.

Exemplo 1: Sendo $A = 3x^2y$, determine o valor numérico para $x = 7$ e $y = 2$.
Resolução:

$= 3 \bullet 7^2 \bullet 2 = 3 \bullet 49 \bullet 2 = 294$

Exemplo 2: Sendo $P = 5xy - y^2$, determine o valor numérico para $x = -2$ e $y = 3$.

Resolução:

$= 5 \bullet (-2) \bullet 3 - 3^2$

$= -30 - 9$

$= -39$

Exemplo 3: Seu José faz pequenos fretes urbanos com sua perua Kombi cobrando uma taxa inicial de R$ 10,00 e mais R$ 4,00 por quilômetro rodado.

a) Indicando por x o número de quilômetros rodados, determine a expressão que representa o preço cobrado por ele.

b) Qual o valor numérico da expressão para $x = 6$?

Resolução:

a) $10 + 4x$

b) $10 + 4 \bullet 6 = 10 + 24 = 34$

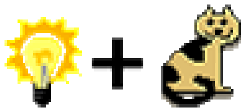
ATENÇÃO!!!!

Muitas vezes devemos utilizar parênteses quando substituímos variáveis por valores negativos.

ERRADO!!!! $3a^3 + 2a^2 + ab = 5a^5 + ab$

Veja que $3a^3$ e $2a^2$ não possuem a mesma parte literal e, portanto, não podem ser somados. No caso acima, não há termos que podem ser somados ou subtraídos.

Seria o mesmo que efetuar a seguinte soma:



Não há lógica a soma de uma lâmpada com um gato, assim como não há, entre $3a^3$ e $2a^2$.

7. Multiplicação

Recordando produtos de potências de mesma base, temos:

$x^2 \bullet x^3 = x^{2+3} = x^5$ $\quad$ $a^4 \bullet a \bullet a^5 = a^{4+1+5} = a^{10}$

Para determinarmos o produto de dois ou mais monômios:

a) calculamos o produto dos seus coeficientes numéricos;

b) calculamos o produto das partes literais, aplicando, quando possível, a propriedade do produto de potências de mesma base.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $(+4x^2) \bullet (-2x^3) = (+4) \bullet (-2) \bullet x^2 \bullet x^3 = -8x^5$

Exemplo 2: $(-6a^4b^3c) \bullet (-5a^2b) = (-6)(-5) \bullet a^4 \bullet a^2 \bullet b^3 \bullet b \bullet c = 30a^6b^4c$

Exemplo 3: $\left(-\frac{2}{3}ax^2y\right)\left(+\frac{3}{5}bxy\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{5}\right) \bullet a \bullet b \bullet x^2 \bullet x \bullet y \bullet y = -\frac{2}{5}abx^3y^2$

8. Divisão

Recordando quocientes de potências de mesma base, temos:

$x^5 : x^2 = x^{5-2} = x^3$

$a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 = 1$

$m^2 : m^5 = m^{2-5} = m^{-3} = \dfrac{1}{m^3}$

Para determinarmos o quociente de dois monômios, com o segundo não nulo:

a) calculamos o quociente dos coeficientes numéricos;

b) calculamos o quociente das partes literais, aplicando, quando possível, a propriedade do quociente de potências de mesma base.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $(+20x^6) : (+4x^4) = \left(\dfrac{20}{4}\right) \bullet (x^6 : x^4) = 5x^2$

Exemplo 2: $(+12x^3y^2) : (-3xy) = \left(\dfrac{12}{-3}\right) \bullet (x^3 : x) \bullet (y^2 : y) = -4x^2y$

Exemplo 3: $(-3a^4mn) : (-5am) = \left(\dfrac{-3}{-5}\right) \bullet (a^4 : a) \bullet (m : m) . n = \dfrac{3}{5}a^3m^0n = \dfrac{3}{5}a^3n$ **(pois $m^0 = 1$)**

Exemplo 4: $\left(-\dfrac{1}{2}x^2y\right):\left(+\dfrac{3}{4}xy^3\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right) : \left(+\dfrac{3}{4}\right) \bullet (x^2 : x) \bullet (y : y^3) = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \bullet \left(+\dfrac{4}{3}\right)xy^{-2} = -\dfrac{2x}{3y^2}$

Observe que o quociente determinado neste último exemplo não é um monômio: é denominado **fração algébrica**, que estudaremos mais tarde.

9. Potenciação

Recordemos as propriedades:

a) Potência de uma potência:

$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$ $(a^4)^5 = a^{4 \cdot 5} = a^{20}$

b) Distributiva em relação ao produto:

$(a \bullet b)^3 = a^3 \bullet b^3$ $(x^2 \bullet y^5)^2 = (x^2)^2 \bullet (y^5)^2$

Para determinarmos a potência de um monômio:

a) calculamos a potência do coeficiente numérico;

b) calculamos a potência da parte literal, aplicando a propriedade da potência de uma potência.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $(-2a^3x)^4 = (-2)^4 \bullet (a^3)^4 \bullet (x)^4 = 16a^{12}x^4$

Exemplo 2: $\left(-\frac{2}{3}ab^3c^4\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \bullet (a)^3 \bullet (b^3)^3 \bullet (c^4)^3 = -\frac{8}{27}a^3b^9c^{12}$

Exemplo 3: $\left(-\frac{20}{37}x^{15}y^{47}\right)^0 = 1$

Exemplo 4: $\left(-\frac{2}{3}x^2\right)^1 = -\frac{2}{3}x^2$

Observações:

a) a soma algébrica de dois ou mais monômios sem sempre é um monômio.

b) O produto de dois ou mais monômios é sempre um monômio.

c) O quociente de dois monômios nem sempre é um monômio.

Parte II – Polinômios

10. Polinômios

Já vimos que nem toda soma algébrica de monômios é um monômio. Por exemplo, as expressões algébricas $2x - y$ e $\frac{3}{2}a^2x + \frac{2}{3}ax$ não são monômios.

Daí a definição:

Uma soma algébrica de monômios denomina-se expressão polinômia que, por motivos didáticos, chamaremos polinômio.

Assim, são polinômios: $2x - y$, $\frac{3}{2}a^2x + \frac{2}{3}ax$, $x^2 - 5x + 6$, $m^3 - 2am^2 + am - a^2$.

Cada monômio que compõe o polinômio chama-se **termo do polinômio.**

$\underbrace{2a}_{\text{termo}} - \underbrace{3b}_{\text{termo}}$ $\qquad$ $\underbrace{x^2}_{\text{termo}} - \underbrace{5x}_{\text{termo}} + \underbrace{6}_{\text{termo}}$

11. Polinômio Reduzido

Seja o polinômio $x^2 + 5xy - y^2 - xy + 4y^2$. Observamos que nele existem termos semelhantes; vamos reduzi-los:

$$x^2 + 5xy - y^2 - xy + 4y^2 = x^2 + 4xy + 3y^2$$

Agora, já não existem termos semelhantes, e o polinômio $x^2 + 4xy + 3y^2$ é denominado **polinômio reduzido.**

Observações

a) Na redução de um polinômio podemos obter um monômio nulo.

Exemplo: $3x^2 - x + x - 3x^2 = 0$

b) Um polinômio reduzido de dois termos é denominado **binômio.**

Exemplos: $2x - y$; $\quad a + b$; $\quad x - 4$; $\quad \frac{1}{3}a - 2$

c) Um polinômio reduzido de três termos é denominado **trinômio.**

Exemplos: $x^2 - 5x + 6$; $\quad a^2 + 2ab + b^2$; $\quad 2a - b + 5c$

d) Um polinômio reduzido com mais de três termos **não tem nome particular.**

Exemplos: $x^3 - 2x^2 + 5x - 1$; $\quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

e) Por definição, os monômios são considerados **polinômios de um só termo.**

12. Grau de um polinômio

O grau de um polinômio reduzido não nulo é dado pelo seu termo de maior grau, não-nulo. Assim:

a) O polinômio $x^3y - 2x^4y^3 + 6xy^4$ é do **7º grau.**

b) O polinômio $a^3 + 2a^2b^2 - 5ab$ é do **4º grau.**

O grau de um polinômio pode ser estabelecido, também, em relação a uma determinada variável; nesse caso, o grau é dado pelo maior expoente com que a variável figura nos termos não nulos do polinômio.

Assim:

a) O polinômio $x^3 - 3x^2y + 5xy^2$ é do $\begin{cases} 3^o \text{ grau em relação a x} \\ 2^o \text{ grau em relação a y} \end{cases}$

b) O polinômio $m^5n + 10m^2$ é do $\begin{cases} 5^o \text{ grau em relação a m} \\ 1^o \text{ grau em relação a n} \end{cases}$

13. Polinômios com uma só variável

Sejam os polinômios reduzidos: $x^2 - 6x + 5$; $x^3 - x^2 + x - 1$; $3x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 5x + 10$. Estes polinômios são denominados **polinômios com uma variável** ou, por brevidade, **polinômios na variável x.**

É costume escrever estes polinômios ordenados segundo as potências decrescentes da variável x, como, por exemplo: $x^2 - 6x + 4$; $2x^3 - 7x^2 - 4x + 1$; $x^5 - 4x^3 + x^2 - 9$.

Quando um polinômio está assim ordenado e nele não aparecem uma ou mais potências de x, dizemos que os coeficientes destes termos são zeros e que o polinômio é **incompleto.**

Exemplos:

$x^3 - 2x + 1$ é incompleto e pode ser escrito $x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ (forma geral)

$x^5 - x^2 - 4$ é incompleto e pode ser escrito $x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x - 4$ (forma geral)

$x^3 - 1$ é incompleto e pode ser escrito $x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ (forma geral)

14. Operações com polinômios

14.1. Adição e Subtração

A adição de dois ou mais polinômios é feita escrevendo-se um polinômio após o outro e conservando-se o sinal de cada termo. Em seguida faz-se a redução dos termos semelhantes, caso existam.

