Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Toledo

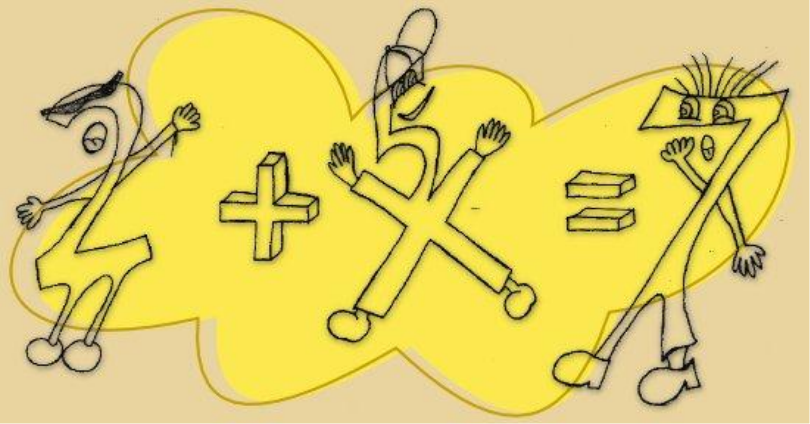
Introdução ao ensino de álgebra: relações, sequências e regularidades, símbolos e expressões algébricas.

Profª. MSc. Adriana Camila Braga
Profª. MSc. Dione Ines Christ Milani
Profª. MSc. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

A proposta do curso...

Atividades de apoio

Pensar sobre como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.



Álgebra e pensamento algébrico

Álgebra da antiguidade ao presente

- Podemos dizer que as origens da Álgebra situam-se na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas que já são usadas na Antiguidade – no Egito, na Babilônia, na China e na Índia.

Álgebra da antiguidade ao presente

- Diofanto (aproximadamente século III a.c.) considerado por alguns o fundador da Álgebra, desenvolveu diversos métodos para a resolução de equações e sistemas de equações. O termo "Álgebra" só surge alguns séculos mais tarde, num trabalho de al-Khwarizmi (790-840), para designar a operação de "transposição de termos", essencial na resolução de uma equação.

Álgebra da antiguidade ao presente

- No século XVI, com François Viéte (1540-1603), dá-se uma transformação fundamental, entrando-se numa nova etapa, a da Álgebra simbólica.

Álgebra da antiguidade ao presente

- Scipione del Ferro (1465-1526) quem primeiro consegue resolver a equação geral do 3º grau, mas não publica.
- A mesma descoberta é feita igualmente por Tartaglia (1500-1557) e publicada por Cardano (1501-1576). Ferrari (1522-1565) resolveu a equação geral do 4º grau.

Álgebra da antiguidade ao presente

- Albert Girard (1595-1632), em 1629 foi o primeiro matemático a afirmar que equações de grau “n” tem sempre “n” soluções. Este teorema, atualmente designado como Teorema Fundamental da Álgebra, tem diversas propostas de demonstração, todas elas refutadas, numa história muito interessante em que intervem matemáticos famosos como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) d’Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Finalmente, a demonstração é feita de modo satisfatório por Argand (1768-1822) e por Gauss (1777-1855).

Álgebra da antiguidade ao presente

- Dois importantes resultados marcam a etapa final do desenvolvimento da teoria das equações algébricas, encerrando o que podemos designar por período da “Álgebra Clássica”.

Álgebra da antiguidade ao presente

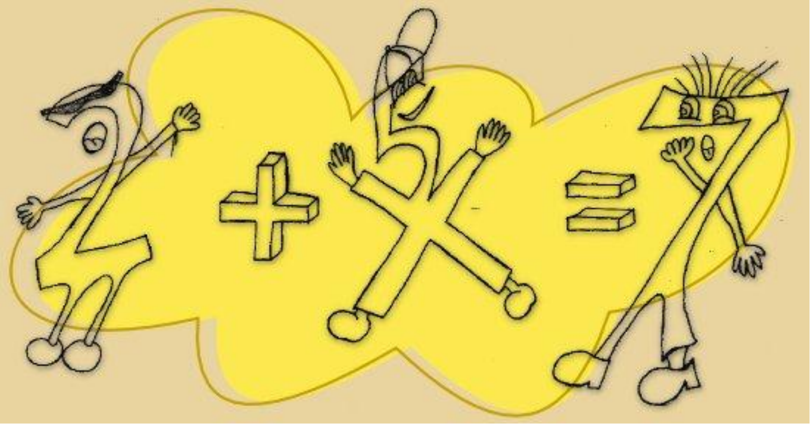
- O primeiro resultado é prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4º, dada por Abel(1802-1829).

Álgebra da antiguidade ao presente

- O segundo é a formulação das condições necessárias e suficientes para uma equação de grau superior ao 4º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811-1832).

Álgebra da antiguidade ao presente

- A partir de meados do século XIX a Álgebra conhece uma evolução profunda. A atenção dos matemáticos volta-se ao estudo de estruturas abstratas como grupo, espaço vetorial, anel e corpo, temas que passam a constituir o núcleo central da “Álgebra moderna”.



Pensamento algébrico...

Década de 80 do século passado

De *Álgebra, o* que se ensina na escola ?

Interesse em caracterizar o *pensamento algébrico*

O que é o pensamento algébrico?

O pensamento algébrico diz respeito ao estudo das **estruturas**, à **simbolização**, à **modelação** e ao **estudo da variação**:

- Compreender padrões, relações e funções,
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos,
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas,
- Analisar a variação em diversos contextos.

ME-DGIDC, 2009

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) os caracterizadores do pensamento algébrico são:

- percepção de regularidades,
- percepção de aspectos invariantes em contraste com os que não variam,
- tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.

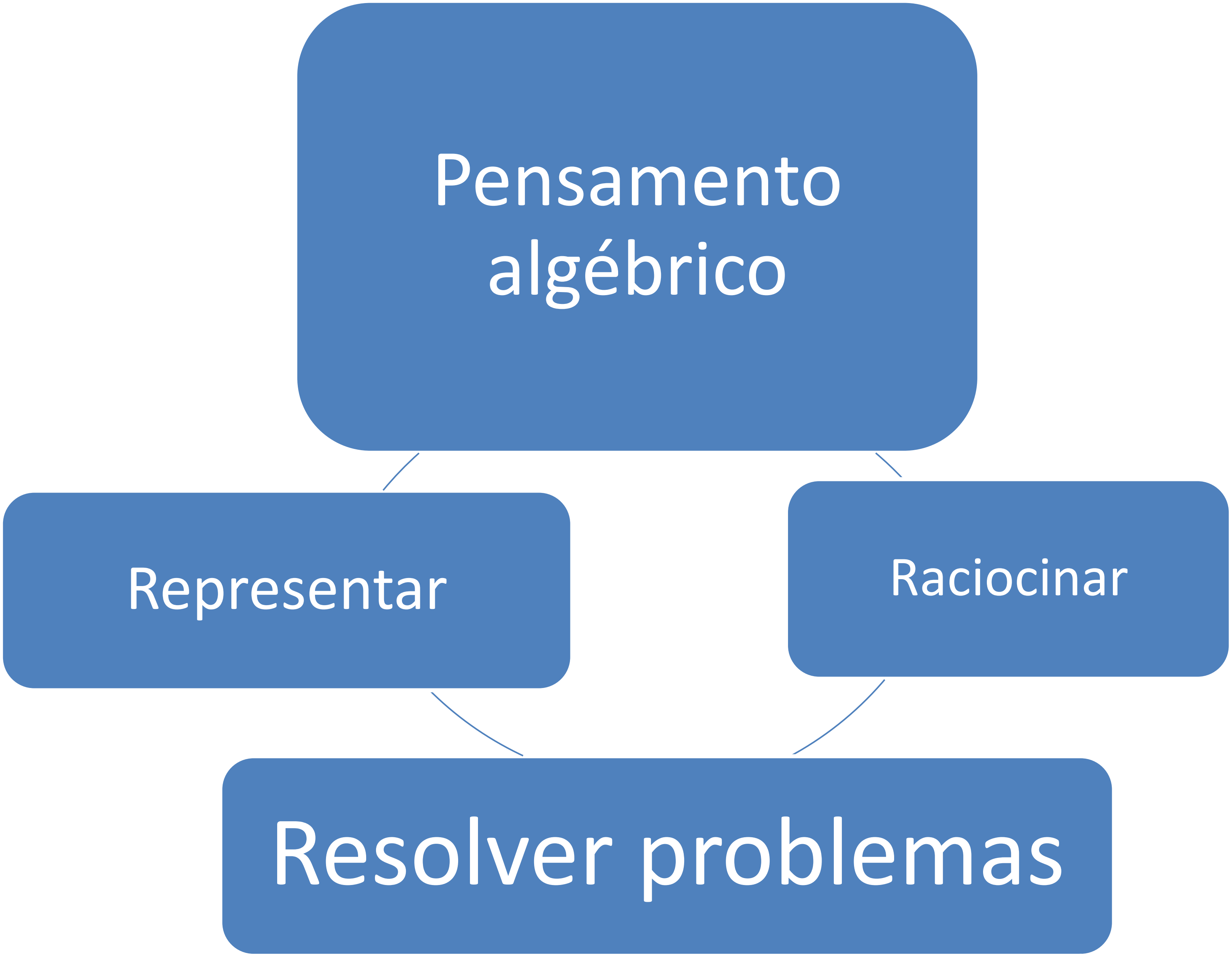
O que o professor pode fazer para favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico???