A subtração de dois polinômios é feita adicionando-se o primeiro polinômio ao oposto do segundo.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Determinar a soma $(a + 3ab - 2b) + (4a - 2ab - 4b)$

Resolução:

$(a + 3ab - 2b) + (4a - 2ab - 4b)$

$= a + 3ab - 2b + 4a - 2ab - 4b$

Reagrupando e somando os termos semelhantes temos:

$= a + 4a + 3ab - 2ab - 2b - 4b$

$= 5a + ab - 6b$

Exemplo 2: Determinar a soma $(5x^2 - 3x + 12) - (7x^2 - 4x + 15)$

Resolução:

$(5x^2 - 3x + 12) - (7x^2 - 4x + 15)$

$= 5x^2 - 3x + 12 - 7x^2 + 4x - 15$

Reagrupando e somando os termos semelhantes temos:

$= 5x^2 - 7x^2 - 3x + 4x + 12 - 15$

$= -2x^2 + x - 3$

Exemplo 3: Dados os polinômios $A = x - 2y + 1$, $B = 3x + y - 4$ e $C = -2x + 4y - 3$, determine $A + B - C$.

Resolução:

$A + B - C$

$= (x - 2y + 1) + (3x + y - 4) - (-2x + 4y - 3)$

Eliminando os parênteses e reagrupando os termos semelhantes temos:

$= x - 2y + 1 + 3x + y - 4 + 2x - 4y + 3$

$= x + 3x + 2x - 2y + y - 4y + 1 - 4 + 3$

$= 6x - 5y$

14.2. Multiplicação

1º caso: Multiplicação de um monômio por um polinômio

Para multiplicar um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica, ou seja, multiplicamos cada termo do polinômio pelo monômio e somamos algebricamente os resultados obtidos.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Calcule o produto $3x \bullet (2x^2 - 5x + 1)$.

Resolução:

$$3x \bullet (2x^2 - 5x + 1) = 3x \bullet 2x^2 + 3x \bullet (-5x) + 3x \bullet 1 = 6x^3 - 15x^2 + 3x$$

Exemplo 2: Calcule o produto $\left(-\frac{1}{4}a^2b\right) \bullet \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}ab\right)$.

Resolução:

$$\left(-\frac{1}{4}a^2b\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}ab\right) = \left(-\frac{1}{4}a^2b\right) \bullet \left(\frac{2}{3}a\right) - \frac{1}{4}a^2b \bullet \left(-\frac{1}{2}ab\right) = -\frac{1}{6}a^3b + \frac{1}{8}a^3b^2$$

Exemplo 3: Calcule o produto $(5x^2 - 4y) \bullet 2xy$.

Resolução:

$$(5x^2 - 4y) \bullet 2xy = 5x^2 \bullet 2xy - 4y \bullet 2xy = 10x^3y - 8xy^2$$

2º caso: Multiplicação de um polinômio por um polinômio

Para multiplicar um polinômio por outro, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro, somando algebricamente os produtos obtidos e reduzindo, em seguida, os termos semelhantes, desde que possível.

Exemplo 4: Calcule o produto $(2x + 7)(3x - 1)$

Resolução:

$$(2x + 7)(3x - 1)$$
$$= 2x(3x - 1) + 7(3x - 1)$$
$$= 6x^2 - 2x + 21x - 7$$
$$= 6x^2 + 19x - 7$$

Exemplo 5: Determine o produto $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Resolução:

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$= x(x^2 + 2x + 4) - 2(x^2 + 2x + 4)$

$= x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8$

$= x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 4x - 4x - 8$

$= x^3 - 8$

14.3. Divisão

1º caso: Divisão de um polinômio por um monômio

Para dividir um polinômio por um monômio não-nulo, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio e somamos algebricamente os quocientes obtidos.

Exemplo 1: Efetue a divisão $(15x^3 - 18x^2 + 6x) : 3x$.

Resolução:

$(15x^3 - 18x^2 + 6x) : 3x$

$= 15x^3 : 3x - 18x^2 : 3x + 6x : 3x$

$= 5x^2 - 6x + 2$ **(Lembrando que $x^0 = 1$)**

Exemplo 2: Efetue a divisão $(25a^3x^2 + 18a^4x^3 - 15a^2x) : (5ax)$.

Resolução:

$(25a^3x^2 + 18a^4x^3 - 15a^2x) : (5ax)$

$= 25a^3x^2 : 5ax + 18a^4x^3 : 5ax - 15a^2x : 5ax$

$= 5a^2x + \frac{18}{5}a^3x^2 - 3a$ **(Lembrando que $x^0 = 1$)**

2º caso: Divisão de um polinômio por um polinômio

Antes de iniciarmos a divisão de um polinômio por outro, vale a pena relembrar a propriedade fundamental da divisão:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Resto} & \text{Quociente} \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{Dividendo} = \text{Quociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Resto}$$

Não devemos esquecer que o resto é sempre um número não-negativo e menor que o divisor.

Estudaremos, apenas, a divisão entre polinômios com uma única variável, se bem que o método utilizado é válido para qualquer caso. Vejamos uma regra prática para efetuar a divisão de polinômios.

Exemplo 1: Efetue a divisão $(6x^3 - 11x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - x + 4)$.

$$6x^3 - 11x^2 + 12x - 15 \;\big|\; \underline{3x^2 - x + 4}$$

Os polinômios devem estar em ordem decrescente em relação ao grau da variável.

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{6x^3}^{\text{Termo de maior grau}} \;\; -11x^2 + 12x - 15 & \underline{\overbrace{3x^2}^{\text{Termo de maior grau}} \;\; - x + 4} \\ & 2x \end{array}$$

Os polinômios devem estar em ordem decrescente em relação ao grau da variável.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 11x^2 + 12x - 15 & \underline{3x^2 - x + 4} \\ \underline{-6x^3 + 2x^2 - \;\; 8x} & 2x \\ \quad\;\; -9x^2 + \;\; 4x - 15 & \end{array}$$

Multiplicamos 2x pelos termos do divisor, colocando o resultado com **sinal trocado** sob o dividendo. A seguir, adicionamos os termos semelhantes e baixamos o termo seguinte.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 11x^2 + 12x - 15 & \underline{3x^2 - x + 4} \\ \underline{-6x^3 + 2x^2 - \;\; 8x} & 2x - 3 \leftarrow \text{Quociente} \\ \quad\;\; -9x^2 + \;4x - 15 & \\ \quad\;\; \underline{+9x^2 - \;3x + 12} & \\ \qquad\qquad\quad x - \;3 \leftarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Repetimos todo o procedimento com o resto parcial obtido até que o resto tenha grau menor que o divisor.

Exemplo 2: Efetue a divisão $(2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 16x - 5) : (2x^2 + x - 3)$.

$$2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 16x - 5 \;\big|\; \underline{2x^2 + x - 3}$$

Os polinômios devem estar em ordem decrescente em relação ao grau da variável.

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{2x^4}^{\text{Termo de maior grau}} \;\; -10x^3 - 6x^2 + 16x - 5 & \underline{\overbrace{2x^2}^{\text{Termo de maior grau}} \;\; + x - 3} \\ & 2x^2 \end{array}$$

Os polinômios devem estar em ordem decrescente em relação ao grau da variável.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 16x - 5 & \underline{2x^2 + x - 3} \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 + 6x^2} & 2x^2 \\ \quad\; -12x^3 \qquad\quad + 16x - 5 & \end{array}$$

Multiplicamos 2x pelos termos do divisor, colocando o resultado com **sinal trocado** sob o dividendo. A seguir, adicionamos os termos semelhantes e baixamos o termo seguinte.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 16x - 5 & \underline{2x^2 + x - 3} \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 + 6x^2} & 2x^2 - 6x + 3 \leftarrow \text{Quociente} \\ \quad\; -12x^3 \qquad\quad + 16x - 5 & \\ \quad\; \underline{+12x^3 + 6x^2 - 18x} & \\ \qquad\qquad 6x^2 - 2x - 5 & \\ \qquad\quad \underline{-6x^2 - 3x + 9} & \\ \qquad\qquad\quad -5x + 4 \leftarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Repetimos todo o procedimento com o resto parcial obtido até que o resto tenha grau menor que o divisor.

Exemplo 3: Determinar o quociente $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

Como o polinômio é incompleto, devemos escrevê-lo na forma geral.

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{x^4}^{\text{Termo de maior grau}} + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & \overbrace{x^2}^{\text{Termo de maior grau}} + 1 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

Os polinômios devem estar em ordem decrescente em relação ao grau da variável.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 \qquad\quad - x^2} & x^2 \\ \qquad + 0x^3 - x^2 + 0x - 1 & \end{array}$$

Multiplicamos 2x pelos termos do divisor, colocando o resultado com **sinal trocado** sob o dividendo. A seguir, adicionamos os termos semelhantes e baixamos o termo seguinte.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 \qquad\quad - x^2} & x^2 - 1 \leftarrow \text{Quociente} \\ \qquad + 0x^3 - x^2 + 0x - 1 & \\ \qquad \underline{\qquad\quad + x^2 \qquad + 1} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \leftarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Repetimos todo o procedimento com o resto parcial obtido até que o resto tenha grau menor que o divisor.

CAPÍTULO III – Produtos Notáveis

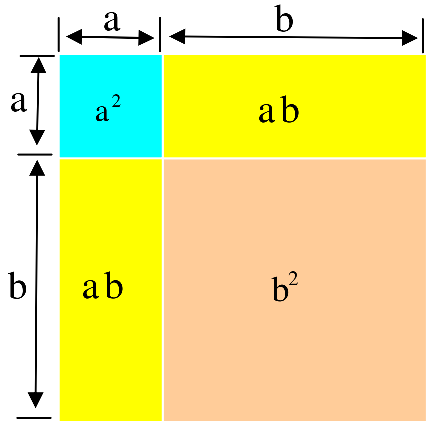
1. O que são produtos notáveis?

Há certos produtos que ocorrem frequentemente no cálculo algébrico e que são chamados **produtos notáveis**. Vamos apresentar aqueles cujo emprego é mais frequente.

2. Casos de produtos notáveis

2.1. Quadrado da soma de dois termos

- **Interpretação Geométrica**



- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

$(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b)$

$\mathbf{(a + b)^2} = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

Assim podemos concluir que **o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.**

$$(\text{primeiro} + \text{segundo})^2 = (\text{primeiro})^2 + 2 \cdot (\text{primeiro}) \cdot (\text{segundo}) + (\text{segundo})^2$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Desenvolva $(x + 3y)^2$.

Resolução:

$$(x + 3y)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$$

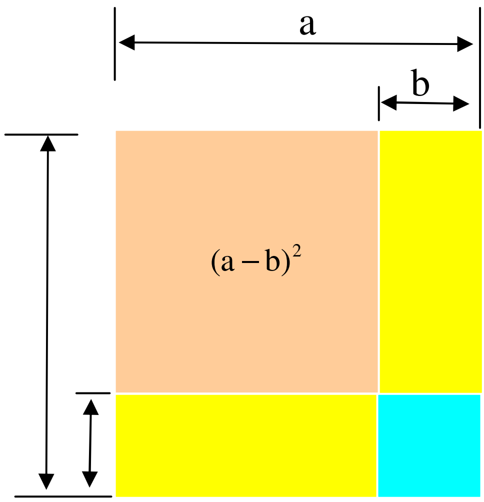
Exemplo 2: Desenvolva $(5x^2 + 4y)^2$.

Resolução:

$$(5x^2 + 4y)^2 = (5x^2)^2 + 2 \bullet 5x^2 \bullet 4y + (4y)^2 = 25x^4 + 40x^2y + 16y^2$$

2.2. Quadrado da diferença de dois termos

- **Interpretação Geométrica**



- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$(a - b)^2 = (a - b) \bullet (a - b)$

$(a + b)^2 = a(a - b) + b(a - b)$

$\mathbf{(a - b)^2} = a^2 - ab - ba + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

Assim podemos concluir que **o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.**

$$(\text{primeiro} - \text{segundo})^2 = (\text{primeiro})^2 - 2 \bullet (\text{primeiro}) \bullet (\text{segundo}) + (\text{segundo})^2$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3: Desenvolva $(7x - y)^2$.

Resolução:

$$(7x - y)^2 = (7x)^2 - 2 \bullet 7x \bullet y + (y)^2 = 49x^2 - 14xy + y^2$$

Exemplo 4: Desenvolva $(5x^2 - 4y)^2$.

Resolução:

$$(5x^2 - 4y)^2 = (5x^2)^2 - 2 \bullet 5x^2 \bullet 4y + (4y)^2 = 25x^4 - 40x^2y + 16y^2$$

CUIDADO!!!!

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

$(5+3)^2 \neq 5^2 + 3^2$

$8^2 \neq 25 + 9$

$64 \neq 34$

$(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

$(5-3)^2 \neq 5^2 - 3^2$

$2^2 \neq 25 - 9$

$4 \neq 16$

São válidas as igualdades:

$(a-b)^{par} = (b-a)^{par}$

$(5-3)^2 = (3-5)^2$

$2^2 = (-2)^2$

$4 = 4$

$(a-b)^{ímpar} = -(b-a)^{ímpar}$

$(5-3)^3 = -(3-5)^3$

$2^3 = -(-2)^3$

$8 = 8$

2.3. Produto da soma de dois termos pela sua diferença

- **Interpretação Geométrica**

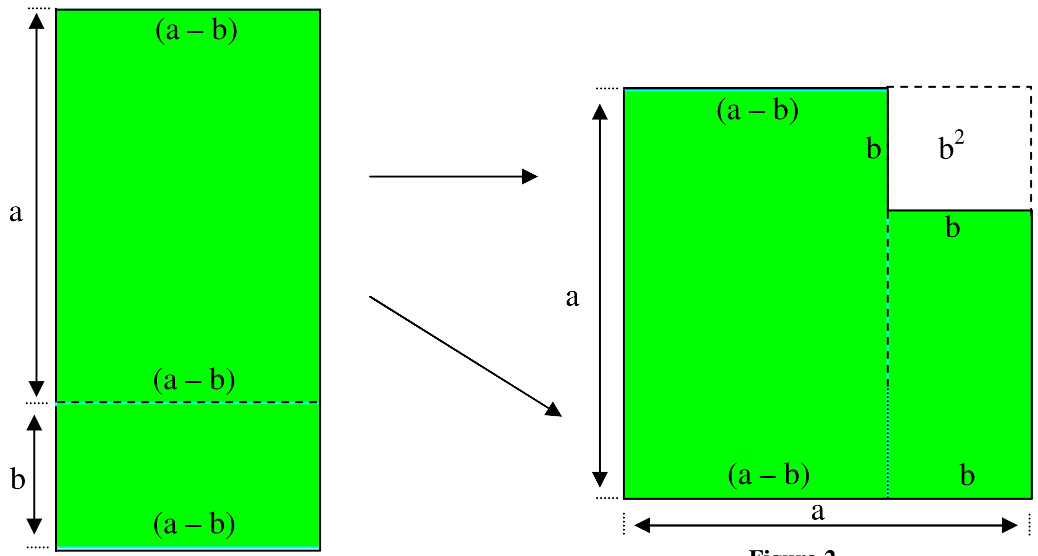


Figura 1 **Figura 2**

A área da figura 1 é indicada pelo polinômio $(a + b)(a - b)$, que expressa o **produto da soma pela sua diferença.**

Recortando a figura 1 pelo tracejado formamos uma nova figura (ver fig. 2) quando juntamos as duas partes.

Notando que a área da figura 1, expressa por (a + b) (a – b), e a área da figura 2, expressa por $a^2 - b^2$, são iguais, logo podemos escrever:

$$\underbrace{(a+b)\,(a-b)}_{\substack{\text{forma fatorada}\\ \text{do polinômio}}} = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{polinômio}}$$

- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$$(a + b)\,(a - b) = a(a - b) - b(a - b)$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - \cancel{ab} - \cancel{ab} + b^2$$

$$\mathbf{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$$

Assim podemos concluir que **o produto da soma de dois termos pela sua diferença é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.**

$$(\text{primeiro} + \text{segundo})(\text{primeiro} - \text{segundo}) = (\text{primeiro})^2 - (\text{segundo})^2$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5: Desenvolva (3x + 2y) (3x – 2y).

Resolução:

$$(3x + 2y)\,(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

Exemplo 6: Desenvolva $\left(5x^3 - \frac{1}{2}\right)\left(5x^3 + \frac{1}{2}\right)$.

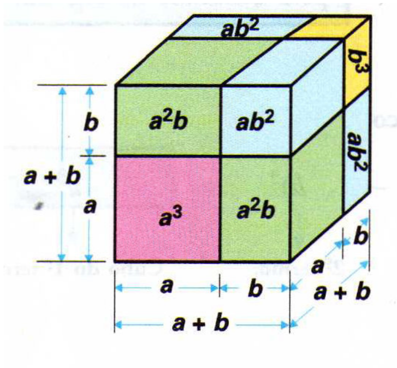
Resolução:

$$\left(5x^3 - \frac{1}{2}\right)\left(5x^3 + \frac{1}{2}\right) = \left(5x^3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25x^6 - \frac{1}{4}$$

2.4. Cubo da soma de dois termos

- **Interpretação Geométrica**

Considere um cubo de aresta a + b, como o da figura abaixo. O volume de um cubo de arestas ℓ é ℓ^3, então o volume do cubo representado pela figura é $(a + b)^3$.



Vamos separar as partes em que o cubo está dividido:

- Um cubo de aresta "a". Volume: a^3.
- Três paralelepípedos que têm arestas a, a e b. Cada paralelepípedo tem volume a^2b. O volume dos três paralelepípedos é $3a^2b$.
- Três paralelepípedos que têm arestas a, b e b. Cada paralelepípedo tem volume ab^2. O volume dos três paralelepípedos é $3ab^2$.
- Um cubo de aresta "b". Volume: b^3.

Somando todos esses volumes temos: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Como o volume do todo é igual à soma dos volumes das partes, temos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$(a + b)^3 = (a + b)\ (a + b)^2 = (a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2)$

$(a + b)^3 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Assim podemos concluir que **o cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo termo.**

$(\text{primeiro} + \text{segundo})^3 = (\text{primeiro})^3 + 3 \cdot (\text{primeiro})^2 \cdot (\text{segundo}) + 3 \cdot (\text{primeiro}) \cdot (\text{segundo})^2 + (\text{segundo})^3$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 7: Desenvolva $(a^2 + 2b)^3$.