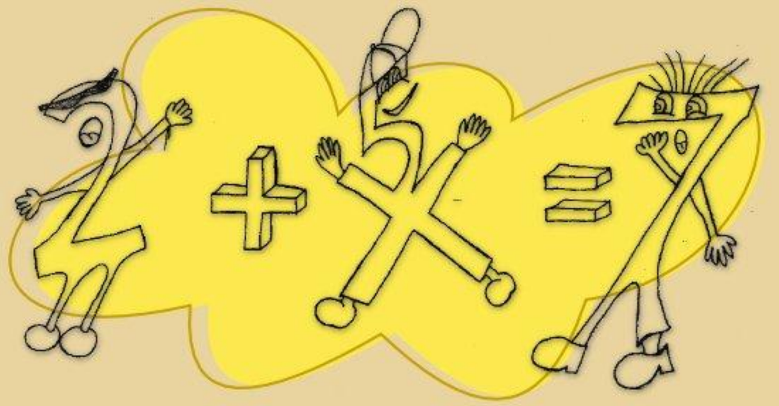
Algumas idéias...

Tarefas que façam o aluno perceber e explorar regularidades e pense genericamente;

Fazer com que os alunos se expressem matematicamente de forma oral e escrita;

Construir com eles relações entre grandezas e variáveis.


Pensamento algébrico
Representar
Raciocinar
Resolver problemas

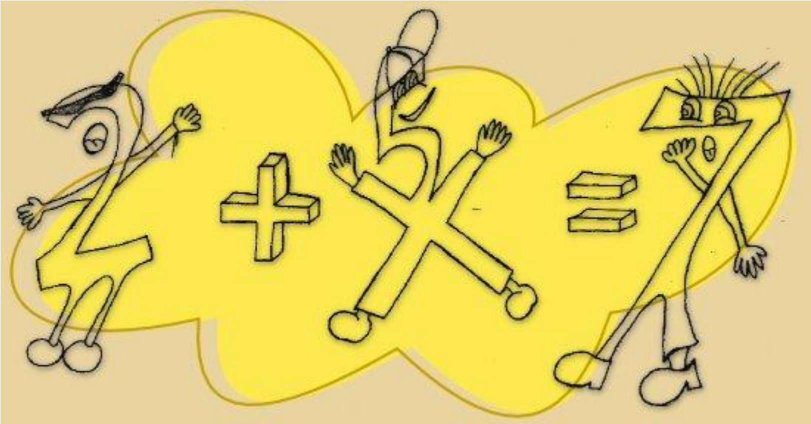


- **Relações;**
- **Sequências e regularidades;**
- **Símbolos e expressões algébricas.**

RELAÇÕES

O DESENVOLVIMENTO DA APREENDIZAGEM

- Relações entre números » compreensão das operações;
- Linguagem natural » símbolos matemáticos.
- Identificar e descrever: pensamento algébrico » linguagem algébrica.
- Relações matemáticas: funções e condições envolvendo expressões algébricas.



Conceitos Fundamentais

Relação de igualdade

Relação de igualdade

- Igualdade numérica: “equivalência”

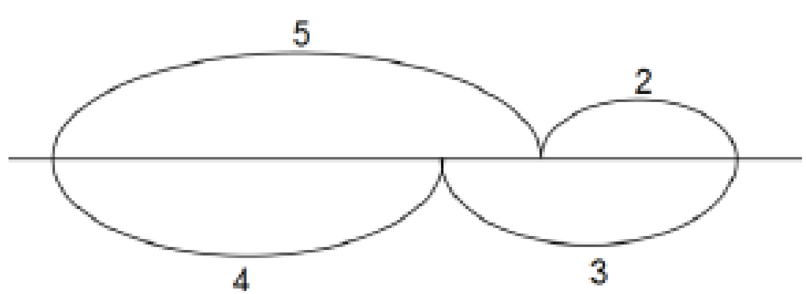
  Propriedades: é simétrica, reflexiva e transitiva;

  Significa “ter o mesmo número de elementos”;

  Estabelece uma equivalência entre duas expressões numéricas;

  Exemplo: A família do 7

  Pode-se usar como auxilio a reta numérica.



Relação de igualdade

A igualdade é vista, muitas vezes, como "separador" de expressões.

Por exemplo: João foi a feira e comprou 5 laranjas, 5 peras e 5 maçãs. Quantas frutas João tem? Explique seu raciocínio.

15 Porque 5+5=10+5=15

ATIVIDADE 1: Verifique se as relações são verdadeiras ou falsas:

- 57+23-23=57+45-45 24+9-9=23 41+1=42+19-19
- 20-20+77=78-1 64=65+1-1 25+11-11-9=25-5-4

Relação de igualdade

- Os diversos significados do sinal de igual

✓ Operador: 5+5=10

✓ Equivalência: 5+3=2+6

✓ Equivalência entre expressões: 8+x=18

✓ Relação funcional: y=2x+7

Assim, um sinal de igual pode representar: um cálculo, a afirmação de uma equivalência, uma pergunta acerca dos objetos que satisfazem uma relação de equivalência ou uma função estabelecendo uma correspondência entre dois conjuntos.

Relação de igualdade

- **Proporcionalidade com igualdade entre duas razões:**

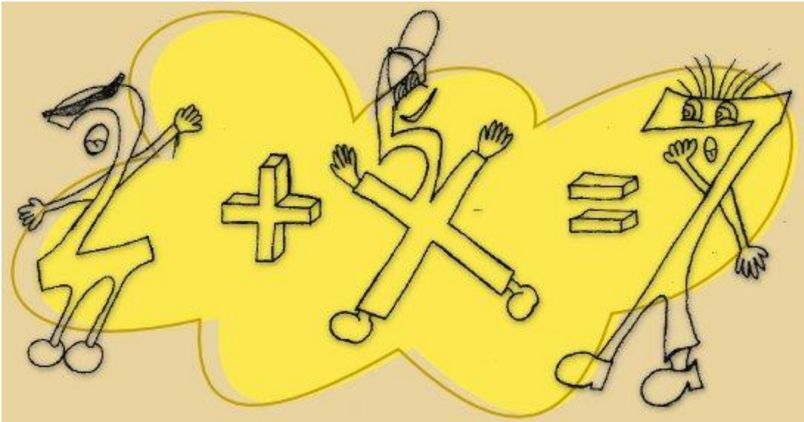
a/b=c/d

ATIVIDADE 2: A Joana pintou as paredes do seu quarto com uma cor que criou, misturando as cores amarelo e azul. Para cada duas doses de amarelo juntou três doses de azul.

a) Se Joana colocar num recipiente 45 doses de azul, quantas doses de amarelo deverá juntar para obter a cor que criou?

b) Se Joana colocar num recipiente 14 doses de amarelo e 15 doses de azul obtém a cor com que pintou as paredes do quarto?

c) E se Joana colocar num recipiente 18 doses de amarelo e 27 doses de azul, obtém a cor que usou inicialmente?



Conceitos Fundamentais

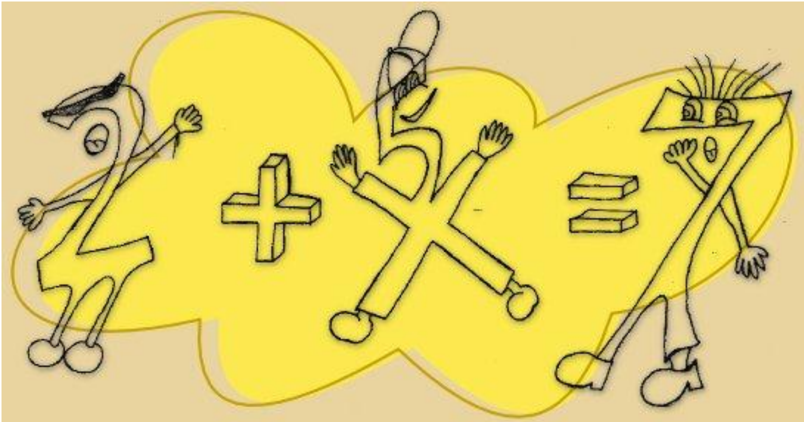
Relação de desigualdade

Relação de desigualdade

- Além do sinal de igualdade, os alunos devem conhecer os sinais de <,>,≥,≤ e ≠.
- A princípio, o aluno deve compreender bem ao sinais > e <, usando os números naturais, como ( )<5, ou ( )<1
- Mais tarde, esta noção de ordem dará subsídio à construção dos números racionais não negativos

Propriedades

- O **menor ($<$)** tem propriedade **transitiva** (se $a<b$ e $b<c$, então $a<c$) **mas não simétrica** (se $a<b$ não se tem $b<a$) **nem reflexiva** (não se verifica $a<a$);
- O **menor ou igual ($\leq$)** também merece atenção especial, pois é necessária suas propriedades nas inequações, percebe-se que ele tem **propriedade transitiva e reflexiva, mas não simétrica**;



Conceitos Fundamentais

Relação entre números, expressões e generalização

Situações que promovem o desenvolvimento algébrico, buscando identificar e generalizar regularidades

- Relação inversa entre soma e subtração (39-17=22 pois 39=22=17);
- Relação de compensação (31+9=30+10)
- Composição e decomposição de números (23+11+9=23+20)
- Questionamento....
- Vale em todas situações? 3+(4x2)=(3+4)x2?

- Buscando estabelecer generalizações de relações entre números e de propriedades, pode-se usar os jogos “ pensa um número”. Isso despertará a curiosidade dos alunos:
- ATIVIDADE 3: Pensa um número

1. Pensa num número entre 1 e 10. Adiciona 5. Multiplica o resultado obtido por 3. Agora subtrai 15. Por fim, divida por 3. Qual número obteve?
2. Pensa num número entre 1 e 10. Adiciona 5. Multiplica o resultado obtido por 2. Adiciona 6. Ache o dobro deste número. Subtraia 8. Agora divide por 4. Obteve o número que pensaste?

Leitor de pensamentos

Pense em um número com 2 algarismos (por exemplo : 69)
Subtraia os 2 algarismos do número original (por exemplo : 69 - 6 - 9 = resulta em 54)
Procurar na lista o resultado e fixe o símbolo correspondente .

99	◆	98	■	97	♓	96	✋	95	♈	94	⌘	93	♓	92	💧	91	☺	90	♐
89	💧	88	◆	87	✝	86	♎	85	●	84	⌛	83	♉	82	♒	81	❍	80	♈
79	☠	78	☒	77	♎	76	✋	75	♎	74	◆	73	●	72	❍	71	💣	70	☸
69	■	68	☺	67	●	66	❖	65	●	64	☺	63	❍	62	□	61	❖	60	♒
59	□	58	■	57	♎	56	❍	55	✋	54	❍	53	⌘	52	♋	51	♒	50	☒
49	♒	48	❖	47	⌘	46	●	45	❍	44	💣	43	◆	42	♓	41	💣	40	☺
39	☠	38	❄	37	✋	36	❍	35	❖	34	⌘	33	❖	32	♎	31	☒	30	✝
29	●	28	💧	27	❍	26	☺	25	☼	24	⌛	23	☠	22	❖	21	■	20	☠
19	■	18	❍	17	♌	16	☠	15	⌛	14	♒	13	⚐	12	◆	11	💣	10	⌘
9	❍	8	♐	7	☒	6	♐	5	☸	4	✋	3	◆	2	♈	1	♈	0	❍

http://www.aparece.com/leitor_de_mentes.htm

❍

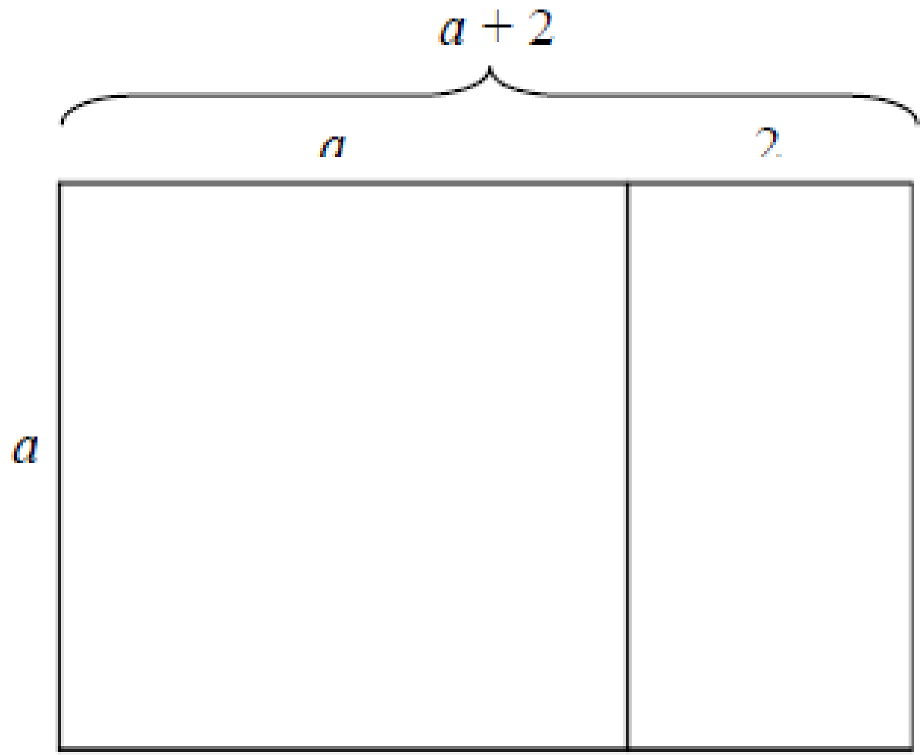
- Escolha um número de dois algarismos;
- Multiplique o número por 15;
- Multiplique o resultado por 7;
- Diminua do resultado o quádruplo do número original

Agora...

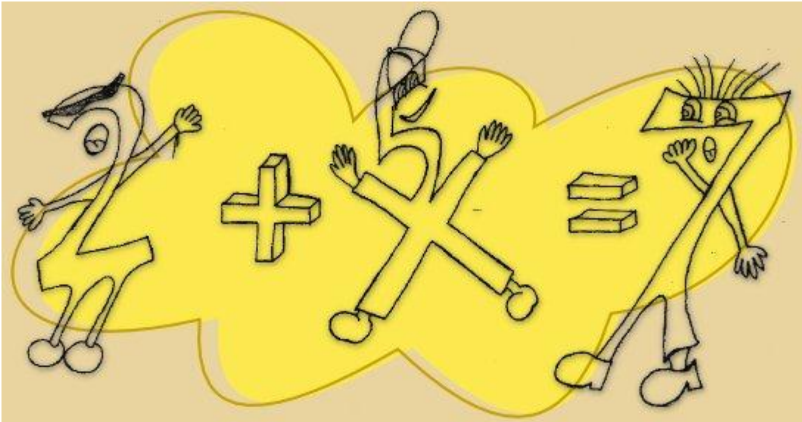
- Escolha um número de dois algarismos;
- Multiplique o número por 13;
- Multiplique o resultado por 8;
- Diminua do resultado o triplo do número

original

Interpretação geométrica de expressões algébricas



Qual a área desta figura? E o perímetro?



Conceitos Fundamentais

Propriedades das operações

Propriedades das operações

Aritmética generalizada:

- Comutativa da adição: $a+b=b+a$
- Comutativa da multiplicação $a \times b = b \times a$
- E a comutativa da subtração e divisão, é válida?
- Associativa da adição
- Associativa da multiplicação
- Elementos neutros da multiplicação e adição

ATIVIDADE 4: Os quatro quatros

O objetivo do problema dos quatro quatros é formar números inteiros usando quatro algarismos e operações aritméticas elementares.

$1=\frac{44}{44}$	$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$	$3=\frac{4+4+4}{4}$	$4=4+\frac{4-4}{4}$
$5=\frac{4\times4+4}{4}$	$6=4+\frac{4+4}{4}$	$7=4+4-\frac{4}{4}$	$8=4\times\frac{4+4}{4}$
$9=4+4+\frac{4}{4}$	$10=\frac{44-4}{4}$	$11=\frac{44}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}}$	$12=\frac{44+4}{4}$
$13=4!-\frac{44}{4}$	$14=\frac{4!}{4}+4+4$	$15=4\times4-\frac{4}{4}$	$16=4\times4+4-4$
$17=4\times4+\frac{4}{4}$	$18=\frac{4!+4!+4!}{4}$	$19=4!-4-\frac{4}{4}$	$20=4\times\left(4+\frac{4}{4}\right)$
$21=4!-4+\frac{4}{4}$	$22=4!-\frac{4+4}{4}$	$23=\frac{4!\times4-4}{4}$	$24=4\times4+4+4$
$25=\frac{4!\times4+4}{4}$	$26=4!+\frac{4+4}{4}$	$27=4!+4-\frac{4}{4}$	$28=4\times(4+4)-4$