Resolução:

$$(a^2 + 2b)^3 = (a^2)^3 + 3 \bullet (a^2)^2 \bullet 2b + 3 \bullet a^2 \bullet (2b)^2 + (2b)^3$$

$$(a^2 + 2b)^3 = a^6 + 6a^4b + 3 \bullet a^2 \bullet 4b^2 + 8b^3$$

$$(a^2 + 2b)^3 = a^6 + 6a^4b + 12a^2b^2 + 8b^3$$

Exemplo 8: Desenvolva $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^3$.

Resolução:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 3 \bullet \left(\frac{x}{2}\right)^2 \bullet \frac{y}{5} + 3 \bullet \frac{x}{2} \bullet \left(\frac{y}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^3$$

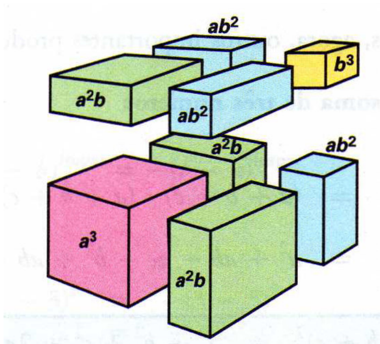
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{8} + 3 \bullet \frac{x^2}{4} \bullet \frac{y}{5} + 3 \bullet \frac{x}{2} \bullet \frac{y^2}{25} + \frac{y^3}{125}$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{3}{20}x^2y + \frac{3}{50}xy^2 + \frac{y^3}{125}$$

2.5. Cubo da diferença de dois termos

- **Interpretação Geométrica**

Considere um cubo de aresta a – b, como o da figura abaixo, então o volume do cubo representado pela figura é $(a - b)^3$.



- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$$(a - b)^3 = (a - b)\,(a - b)^2 = (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Assim podemos concluir que **o cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, menos três vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o primeiro pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo termo.**

(primeiro – segundo)^3 = (primeiro)^3 – 3 • (primeiro)^2 • (segundo) + 3 • (primeiro) • (segundo)^2 – (segundo)^3

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 9: Desenvolva $(a^2 - 3b)^3$.

Resolução:

$$(a^2 - 3b)^3 = (a^2)^3 - 3 \bullet (a^2)^2 \bullet 3b + 3 \bullet a^2 \bullet (3b)^2 - (3b)^3$$
$$(a^2 - 3b)^3 = a^6 - 9a^4b + 3a^2 \bullet 9b^2 - 27b^3$$
$$(a^2 - 3b)^3 = a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3$$

Exemplo 10: Desenvolva $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$.

Resolução:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{3}\right)^3 - 3 \bullet \left(\frac{x}{3}\right)^2 \bullet \frac{y}{2} + 3 \bullet \frac{x}{3} \bullet \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{27} - 3 \bullet \frac{x^2}{9}. \frac{y}{2} + 3 \bullet \frac{x}{2} \bullet \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{8}$$
$$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2y}{6} + \frac{3}{8}xy^2 - \frac{y^3}{8}$$

CUIDADO!!!!

$(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$

$(5 + 3)^3 \neq 5^3 + 3^3$

$8^3 \neq 125 + 27$

$512 \neq 152$

$(a - b)^3 \neq a^3 - b^3$

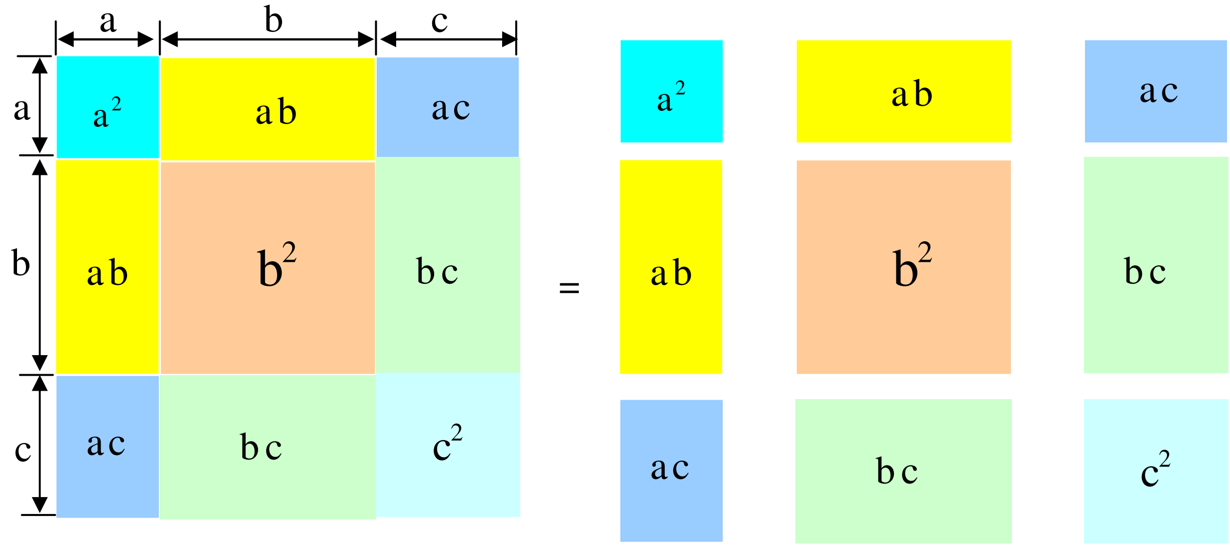
$(5 - 3)^3 \neq 5^3 - 3^3$

$2^3 \neq 125 - 27$

$8 \neq 98$

2.6. Quadrado da soma de três termos

- **Interpretação Geométrica**



Vamos separar as partes em que o quadrado de lado a + b + c está dividido:

- Um quadrado de aresta “a”. Área: a^2.
- Um quadrado de aresta “b”. Área: b^2.
- Um quadrado de aresta “c”. Área: c^2.
- Dois retângulos que têm arestas a e b. Cada retângulo tem área ab. A área dos dois retângulos é 2ab.
- Dois retângulos que têm arestas a e c. Cada retângulo tem área ac. A área dos dois retângulos é 2ac.
- Dois retângulos que têm arestas b e c. Cada retângulo tem área bc. A área dos dois retângulos é 2bc.

Somando todas essas áreas temos: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Como a área do todo é igual à soma das áreas das partes, temos:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\,(a + b + c)$$

$$(a + b + c)^2 = a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 11: Desenvolva $(x + 2y + z)^2$.

Resolução:

$$(x + 2y + z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (z)^2 + 2 \bullet x \bullet 2y + 2 \bullet x \bullet z + 2 \bullet 2y \bullet z$$
$$(x + 2y + z)^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

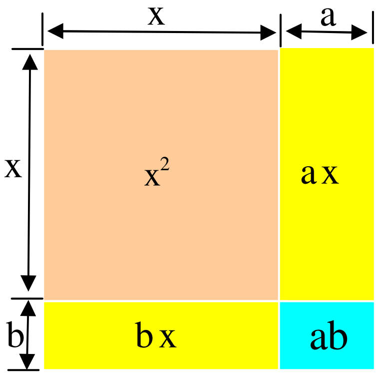
Exemplo 12: Desenvolva $(x - 2y - 3)^2$.

Resolução:

$$(x - 2y - 3)^2 = (x)^2 + (-2y)^2 + (-3)^2 + 2 \bullet x \bullet (-2y) + 2 \bullet x \bullet (-3) + 2 \bullet (-2y) \bullet (-3)$$
$$(x - 2y - 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy - 6x + 12y$$

2.7. Produto de Stevin – Produto da forma (x + a)(x + b)

- **Interpretação Geométrica**



Vamos separar as partes em que o quadrado de lado x + a está dividido:

- Um quadrado de aresta "x". Área: x^2.
- Um retângulo que têm arestas x e b. Área: bx.
- Um retângulo que têm arestas x e a. Área: ax.
- Um retângulo que têm arestas a e b. Área: ab.

Somando todas essas áreas temos: $x^2 + ax + bx + ab$. Como a área do todo é igual à soma das áreas das partes, temos:

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$
$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

- **Interpretação Algébrica**

Observe que:

$$(x + a)\ (x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (b + a)x + ab$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 13: Desenvolva $(x + 2)(x + 3)$.

Resolução:

$$(x + 2)\ (x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \bullet 3)$$

$$(x + 2)\ (x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

Exemplo 14: Desenvolva $(x - 4)(x + 7)$.

Resolução:

$$(x - 4)\ (x + 7) = x^2 + (-4 + 7)x + (-4 \bullet 7)$$

$$(x - 4)\ (x + 7) = x^2 + 3x - 28$$

Exemplo 15: Desenvolva $(x + 3)(x - 8)$.

Resolução:

$$(x + 3)\ (x - 8) = x^2 + (3 - 8)x + [3 \bullet (-8)]$$

$$(x + 3)\ (x - 8) = x^2 - 5x - 24$$

Exemplo 16: Desenvolva $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

Resolução:

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = x^2 + \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{12}\right)x - \frac{1}{6}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{6}$$

CAPÍTULO IV – Fatoração

1. Fatorando polinômios

Consideremos o número 100. Utilizando a multiplicação, podemos escrever esse número de várias maneiras:

$$100 = \begin{cases} 2 \bullet 50 \\ 4 \bullet 25 \\ 5 \bullet 20 \\ 10 \bullet 10 \\ 2^2 \bullet 5^2 \end{cases}$$

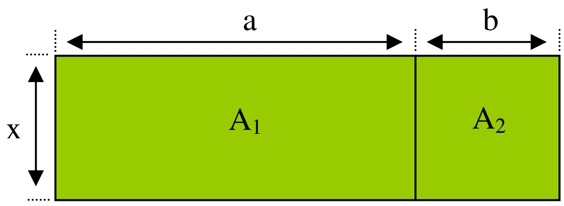
Quando escrevemos o número 100 na forma $2 \bullet 50$ ou $4 \bullet 25$ ou $5 \bullet 20$ ou $10 \bullet 10$ transformamos esse número numa multiplicação de dois fatores.