ATIVIDADE 5: A cerca

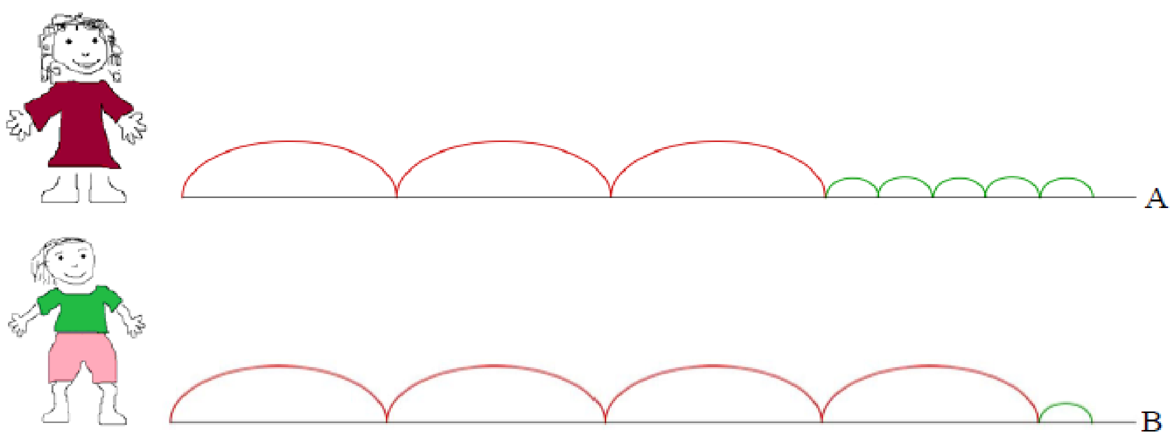
Uma escola ganhou, por doação, uma tela de 24 m de comprimento. A direção da escola resolveu, então, cercar um terreno retangular, para fazer experiências com plantas. Vamos ajudar a direção da escola a descobrir quais pedem ser as dimensões do terreno ?”

ATIVIDADE 6: Descubra o preço

Eva e Rui tinham a mesma quantia de dinheiro no bolso. Foram a uma loja comprar cadernos escolares iguais. Quando saíram, cada um tinha na mão a figura correspondente. Determine o preço do caderno.

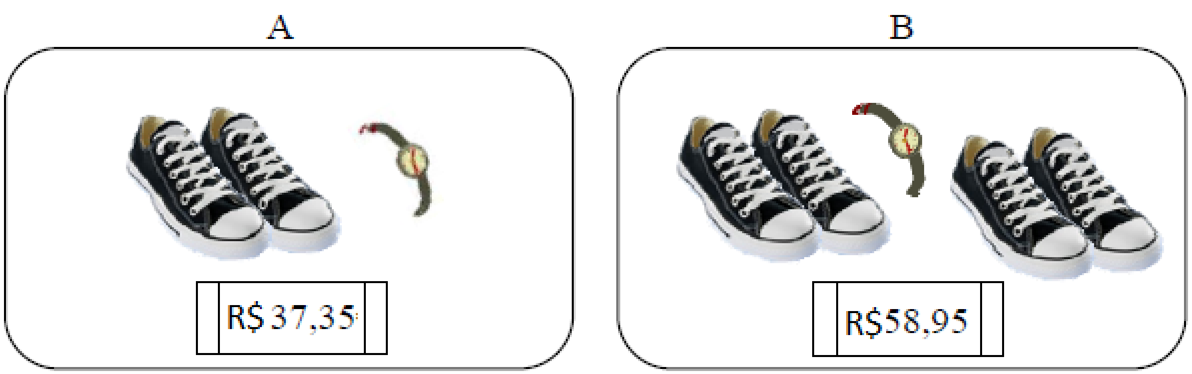
ATIVIDADE 7: Saltos na reta

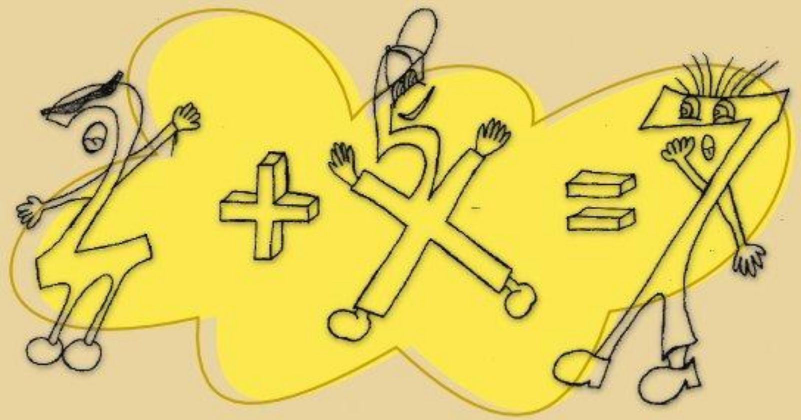
- Na atividade de Educação Física, o professor propôs aos seus alunos realizar dois tipos diferentes de percurso sobre uma linha com o mesmo comprimento, um constituído por saltos (todos de mesmo comprimentos) e outro com passos (também todos com o mesmo comprimento). A Ana fez o percurso A e a Beatriz o percurso B. Quantos passos corresponde todo o percurso?



ATIVIDADE 8: Relações entre duas variáveis

Em duas lojas foram colocados na vitrine os mesmos artigos em quantidades e disposições diferentes. A vitrine A tem um valor total de R$ 37,75 e a vitrine V tem um valor total de R$ 58,95. Descubra o preço de cada um dos artigos





Sequências e regularidades

A análise de sequências permite aos alunos progredir de **raciocínios recursivos** para **raciocínios** envolvendo **relações funcionais**.

Sequências repetitivas

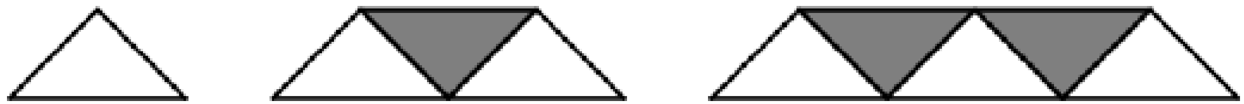
☾★★☾☾★★☾☾★★☾☾★★☾...

A 1 1 A 1 1 A 1 1 A 1 1 ...

vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, …

A percepção da unidade que se repete permite determinar a ordem de diversos elementos da sequência por meio de uma generalização.

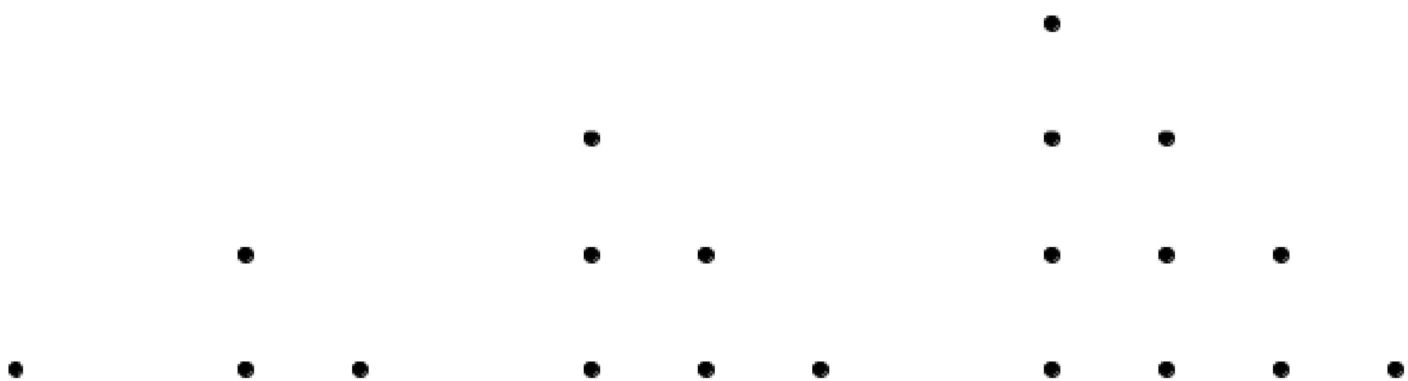
Sequências crescentes



5, 10, 15, 20, 25, …

1, 4, 7, 10, 13, 16, …

1, 4, 9, 16, 25, 36, …



Cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição (ordem do termo).

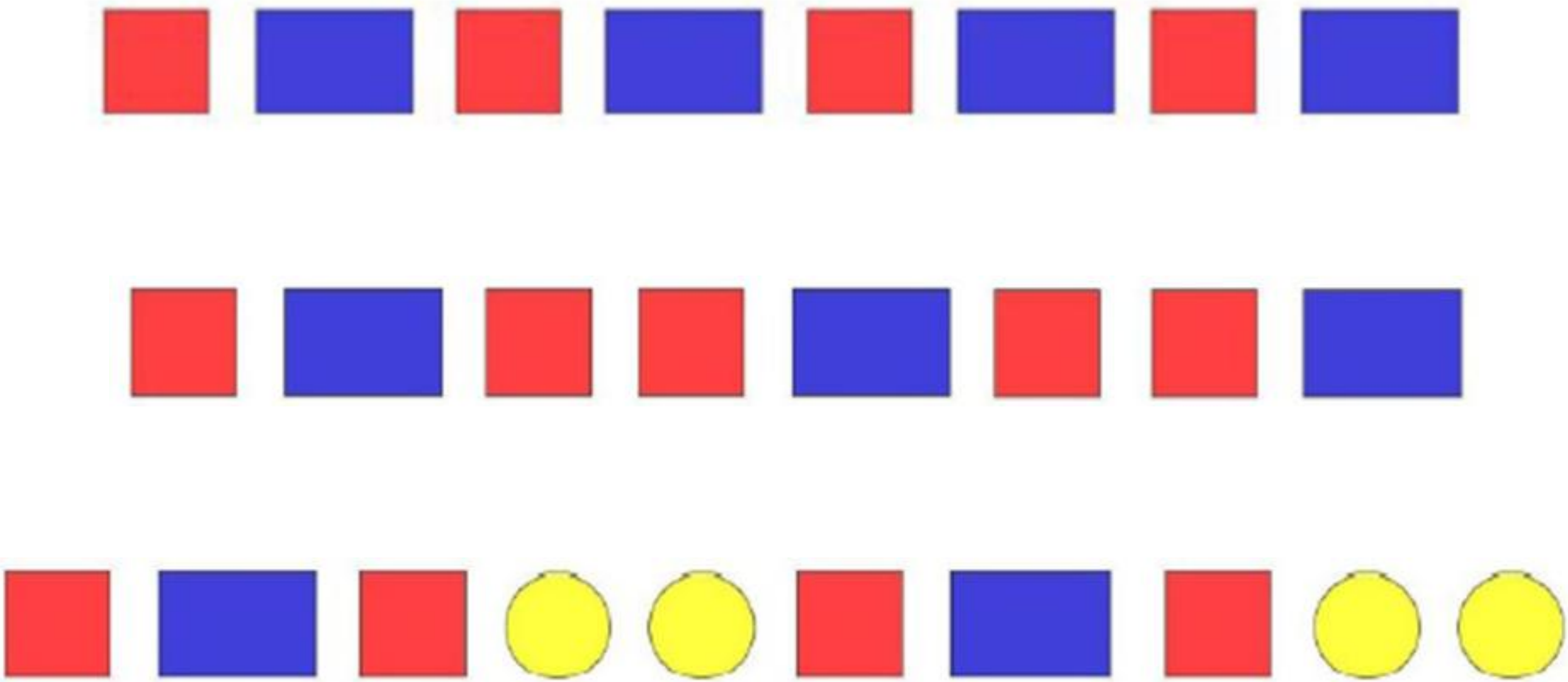
Diferentes possibilidades de continuação de uma sequência.

Sequência repetitiva

Consideremos os três primeiros termos de uma sequência repetitiva:

Como você continuaria esta sequência?

Três possíveis soluções....



Sequência numérica crescente

Consideremos a sequência numérica cujos dois primeiros termos são:

1, 3, ...

apresente os quatro termos seguintes.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

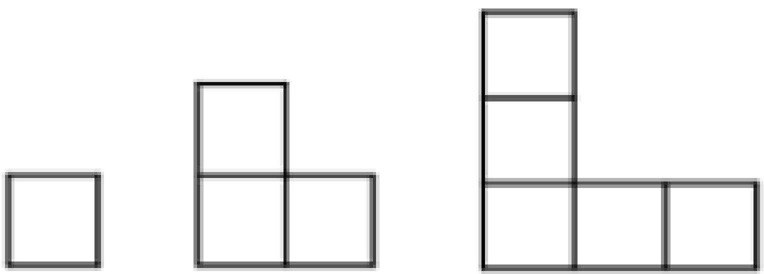
b) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

c) 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...

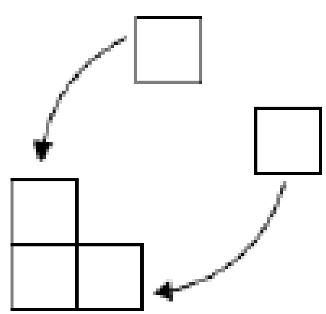
Estratégias dos alunos na exploração de sequências

1. *Estratégia de representação e contagem.*

Determinar o termo de ordem 10 numa sequência pictórica. O aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente.



É importante questionar sobre o processo utilizado para representar os termos da sequência...



2. Estratégia aditiva.

Esta estratégia tem por base uma abordagem recursiva.

o numero de quadrados da fig anterior mais(+)2.

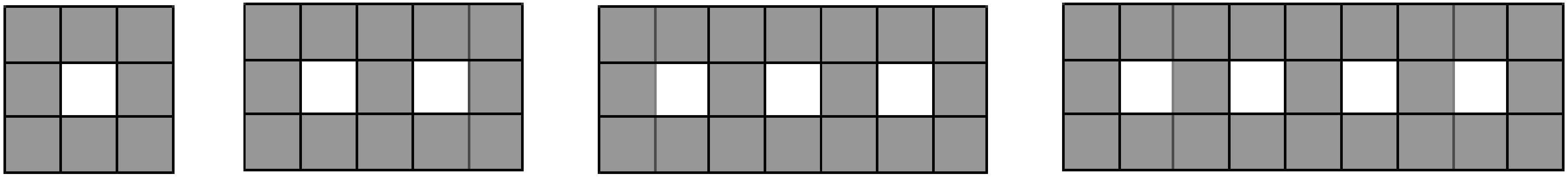
Alguns alunos tendem a apresentar como termo geral da sequência numérica relativa ao número de quadrados a expressão 2*n.*

No entanto, esta estratégia também permite chegar ao termo geral.

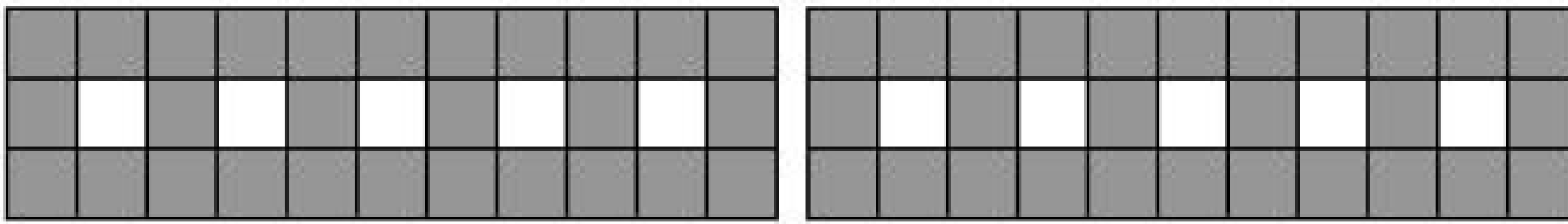
Para isso basta partir do 1.º termo e considerar *n* *“saltos” de 2 unidades.*

3. Estratégia do objeto inteiro.

O aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta. Por exemplo, o aluno determina o termo de ordem 10 com base no termo de ordem 5.



O número de quadrados cinzentos do termo de ordem 10 é o dobro do número de quadrados do termo de ordem 5?



Neste caso, é o dobro do número de quadrados da figura cinco menos 3 quadrados da reposição da figura.

Resposta: 53

Por meio desta estratégia é possível determinar corretamente os termos de de certas sequências e algumas ordens.

No entanto, se não se observarem as propriedades da figura, a estratégia do objeto inteiro dificulta a generalização.