Quando escrevemos o número 100 na forma $2^2 \bullet 5^2$ transformamos esse número numa multiplicação em que todos os fatores são números primos.

Em qualquer um dos casos, fizemos a fatoração do número 100. Como a palavra fatoração está associada a uma multiplicação, podemos dizer que:

Fatorar um número significa escrevê-lo como multiplicação de dois ou mais fatores.

Com base nesses conhecimentos, consideremos a figura ao lado:



Há duas maneiras de representarmos a área dessa figura.

1ª) Área da figura 1 + área da figura 2, ou seja, ax + bx.

2ª) Fazemos *x* . *(a + b)*, pois a figura é um retângulo.

Daí podemos escrever:

$$\underbrace{ax + bx}_{\text{polinômio}} = \underbrace{x\,(a + b)}_{\text{multiplicação de polinômios}}$$

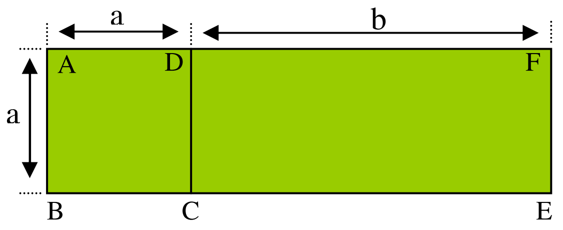
Quando escrevermos o polinômio $ax + bx$ na forma $x\ (a + b)$, estamos transformando o polinômio inicial numa multiplicação de polinômios, ou seja, estamos efetuando a fatoração do polinômio inicial. Portanto, **fatorar um polinômio, quando for possível, significa escrever esse polinômio com uma multiplicação de dois ou mais polinômios.**

2. Técnicas de fatoração

2.1. Colocação de um fator comum em evidência

Consideremos a seguinte situação:

A figura ao lado nos mostra um quadrado ABCD, um retângulo CEFD e um retângulo ABEF.



De acordo com a figura, podemos escrever:

$$\underbrace{\text{área do quadrado ABCD}}_{a^2} + \underbrace{\text{área do retângulo CEFD}}_{ab} = \underbrace{\text{área do retângulo ABEF}}_{a\,(a+b)}$$

ou seja,

$$\underbrace{a^2 + ab}_{\text{polinômio}} = \underbrace{a\,(a+b)}_{\substack{\text{forma fatorada} \\ \text{do polinômio}}}$$

Na forma fatorada, notamos que:

- a é um fator que aparece em todos os termos do polinômio e foi colocado, como fator comum, em evidência.
- o outro fator $(a + b)$ é o mesmo que $\dfrac{a^2}{a} + \dfrac{ab}{a}$.

Podemos dizer que:

Quando todos os termos de um polinômio têm um fator comum, podemos colocá-lo em evidência. A forma fatorada é o produto do fator comum pelo polinômio que se obtém dividindo-se cada termo dado pelo fator comum.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Fatore $10ax + 14ay$.

Resolução:

$10ax = 2 \bullet 5 \bullet a \bullet x$

$14ay = 2 \bullet 7 \bullet a \bullet y$

O fator comum é $2a$. Portanto:

$$10ax + 14ay = \underbrace{2a}_{\textbf{fator comum}}(5x + 7y)$$

$14ay : 2a = 7y$

$10ax : 2a = 5x$

Exemplo 2: Fatore $8a^5b^4 + 20a^2b^7 - 16a^3b^5$.

Resolução:

$8a^5b^4 = 2^3 \bullet a^5 \bullet b^4$

$20a^2b^7 = 2^2 \bullet 5 \bullet a^2 \bullet b^7$

$16a^3b^5 = 2^4 \bullet a^3 \bullet b^5$

O fator comum é $2^2 \bullet a^2 \bullet b^4 = 4a^2b^4$. Portanto:

$$8a^5b^4 + 20a^2b^7 - 16a^3b^5 = \underbrace{4a^2b^4}_{\textbf{fator comum}}(2a^3 + 5b^3 - 4ab)$$

$8a^5b^4 : 4a^2b^4 = 2a^3$

$20a^2b^7 : 4a^2b^4 = 5b^3$

$16a^3b^5 : 4a^2b^4 = 4ab$

Exemplo 3: Fatore $7a^3b^2 - 5a^2b^4 + 2ab^5$.

Resolução:

O fator comum é ab^2. Portanto:

$$7a^3b^2 - 5a^2b^4 + 2ab^5 = \underbrace{ab^2}_{\textbf{fator comum}}(7a^2 - 5ab^2 + 2b^3)$$

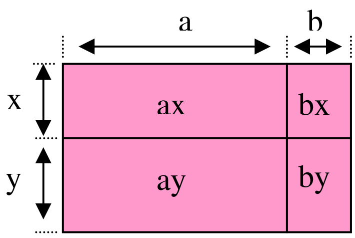
$7a^3b^2 : ab^2 = 7a^2$

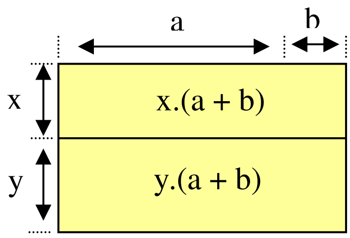
$5a^2b^4 : ab^2 = 5ab^2$

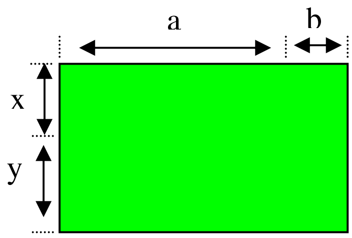
$2ab^5 : ab^2 = 2b^3$

2.2. Agrupamento

Observe as 3 figuras seguintes:







A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio $ax + bx + ay + by$.

A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio $x(a + b) + y(a + b)$.

A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio $(a + b)\,(x + y)$.

Como as três figuras têm a mesma área, podemos escrever:

$$\underbrace{ax + bx + ay + by}_{\text{polinômio}} = x(a + b) + y(a + b) = \underbrace{(a + b)\,(x + y)}_{\substack{\text{forma fatorada} \\ \text{do polinômio}}}$$

Vejamos como podemos fazer algebricamente para escrever o polinômio $ax + bx + ay + by$ na forma fatorada:

$\underbrace{ax + bx} + \underbrace{ay + by} \longrightarrow$ Agrupamos os termos que possuem fator comum

$x\,(a + b) + y\,(a + b) \longrightarrow$ Em cada grupo colocamos os fatores comuns em evidência

$(a + b)\,(x + y) \longrightarrow$ Colocamos, novamente, em evidência o fator comum.

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 4: Fatore o polinômio $ax + bx + ay + by$.

Resolução:

$ax + bx + ay + by$

$= x(a + b) + y(a + b)$

$= (a + b)\,(x + y)$

Exemplo 5: Fatore o polinômio ab – ac + 2b – 2c.

Resolução:

$ab - ac + 2b - 2c$

$= a(b - c) + 2(b - c)$

$= (b - c)\,(a + 2)$

Exemplo 6: Fatore o polinômio $x^3 + x^2 + x + 1$.

Resolução:

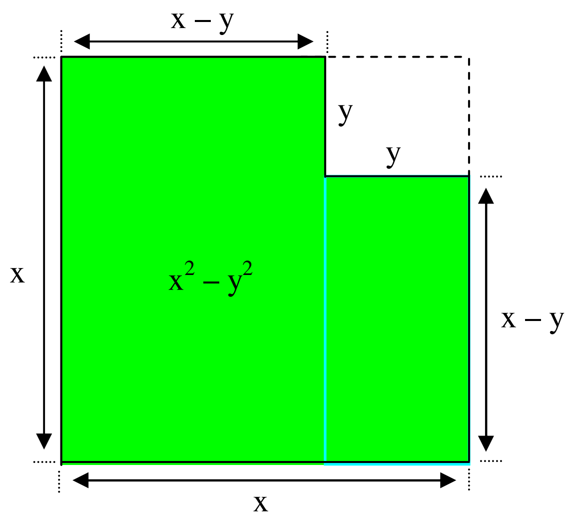
$x^3 + x^2 + x + 1$

$= x^2\,(x + 1) + 1(x + 1)$

$= (x + 1)\,(x^2 + 1)$

2.3. Diferença de dois quadrados

Consideremos a figura abaixo:



A área da figura pintada acima pode ser indicada pelo polinômio $x^2 - y^2$, que expressa uma **diferença de dois quadrados.**