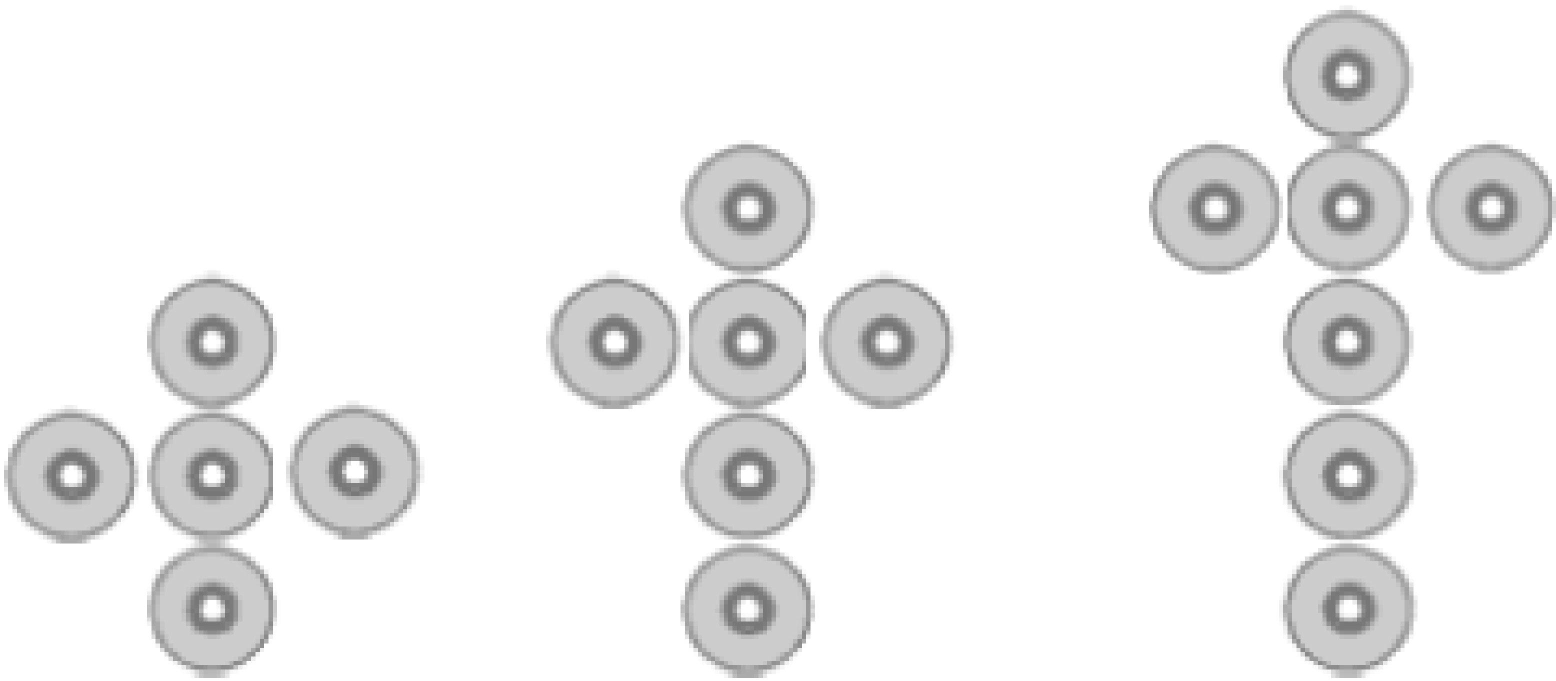
Na verdade, esta estratégia funciona perfeitamente quando há proporcionalidade direta.

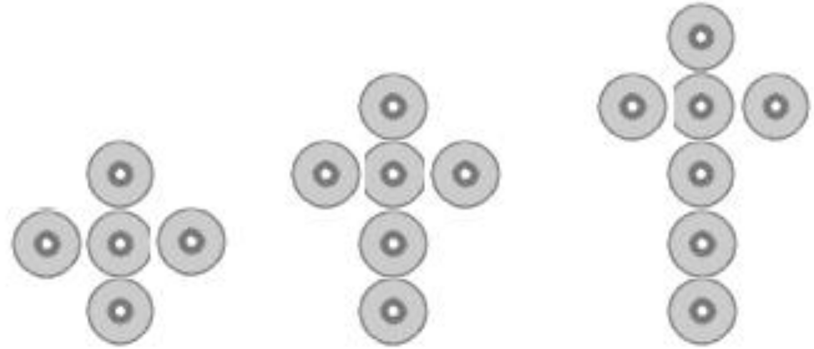
E quando não há?????

4. Estratégia da decomposição dos termos.

A decomposição de um termo de uma sequência pictórica permite, muitas vezes, identificar o seu processo de construção, possibilitando a determinação de termos de ordem distante.

Qual é o número de cd´s do 32º termo?



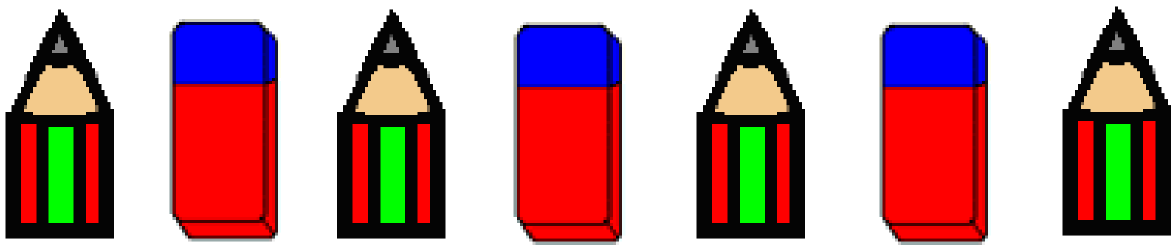


Número de CD do 32.º termo	Termo geral
Desenho os quatro cd's base, e depois acrescento 32 Cd's por baixo que representam o nº da figura	$4+x$
A figura nº 32, terá 36 quadrados, 2 na horizontal e 34 na vertical. A fig constroi-se a partir dos 4 quadrados de base da fig mais os do nº da fig.	$m+2+2$
Fazia 32 cd's na vertical e mais 3 na horizontal e 1 em cima.	$n+3+1=\alpha$

Tarefas:

Sequências repetitivas (primeiro contato)

1) Compreensão da unidade que se repete.



Que objeto se encontra na quarta posição da sequência? E na nona posição?

Indiquem a ordem em que as borrachas surgem na sequência?

Que estão alternadas com os lápis.

AS POSIÇÕES QUE AS BORRACHAS OCUPAM SÃO NÚMEROS PARES.

1º vinha o lápis depois a borracha e assim sucessiram

É uma sequencia em que as figuras nunca estão juntas, por exemplo a borracha nunca está junto com outra borracha pois tem o lápis a separá-las.

Os lápis ocupam as posições impares enquanto as borrachas ocupam as posições pares.

2) Raciocínio multiplicativo.

▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶ ▮○▶▶

4 4 4 4 4

Quantos elementos têm as duas primeiras unidades?

Quantos elementos têm as quatro primeiras unidades?

Quantas unidades estão representadas?

Quantos triângulos estão representados?

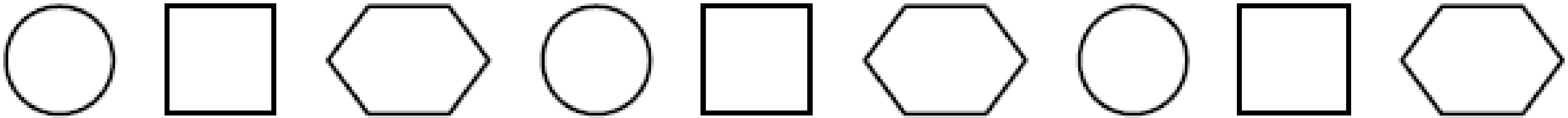
E quantos retângulos?

Posteriormente, o professor pode sugerir a utilização de tabelas...

Após a unidade	Número de ▮	Número de ▶
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10

O professor pode então, pedir para os alunos criarem suas próprias sequências e discutir com os colegas a análise de cada uma delas.

3) Critério de divisibilidade.



Qual a posição do primeiro hexágono da sequência?

Em que outras posições da sequência se encontra o hexágono?

Que polígono ocupa a posição 25 da sequência?

Estará um hexágono na posição 61 da sequência?

Os alunos justificam suas conclusões, como exemplificam as respostas seguintes:

Sabemos que o hexagono está na posiçaõ que é multiplo de 3, logo sabemos que o hexagono está no 24º lugar, e o simbolo que vem asseguir é um circulo.

[não é um hexágono que está na posição]

Porque 61 é ~~[illegible]~~ não é um multiplo de 3.

5) Regularidades no quadrado 10 por 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Os alunos podem explorar sequências finitas e descrever suas regularidades desde as mais simples, como por exemplo:

- números naturais;
- números pares;
- números ímpares;
- múltiplos de 10...

O professor pode pedir para os alunos que formem a sequência do número de múltiplos em cada linha do quadrado. Vejamos os múltiplos de 6:

1	2	3	4	5	X	7	8	9	10
11	X	13	14	15	16	17	X	19	20
21	22	23	X	25	26	27	28	29	X
31	32	33	34	35	X	37	38	39	40
41	X	43	44	45	46	47	X	49	50
51	52	53	X	55	56	57	58	59	X
61	62	63	64	65	X	67	68	69	70
71	X	73	74	75	76	77	X	79	80
81	82	83	X	85	86	87	88	89	X
91	92	93	94	95	X	97	98	99	100

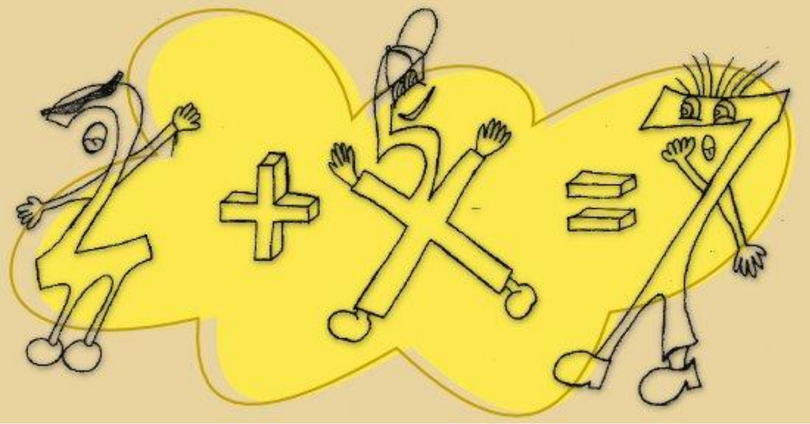
1,2,2,1,2,2,1,2,2,1,...