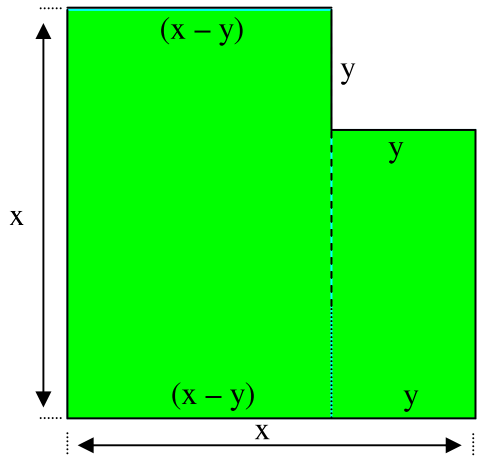


Figura 1

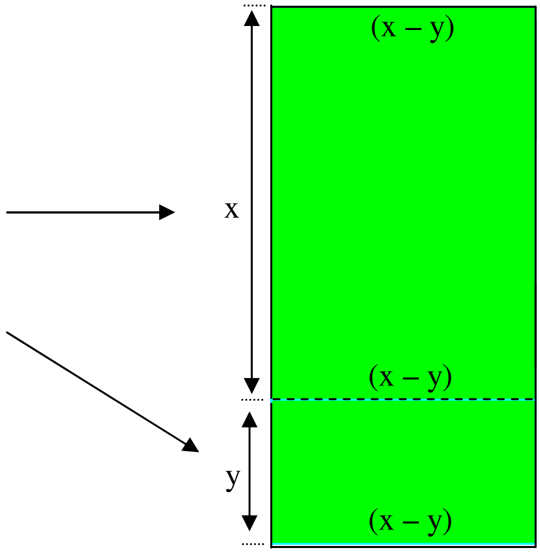


Figura 2

Recortando a figura (ver fig. 1) pelo tracejado formamos uma nova figura (ver fig. 2) quando juntamos as duas partes:

Notando que a área da figura 1, expressa por $x^2 - y^2$, e a área da figura 2, expressa por $(x + y)\,(x - y)$, são iguais, logo podemos escrever:

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x + y)\,(x - y)}_{\substack{\text{forma fatorada}\\ \text{do polinômio}}}$$

Na forma fatorada, você observa que:

$x = \sqrt{x^2} \longrightarrow$ raiz quadrada do 1º termo do polinômio

$y = \sqrt{y^2} \longrightarrow$ raiz quadrada do 2º termo do polinômio

Então: $x^2 - y^2 = (\underset{\sqrt{x^2}}{\underline{x}} + \underset{\sqrt{y^2}}{\underline{y}})\;(\underset{\sqrt{x^2}}{\underline{x}} + \underset{\sqrt{y^2}}{\underline{y}})$

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 7: Fatore $x^2 - 49$.

Resolução:

$\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{49} = 7$

Então:

$x^2 - 49 = (x + 7)\,(x - 7)$

Exemplo 8: Fatore $4a^2 - 25b^2$.

Resolução:

$\sqrt{4a^2} = 2a$ e $\sqrt{25b^2} = 5b$

Então:

$4a^2 - 25b^2 = (2a + 5b)\,(2a - 5b)$

Exemplo 9: Fatore $(n + 5)^2 - 1$.

Resolução:

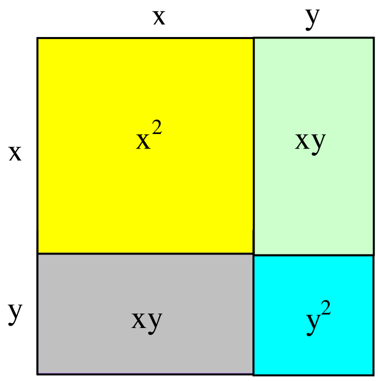
$\sqrt{(n+5)^2} = n + 5$ e $\sqrt{1} = 1$

Então:

$(n + 5)^2 - 1 = (n + 5 + 1)\,(n + 5 - 1) = (n + 6)\,(n + 4)$

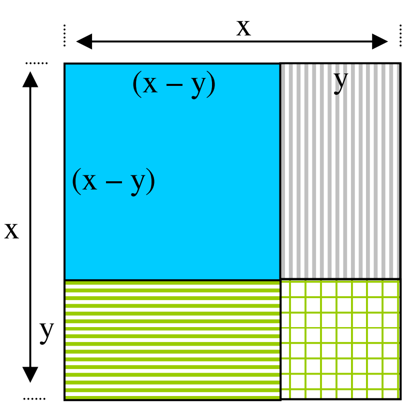
2.4. Trinômio quadrado perfeito

Vamos considerar as figuras seguintes, que já vimos e estudamos.



A figura representa um quadrado cujo lado mede (x + y) unidades de comprimento. A área da figura pode ser indicada de duas maneiras:

$x^2 + 2xy + y^2$ ou $(x + y)^2$



A figura pintada representa um quadrado cujo lado mede (x – y) unidades de comprimento. A área da figura hachurada horizontalmente é xy, e a área da figura verticalmente também é xy. A área da figura com hachura quadriculada é y^2, e é comum a outras duas áreas hachuradas. A área da figura pintada é:

$x^2 - 2xy + y^2$ ou $(x - y)^2$

Então, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = (x + y)\,(x + y) = \underbrace{(x + y)^2}_{\substack{\text{forma fatorada}\\ \text{do polinômio}}}$$

$$\underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = (x - y)\,(x - y) = \underbrace{(x - y)^2}_{\substack{\text{forma fatorada}\\ \text{do polinômio}}}$$

Os polinômios $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são chamados **trinômios quadrados perfeitos.** Trinômios porque possuem três termos, quadrados perfeitos porque o primeiro representa o quadrado de $(x + y)$, enquanto o segundo representa o quadrado de $(x - y)$.

Nem todos os trinômios são quadrados perfeitos. É importante reconhecer se um trinômio é ou não quadrado perfeito.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 10: Fatore $x^2 + 8xy + 16y^2$.

Resolução:

Inicialmente, verificamos se dois termos do trinômio são quadrados. Neste caso, x^2 e $16y^2$ são quadrados.

A seguir, determinamos a raiz quadrada de cada termo quadrado:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \text{e} \qquad \sqrt{16y^2} = 4y$$

Finalmente, multiplicamos por 2 o produto das raízes para verificar se o resultado é igual ao termo restante: $2 \bullet x \bullet 4y = 8xy$

Como, neste caso, o termo é justamente 8xy, dizemos que o trinômio é quadrado perfeito.

Então sua forma fatorada é:

$$x^2 + 8xy + 16y^2 = (x + 4y)^2$$

Exemplo 11: Fatore $16x^2 - 24x + 25$.

Resolução:

$16x^2$ e 25 são termos quadrados.

$$\sqrt{16x^2} = 4x \qquad \text{e} \qquad \sqrt{25} = 5$$

$2 \bullet 4x \bullet 5 = 40x$, não corresponde ao termo restante do trinômio.

Logo, $16x^2 - 24x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

2.5. Trinômio do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P$

Vimos que:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

Indicando $a + b = S$ e $a \cdot b = P$, teremos:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + Sx + P$$

Então, para fatorar um polinômio do tipo $x^2 + Sx + P$, devemos procurar dois números inteiros, **a** e **b**, tais que $a + b = S$ e $a \cdot b = P$ e montar o produto $(x + a)(x + b)$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 12: Fatore $x^2 + 5x + 6$.

Resolução:

Temos $S = 5$ e $P = 6$.

Como o produto é positivo, os dois números têm o mesmo sinal.

Como a soma é positiva, os dois números serão positivos.

Os números procurados são 2 e 3, pois $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$.

Portanto, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Exemplo 13: Fatore $x^2 - 5x + 6$.

Resolução:

Temos $S = -5$ e $P = 6$.

Como o produto é positivo, os dois números têm o mesmo sinal.

Como a soma é negativa, os dois números serão positivos.

Os números procurados são -2 e -3, pois $(-2) + (-3) = -5$ e $(-2) \cdot (-3) = 6$.

Portanto, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Exemplo 14: Fatore $m^2 + 2m - 8$.

Resolução:

Temos $S = 2$ e $P = -8$.

Como o produto é negativo, os dois números têm sinais contrários.

Como a soma é positiva, o número de maior valor absoluto é positivo.

Os números procurados são 4 e -2, pois $4 - 2 = 2$ e $4 \cdot (-2) = -8$.

Portanto, $m^2 + 2m - 8 = (m + 4)(m - 2)$.

Exemplo 15: Fatore $y^2 - 2y - 8$.

Resolução:

Temos S = –2 e P = –8.

Como o produto é negativo, os dois números têm sinais contrários.

Como a soma é negativa, o número de maior valor absoluto é negativo.

Os números procurados são –4 e 2, pois $-4 + 2 = -2$ e $(-4) \cdot 2 = -8$.

Portanto, $y^2 - 2y - 8 = (y - 4)(y + 2)$.

2.6. Soma de dois cubos

A expressão $a^3 + b^3$ representa a soma de dois cubos, a^3 e b^3.

Vamos obter a forma fatorada de $a^3 + b^3$ partindo do desenvolvimento de $(a + b)^3$.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\,[(a + b)^2 - 3ab]$$
$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)}$$

Exemplo 16: Fatore $m^3 + 27$.

Resolução:

$\sqrt[3]{m^3} = m$ e $\sqrt[3]{27} = 3$

Então:

$m^3 + 27 = (m + 3)\,(m^2 - 3m + 9)$

Exemplo 17: Fatore $8x^3 + 27$.

Resolução:

$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$ e $\sqrt[3]{27} = 3$

Então:

$8x^3 + 27 = (2x + 3)\,(4x^2 - 6x + 9)$

2.7. Diferença de dois cubos

A expressão $a^3 - b^3$ representa a soma de dois cubos, a^3 e b^3.

Vamos obter a forma fatorada de $a^3 - b^3$ partindo do desenvolvimento de $(a - b)^3$.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)}$$

Exemplo 18: Fatore $m^3 - 27 =$

Resolução:

$$\sqrt[3]{m^3} = m \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

Então:

$$m^3 - 27 = (m - 3)\,(m^2 + 3m + 9)$$

Exemplo 19: Fatore $a^3 - \frac{1}{8} =$

Resolução:

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Então:

$$a^3 - \frac{1}{8} = \left(a - \frac{1}{8}\right)\left(a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

CAPÍTULO V – Frações Algébricas

1. Introdução

Antes de iniciarmos o estudo das frações algébricas, vamos aprender a calcular o máximo divisor comum (mdc) e o mínimo múltiplo comum (mmc) de monômios e de polinômios.

Para calcular o mdc e o mmc de números naturais, usamos a técnica da decomposição em fatores primos.

Por exemplo, seja determinar o mdc e o mmc dos números 60 e 126.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Portanto: $60 = 2^2 \bullet 3 \bullet 5$ e $126 = 2 \bullet 3^2 \bullet 7$

Como:

a) O mdc dos números dados é o produto dos fatores comuns, tomados cada um com seu menor expoente, temos:

$\text{mdc}\ (60, 126) = 2 \bullet 3 = 6$

b) O mmc dos números dados é o produto dos fatores comuns e não comuns, tomados cada um com seu maior expoente, temos:

$\text{mmc}\ (60, 126) = 2^2 \bullet 3^2 \bullet 5 \bullet 7 = 1\ 260$

A mesma técnica é aplicada no cálculo do mdc e do mmc de polinômios.

2. MDC e MMC de monômios

Exemplo 1: Determinar o mdc e o mmc dos monômios $10a^2b$ e $15a^3b^4$.

Resolução:

$10a^2b = 2 \bullet 5 \bullet a^2 \bullet b$

$15a^3b^4 = 3 \bullet 5 \bullet a^3 \bullet b^4$

mdc $= 5 \bullet a^2 \bullet b = 5a^2b$

mmc $= 2 \bullet 3 \bullet 5 \bullet a^3 \bullet b^4 = 30a^3b^4$

Exemplo 2: Determinar o mdc e o mmc dos monômios $8x^3y$, $12axy^3$ e $24a^2x^2$.

Resolução:

$8x^3y = 2^3 \cdot x^3 \cdot y$

$12axy^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot x \cdot y^3$

$24a^2x^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot x^2$

mdc $= 2^2 \cdot x = 4x$

mmc $= 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot x^3 \cdot y^3 = 24a^2x^3y^3$

3. MDC e MMC de polinômios

Para determinar o mdc e o mmc entre dois ou mais polinômios, devemos proceder da seguinte maneira:

- fatoramos os polinômios;
- determinamos o mdc e o mmc, como fizemos anteriormente com os números naturais.

Exemplo 3: Determinar o mdc e o mmc dos polinômios $4x^2$ e $6x^2 - 12x$.

Resolução:

$4x^2 = 2^2 \cdot x^2$

$6x^2 - 12x = 6x(x - 2) = 2 \cdot 3x(x - 2)$

mdc $= 2 \cdot x = 2x$

mmc $= 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 . (x - 2) = 12x^2(x - 2)$

Exemplo 4: Determinar o mdc e o mmc dos monômios $x^2 - 4$ e $x^2 + 2x$.

Resolução:

$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + 2x = x(x + 2)$

mdc $= x + 2$

mmc $= x(x + 2)(x - 2)$

Exemplo 5: Determinar o mdc e o mmc das expressões $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ e $3a + 3b$.

Resolução:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$3a + 3b = 3(a + b)$

mdc $= a + b$

mmc $= 2(a + b)^2(a - b)$

4. Fração Algébrica

Sabemos que o quociente de dois números reais, com o segundo diferente de zero, pode ser escrito na forma fracionária:

$2 : 3 = \frac{2}{3}$ $\left(-\sqrt{3}\right) : 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como todo polinômio representa número real, podemos representar o quociente de dois polinômios, com o segundo diferente de zero, da mesma forma, isto é:

$(-2ax) : 3y$ pode ser escrito na forma $\frac{-2ax}{3y}$

$(a^3 - 1) : (a - 1)$ pode ser escrito na forma $\frac{a^3 - 1}{a - 1}$

Um quociente de dois polinômios, escrito na forma fracionária, denomina-se fração algébrica.

Assim, são frações algébricas:

$\frac{ax}{2y}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{numerador} \\ \longrightarrow \text{denominado} \end{matrix}$ $\frac{a^2 - b^2}{5a}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{numerador} \\ \longrightarrow \text{denominado} \end{matrix}$

Observações:

a) Os denominadores das frações algébricas devem representar um número real diferente de zero, pois não tem sentido dividir por zero.

b) Quando o numerador e o denominador são polinômios não-nulos iguais, a fração é igual a 1.

Exemplos: $\frac{2ax}{2ax} = 1$, $\frac{x - 3}{x - 3} = 1$, $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$

c) Quando o numerador for divisível pelo denominador, a fração algébrica é igual a um monômio ou polinômio.

Exemplos: $\frac{15xy}{3y} = 5x$, $\frac{a^2 + ab}{a} = a + b$, $\frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3} = x - 2$

5. Propriedade

Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração algébrica por um mesmo número real, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração dada.

Exemplos:

$$\frac{2a}{3b} = \frac{2a\ .\ 2}{3b\ .\ 2} = \frac{4a}{6b} \qquad \rightarrow \qquad \frac{2a}{3b} = \frac{4a}{6b}$$

$$\frac{12x^2}{9y} = \frac{12x^2 : 3}{9y : 3} = \frac{4x^2}{3y} \qquad \rightarrow \qquad \frac{12x^2}{9y} = \frac{4x^2}{3y}$$

Por esta propriedade, podemos mudar os sinais dos dois termos de uma fração algébrica, o que significa multiplicar os dois termos por –1.

Exemplos:

$$\frac{a}{-3b} = \frac{-a}{3b} \qquad\qquad \frac{a-x}{-x} = \frac{-a+x}{x} = \frac{x-a}{x}$$

6. Simplificação de frações algébricas

Recordemos a simplificação de frações numéricas (6º ano):

$$\frac{18}{24} = \frac{18 : 2}{24 : 2} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$$

Podemos, também, fatorar convenientemente os termos da fração, para destacar is fatores comuns:

$$\frac{18}{24} = \underbrace{\frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}}_{\text{cancelando os fatores comuns}} = \frac{3}{4}$$

Para simplificar as frações algébricas, procedemos da mesma maneira, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 6: Simplificar a fração $\frac{10ax^2}{15a^3x}$ (com o denominador $\neq 0$)

Resolução: Fatorando os termos da fração, temos:

$$\frac{10ax^2}{15a^3x} = \frac{2 \bullet 5 \bullet a \bullet x \bullet x}{3 \bullet 5 \bullet a \bullet a \bullet a \bullet x} = \frac{2 \bullet \cancel{5} \bullet \cancel{a} \bullet \cancel{x} \bullet x}{3 \bullet \cancel{5} \bullet \cancel{a} \bullet a \bullet a \bullet \cancel{x}} = \frac{2x}{3a^2}$$

Exemplo 7: Simplificar a fração $\frac{x^2 + x}{ax}$ (com o denominador $\neq 0$)

Resolução: Fatorando os termos da fração, temos:

$$\frac{x^2 + x}{ax} = \frac{x(x+1)}{ax} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{a\cancel{x}} = \frac{(x+1)}{a}$$

Exemplo 8: Simplificar a fração $\frac{ab + ac}{b^2 - c^2}$ (com o denominador $\neq 0$)

Resolução: Fatorando os termos da fração, temos:

$$\frac{ab + ac}{b^2 - c^2} = \frac{a(b+c)}{(b+c)(b-c)} = \frac{a\,\cancel{(b+c)}}{\cancel{(b+c)}\,(b-c)} = \frac{a}{b-c}$$

Observação:

A simplificação de uma fração algébrica não pode ser feita da forma:

$\frac{x + \cancel{3}}{\cancel{3}}$, pois **3** não representa um fator, no caso; ou

$\frac{\cancel{a} + x}{\cancel{a} - y}$, pois **a** não representa um fator, no caso.

7. Adição e Subtração de frações algébricas

Recordando: Seja determinar a soma $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8 + 15 - 10}{20} = \frac{13}{20}$

Para a adição e subtração de frações algébricas, procedemos da mesma maneira, conforme veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 9: Determinar a soma $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - 1$.

Resolução:

Primeiramente reduzimos as frações ao mesmo denominador e em seguida procedemos como no caso anterior.

mmc (x, y) = xy

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - 1 = \frac{y}{xy} + \frac{2x}{xy} - \frac{xy}{xy} = \frac{y + 2x - xy}{xy}$$

Exemplo 10: Determinar a soma $\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{x}$.

Resolução:

mmc ($3x^2$, x) = $3x^2$

$$\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{x} = \frac{2}{3x^2} - \frac{12x}{3x^2} = \frac{2 - 12x}{3x^2}$$

Exemplo 11: Determinar a soma $\frac{x}{x - y} + \frac{1}{x + y} + \frac{y - x}{x^2 - y^2}$

Resolução:

$x - y$ $\qquad$ $x + y$ $\qquad$ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

mmc = (x + y)(x – y)

Então:

$$\frac{x}{x - y} + \frac{1}{x + y} + \frac{y - x}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{x(x + y)}{(x + y)(x - y)} + \frac{1(x - y)}{(x + y)(x - y)} + \frac{y - x}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x(x + y) + x - y + y - x}{(x + y)(x - y)} = \frac{x(x + y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{x}{x - y}$$

Observação:

Ao final da operação, é sempre conveniente simplificar o resultado obtido, quando for possível.