Marquem os números de 5 em 5, começando no 3, e identificar a regularidade no algarismo das unidades.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

O ideal é que ao final da investigação o aluno chega na seguinte generalização:

“*Sempre que adicionam 3 a um múltiplo de 5 a soma é um número cujo algarismo das unidades é 3 ou 8; se esse múltiplo de 5 é também múltiplo de 10 o algarismo das unidades da soma é 3 e se esse múltiplo de 5 não é múltiplo de 10 o algarismo das unidades da soma é 8*”.



Símbolos e expressões algébricas

Discutiremos os seguintes assuntos...

1. As diferentes interpretações para os símbolos e expressões;
2. O modo como se desenvolve a noção de variável e o sentido de símbolo;
3. O ensino das expressões algébricas em particular os casos notáveis da multiplicação dos binômios – um dos pontos do currículo da álgebra escolar onde se verificam sérias dificuldades por parte dos alunos.

Introdução

O simbolismo acarreta grandes perigos para o processo de ensino-aprendizagem, pois, caímos no formalismo quando perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção aos símbolos e ao modo de os manipular.

Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem

Nos anos 70, num estudo feito no Reino Unido, Dietmar Kuchemannn indicava três sentidos fundamentais usadas correntemente em Matemática:

1. Letra como incógnita;
2. Letra como número generalizado;
3. Letra como variável.

Interpretação de símbolos e expressão

As dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra tem sido discutidas por numerosos autores. Alguns exemplos dessas dificuldades:

- Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números,
- Pensar numa variável como significando um número qualquer,
- Atribuir significado às letras existentes numa expressão,
- Dar sentido a uma expressão algébrica,
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica.
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e = e, em particular, distinguir adição aritmética (3+5) da adição algébrica (x+3).

Desenvolvimento do sentido de símbolo

Com base num pequeno estudo realizado com matemáticos, educadores matemáticos, cientistas e lógicos, ilustram a diversidade de formas como a notação matemática pode ser entendida. Consideram que a utilização, com significado, da **noção de variável facilita a transição entre Aritmética e a Álgebra** e propicia a construção de novos conceitos matemáticos de caráter mais avançado, em outros anos de escolaridade.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

A aprendizagem das operações com monômios e polinômios, e da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

- Para ir além da simples manipulação de símbolos e expressões algébricas será preciso dar mais atenção aos símbolos e aos significados.
- Abraham Arcavi defende que se deve procurar o desenvolvimento do "sentido de símbolo" (symbol sense), e que representa para o caso da Ágebra, um papel análogo ao que o "sentido de número" assume no trabalho com Números e Operações.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

Ao longo do ensino fundamental, as atividades realizadas pelos alunos devem contribuir para que eles desenvolvam o sentido de símbolo. Continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalhos significativos, quer de cunho matemático, quer relativo a situação extra-matemáticas, a aprendizagem da Álgebra requer a compreensão dos seus conceitos fundamentais.

Expressões algébricas

No trabalho com expressões algébricas é importante que os alunos reconheçam a noção de equivalência de expressões.

Os alunos assumem uma perspectiva ***processual*** quando procuram de imediato substituir as variáveis por número, realizando depois as operações aritméticas indicadas.

Os alunos assumem uma perspectiva ***estrutural*** quando trabalham com as expressões algébricas de acordo com as convenções próprias da estrutura destas expressões, compreendendo o que estão a fazer.

Qual é o papel do professor?

Levar os alunos a passar de uma perspectiva processual para uma perspectiva estrutural da Álgebra.

A compreensão das expressões algébricas pelo alunos envolve diversos aspectos:

1. a compreensão da noção de monômio e da sua representação,
2. simplificação de monômios semelhantes, que depende, em grande medida, da compreensão da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e
3. lidar com a “falta de fechamento” das expressões algébricas.

O ensino da Álgebra deve promover o **“sentido da estrutura”**.

Para isso, as tarefas propostas devem promover, por exemplo:

a capacidade de compor e decompor expressões algébricas, mantendo a equivalência dessas expressões.

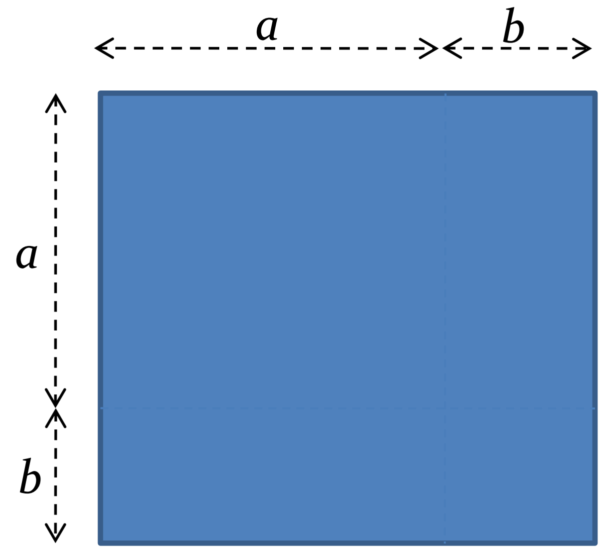
A aprendizagem das operações com monômios e polinômios e da simplificação de expressões algébricas deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida.

Casos notáveis da multiplicação de binômios

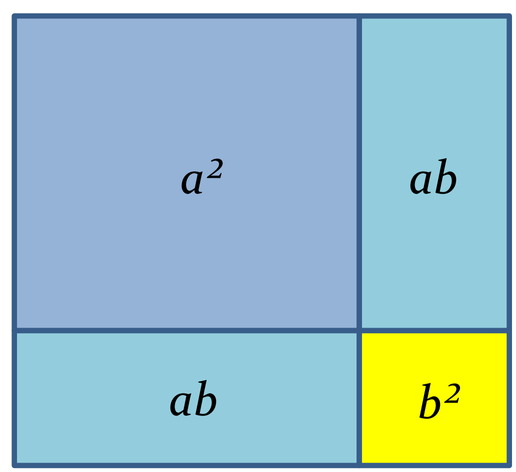
O produto notável $(a + b)^2$ segundo a Geometria

Quando *a* e *b* são positivos, podemos representar o quadrado da soma de dois termos desconhecidos geometricamente.

Observe que a área do quadrado de lado $(a + b)$ é igual a área do quadrado maior, a^2, mais duas vezes a área do retângulo, ou seja, $2ab$, mais a área do quadrado menor, b^2.



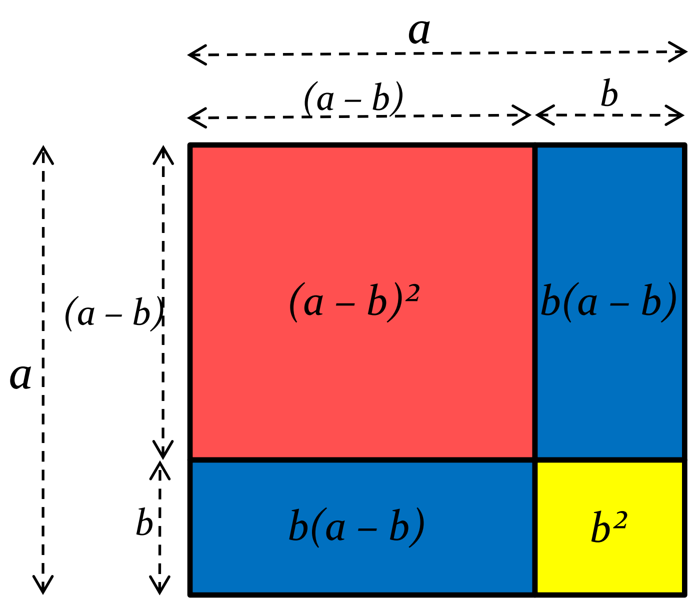
$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

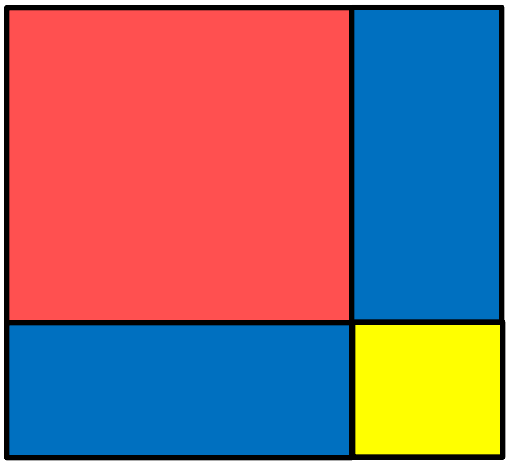


$$(a + b)^2 = a^2 + 2 . ab + b^2$$

O produto notável (a - b)² segundo a Geometria

Observe que a área do quadrado de lado *(a - b) vermelho* pode ser obtida subtraindo a área dos dois retângulos azuis e a área do quadrado amarelo . Ou seja:

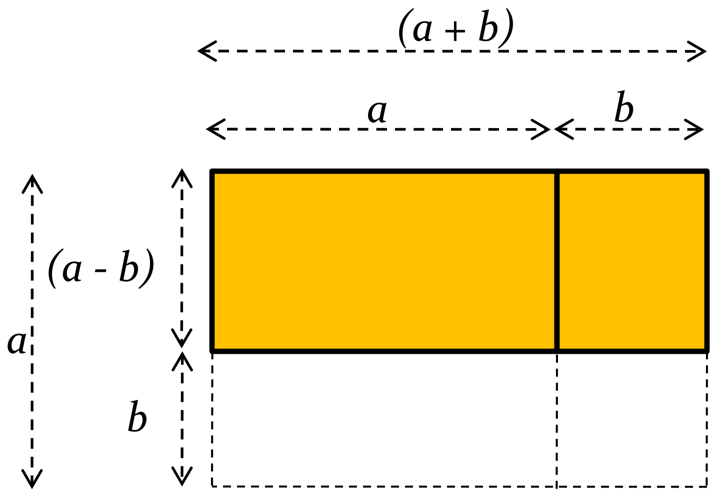




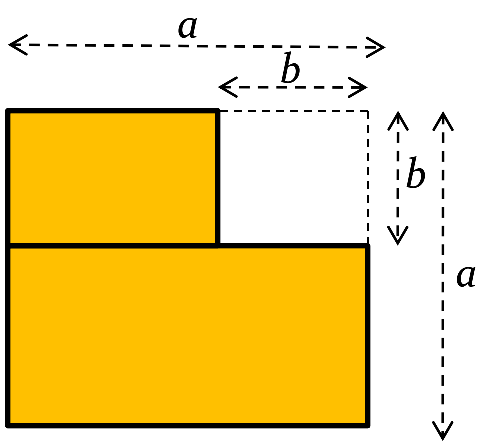
$$a^2 - b\,.\,(a-b) - b\,.\,(a-b) - b^2 = (a-b)^2$$

O produto notável (a + b) . (a - b) segundo a Geometria

Considere um retângulo de lados com medida (a + b) e (a – b).



A área do retângulo laranja é
$(a + b) \cdot (a - b)$



A área da figura obtida pode ser expressa por $a^2 - b^2$

Painéis de azulejos (notas para o professor)

Este tipo de tarefa tem o objetivo de:

- Ajudar o aluno a descrever e representar as relações que identificarem;
- Propiciar a análise da regularidade e o modo como esta se desenvolve e varia;
- Auxiliar na organização da informação de forma sistematizada e fazer generalizações sobre as relações matemáticas presentes;
- Permitir que os alunos determinem o termo seguinte (ou o anterior) e ampliem uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação, bem como interpretem diferentes representações de uma relação e a ligação que existe entre elas. Por exemplo, a relação entre o número de azulejos cinzentos e o número de azulejos brancos e a relação entre o número de azulejos brancos e o total de azulejos;
- Oportunizar o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de argumentação.

Os seguintes aspectos podem ser explorados...

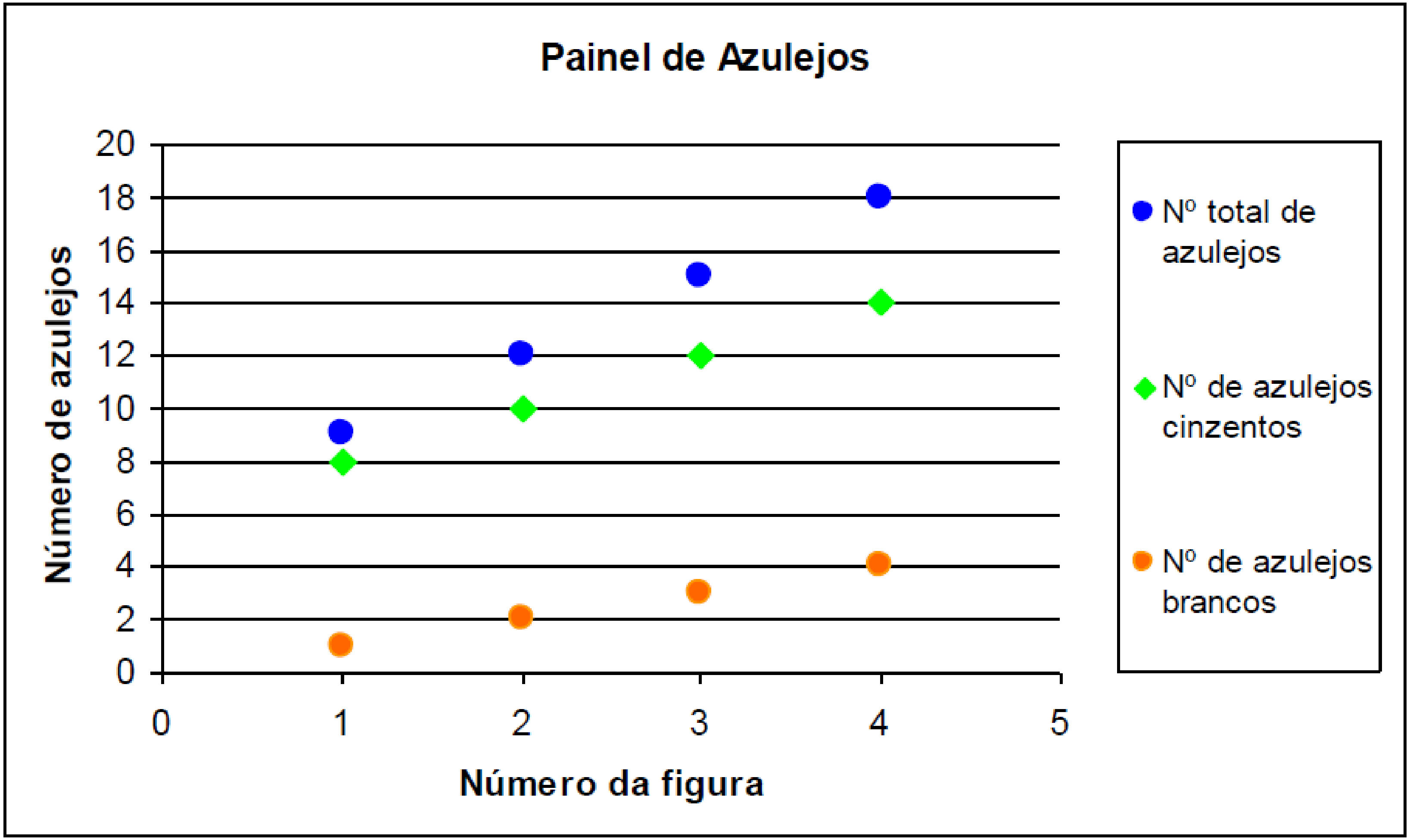
- O número da figura é o mesmo que o número de azulejos brancos;
- A diferença entre o número de azulejos brancos e de cinzentos;

Nº da figura	*Nº de azulejos brancos (B)*	*Nº de azulejos cinzentos (C)*	*Diferença (C – B)*
1	1	8	8 – 1 = 7
2	2	10	10 – 2 = 8
3	3	12	12 – 3 = 9
4	4	14	14 – 4 = 10

- O número de azulejos cinzentos = 2 x número de azulejos brancos + 6;
- O número total de azulejos obtém-se através do termo geral 3n + 6;
- Investigar a área e o perímetro de cada figura e construir termos gerais das duas sucessões (2 x nº brancos + 10 ou nº cinzentos + 4, para o perímetro)

Nº figura	*perímetro*	*área*
1	12	9
2	14	12
3	16	15
4	18	18

- Pode-se ainda proceder à construção de um gráfico de pontos, com o número do termo em abscissa e os das outras três variáveis - brancos, cinzentos e total - em ordenadas.



Dados

1. Jogue o dado. Qual é o número que você vê? Consegue imaginar o número da face oposta?
2. Jogue com seus colegas quantas vezes for necessário até encontrar uma regularidade entre as faces opostas nos diferentes dados.
3. Construa uma tabela para registrar as descobertas com nº de faces do dado, soma de todas as faces, soma das faces opostas vezes metade do número de faces, resultado.

Referências bibliográficas

Ponte, J. P., Matos, A. & Branco, N. (2009). *Álgebra no ensino básico: Material de apoio ao trabalho dos professores no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico. [Acesso 09/07/2011 em* http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf].

Carvalho, A., Gaio, A.,Ribeiro, D., et al. (2009). Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico. [Acesso 09/07/2011 em* http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/060_pensamento%20_algebrico.pdf*]* .

Mazaro, E. C. P., Pires, M. N. M. (2011). A investigação matemática no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XI EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Apucarana.

http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/