8. Multiplicação de frações algébricas

Sejam os produtos:

$$\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\underbrace{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{2}} \bullet \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{15}_{5}}}_{\text{cancelando os fatores comuns}} = \frac{1}{10}$$

Para a multiplicação de frações algébricas, utilizaremos a mesma técnica da multiplicação das frações aritméticas. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 12: Determinar o produto $\frac{x+3}{x} \bullet \frac{x-2}{3x}$.

Resolução:

$$\frac{x+3}{x} \bullet \frac{x-2}{3x} = \frac{(x+3)(x-2)}{x \bullet 3x} = \frac{x^2+x-6}{3x^2}$$

Exemplo 13: Determinar o produto $\frac{a}{5b} \bullet \frac{5c}{a}$.

Resolução:

$$\frac{a}{5b} \bullet \frac{5c}{a} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{5}b} \bullet \frac{\cancel{5}c}{\cancel{a}} = \frac{c}{b}$$

Exemplo 14: Determinar o produto $\frac{2xy}{x^2-y^2} \bullet \frac{3x+3y}{2y}$

Resolução:

$$\frac{2xy}{x^2-y^2} \bullet \frac{3x+3y}{2y} = \frac{2xy}{(x+y)(x-y)} \bullet \frac{3(x+y)}{2y} = \frac{\cancel{2}x\cancel{y}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} \bullet \frac{3\cancel{(x+y)}}{\cancel{2y}} = \frac{3x}{x-y}$$

9. Divisão de frações algébricas

Efetuando a divisão $\frac{5}{9} : \frac{10}{3}$, temos:

$$\frac{5}{9} : \frac{10}{3} = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{9}_{3}} \bullet \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{10}_{2}} = \frac{1}{6}$$

Para a divisão de frações algébricas, vamos proceder da mesma maneira, isto é, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 15: Determinar o quociente $\frac{a^2}{5b} : \frac{2a}{b}$

Resolução:

$$\frac{a^2}{5b} : \frac{2a}{b} = \frac{a^2}{5b} \bullet \frac{b}{2a} = \frac{\cancel{a^2}^{\,a}}{5\cancel{b}} \bullet \frac{\cancel{b}}{2\cancel{a}} = \frac{a}{10}$$

Exemplo 16: Determinar o quociente $\frac{a^2 - b^2}{xy} : \frac{2a + 2b}{x}$

Resolução:

$$\frac{a^2 - b^2}{xy} : \frac{2a + 2b}{x} = \frac{a^2 - b^2}{xy} \bullet \frac{x}{2a + 2b} = \frac{(a+b)(a-b)}{xy} \bullet \frac{x}{2(a+b)} =$$

$$= \frac{\cancel{(a+b)}\,(a-b)}{\cancel{x}y} \bullet \frac{\cancel{x}}{2\,\cancel{(a+b)}} = \frac{a-b}{2y}$$

10. Potenciação de frações algébricas

Como revisão, observemos as potências:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Para elevar uma fração algébrica a uma potência adotamos o mesmo procedimento utilizado para os números racionais, isto, elevamos o numerador e o denominador à potência indicada.

Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 17: $\left(\frac{2x}{3y^2}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{(3y^2)^2} = \frac{4x^2}{9y^4}$

Exemplo 18: $\left(\frac{x}{x-y}\right)^2 = \frac{(x)^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{x^2 - 2xy + y^2}$

Exemplo 19: $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-1} = \frac{b^2}{a}$

Exemplo 20: $\left(\frac{m^2n^3}{p^4}\right)^{-2} = \left(\frac{p^4}{m^2n^3}\right)^2 = \frac{(p^4)^2}{(m^2n^3)^2} = \frac{p^8}{m^4n^6}$

Referências Bibliográficas

BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. **Matemática 1.** 1.ed. São Paulo: Moderna, 2004.

BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. **Matemática 2 Versão Beta.** 2.e.d São Paulo: Moderna, 1995.

GIOVANNI e CASTRUCCI. **A conquista da Matemática.** s.e. São Paulo: FTD, 1990.

GIOVANNI, José Ruy. **Aprendizagem e Educação Matemática – 7ª série.** s.e. São Paulo: FTD, 1990.

GIOVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto. **Matemática: Uma nova abordagem, vol. 2.** s.e. São Paulo: FTD, 2000.

IEZZI, Gelson e OUTROS. **Matemática e Realidade – 8ª série.** 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

IEZZI, Gelson E OUTROS. **Matemática e Realidade – 8ª série.** 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 1991.

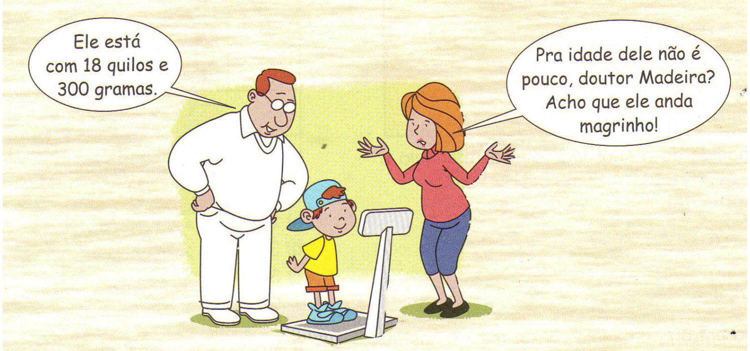
JAKUBOVIC, José E OUTROS. **Matemática na medida certa – 7ª série.** 6.ed. São Paulo: Scipione, 1999.

NAME, Miguel Assis. **Vencendo com a Matemática - 7ª série**. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2005.

REIS, Ismael. **Fundamentos da Matemática – 7ª série.** 1.ed. São Paulo: Moderna, 1996.

SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. **Matemática -7ª série**.1.ed. São Paulo: Moderna, 1995.

Anexo I
A Álgebra vai ao médico



As mães estão sempre preocupadas com seus filhos. Por isso, o doutor Madeira começa mostrando esta fórmula:

$p = 2i + 8$

O menino tem 5 anos e meio de idade. Seu peso deve ser:

$p = 2 \bullet 5{,}5 + 8 = 11 + 8 = 19$

Em seguida, o doutor explica:

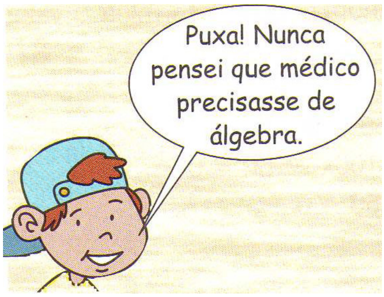
– Para essa idade, a fórmula aponta um peso médio de 19 kg. Ele está só com um pouquinho menos, 18,3 kg. Pode ficar tranquila.

O doutor Madeira é pediatra. É por isso que ele usou essa fórmula, que relaciona peso e idade. É uma fórmula que funciona para crianças. Veja só o absurdo que daria se aplicássemos a fórmula para um adulto de 60 anos.

$p = 2 \bullet 60 + 8 = 128$

Além da fórmula que vimos, os médicos podem usar mais álgebra no seu trabalho diário.

Veja outra fórmula que o doutor Madeira usa: $a = 95 + 6(i - 3)$



Essa fórmula dá a altura **a** de uma criança, medida em centímetros, de acordo com a idade **i**, em anos. Faça uma experiência: pegue a primeira fórmula, a do peso, e coloque no lugar de **i** a sua idade. Compare o resultado obtido com seu peso real.

Depois, faça outra experiência com a fórmula da altura. Será que deu a sua altura? Ou será que a fórmula não se aplica, porque você não é mais criança?

Fonte: Imenes, Jakubo e Lelis. *Álgebra.* São Paulo: Atual. Coleção Pra que serve a Matemática?

Anexo II
Índice de massa corporal

Você sabe o que é IMC (índice de massa corporal)?

O IMC é um índice que relaciona a massa e a altura de um indivíduo. Esse índice é usado pela OMS (Organização Mundial da Saúde), para verificar se as pessoas são subnutridas, obesas etc.

Para obter esse índice, basta dividir a massa do indivíduo (em quilos) pelo quadrado da altura (em metros). Assim, o IMC é dado pela razão:

$$IMC = \frac{massa}{(altura)^2}$$

Vamos calcular, como exemplo, o IMC de uma pessoa que tem 60 kg e 1,70 m de altura. Aplicando os valores à fórmula do IMC, temos:

$$IMC = \frac{60}{(1{,}70)^2} = \frac{60}{2{,}89} = 20{,}8$$

A OMS estabeleceu alguns critérios para avaliar a condição dos indivíduos, definindo inclusive o IMC ideal.

Esses critérios são os seguintes:

O IMC ideal está entre 18,5 e 25

- abaixo de 18,5 → desnutrição
- de 25 a 30 → acima do peso
- acima de 30 → obesidade

Portanto, de acordo com os critérios estabelecidos pela OMS, a pessoa do nosso exemplo tem um IMC na faixa ideal.

Veja os dados de uma pesquisa feita pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) junto a uma população de brasileiros com 20 anos de idade ou mais:

	Homens	Mulheres
População na faixa de peso ideal	47,2%	41,7%
Acima do peso ideal	41,1%	40%
Obesos	8,9%	13,1%
Desnutridos	2,8%	5,2%

Fonte: PESQUISA de Orçamentos Familiares, 2002-2003. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em 18 ago. 2005.

Agora é com você! Que tal calcular seu IMC?

- Utilize uma trena ou fita métrica para medir sua altura em metros, e uma balança para determinar sua massa em quilos.
- Observando o exemplo anterior, determine seu IMC e verifique se ele está na faixa considerada ideal.

Fonte: Maria José C. V. Zampirolo. *Do micro ao macro.* São Paulo: Ed. Brasil. (Coleção Projeto Escola e Cidadania)