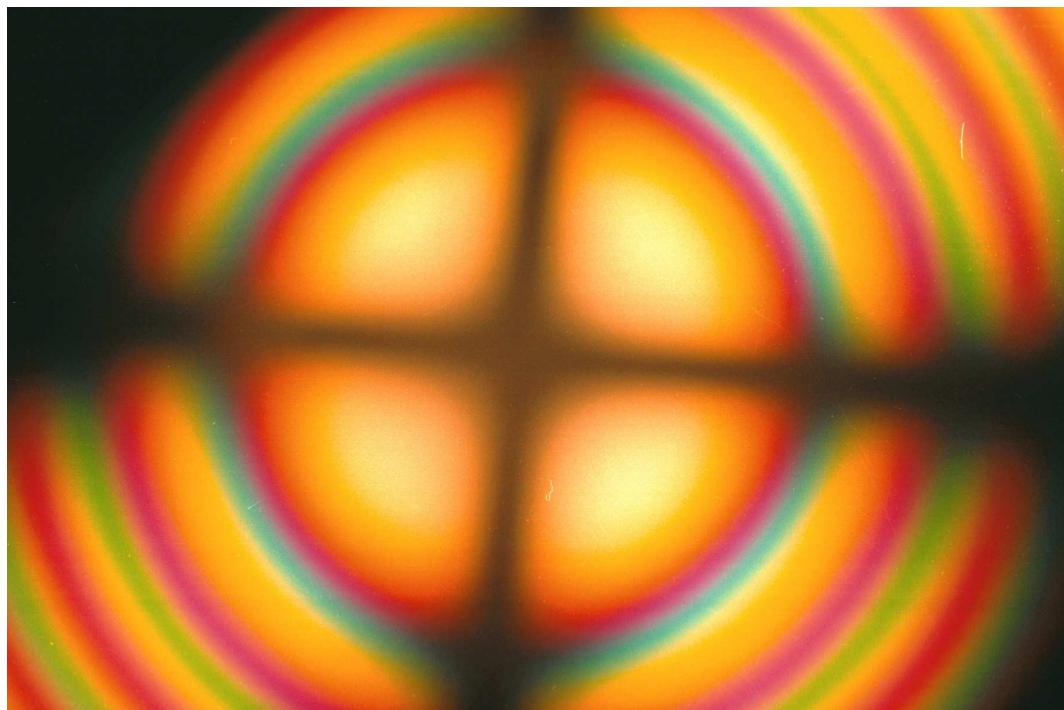


ÓPTICA

Transformação de Fourier e Processamento de Imagens



Jaime Frejlich
*Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física - Laboratório de Óptica
Campinas-SP BRASIL*

Introdução

Este livro reúne material produzido ao longo de muitos anos de ensino de Óptica no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas. O livro está dividido em três partes: I-Teoria, II-Experimentos e III-Apêndice. A primeira parte trata dos assuntos básicos da Óptica, fornecendo as informações e metodologia de estudo dos assuntos mais importantes da área, com farta bibliografia para quem quiser aprofundar nos assuntos. Esta primeira parte se inicia com um estudo sobre Óptica geométrica na formulação matricial, o que permite abordar a maioria dos problemas de cálculo de sistemas ópticos, de uma forma simples, rápida e muito didática. Os capítulos 2 e 3 tratam de assuntos clássicos como propagação e polarização da luz. O capítulo 4 aborda questões mais complexas referentes à interferência da luz, utilizando elementos da teoria de funções aleatórias e transformações de Fourier, para oferecer uma formulação mais rigorosa das questões da coerência e do espectro de potência da luz. O tratamento da difração, no capítulo 5, é baseado principalmente na Óptica de Fourier com um destaque específico para o processamento de imagens. O capítulo 6 referente à Holografia faz ênfase na teoria da informação além de apresentar alguns materiais fotossensíveis interessantes para o registro de imagens e hologramas em geral. O Capítulo final da parte teórica 7, sobre propagação em meios anisotrópicos e Óptica não linear, oferece apenas uma introdução sobre assuntos de grande importância mas que estão fora do contexto deste livro.

A parte II constitui a novidade principal deste livro, pois traz a descrição de um número de experimentos, ilustrativos da parte teórica, adequadamente descritos com exemplos, para viabilizar sua posta em operação prática.

Outra novidade é a parte III onde se incluem alguns apêndices como apoio ao texto principal, incluindo assuntos puramente teóricos, como o Teorema de Bernstein, o Teorema de Whittaker-Shannon, conceitos sobre funções aleatórias, e outros, assim como outros de caráter prático como o que trata do alinhamento de lentes, o que trata sobre fotodetectores, etc.

Sumário

I Teoria	1
1 Óptica Geométrica	3
1.1 Matrizes ópticas	3
1.1.1 Refração e translação	3
1.1.2 Descrição de uma lente	4
1.1.3 Traçado de raios	5
1.1.4 Formação de imagem	5
1.1.5 Planos cardinais	5
1.1.5.1 Plano focal	5
1.1.5.2 Planos principais	6
1.1.5.3 Distância focal	7
1.1.5.4 Pontos nodais	7
1.1.6 Traçado geométrico	7
1.1.7 Exemplo	8
1.1.8 Sistema de lentes finas	8
1.2 Diafragmas em sistemas ópticos	10
1.2.1 Campo de visão	10
1.3 Problemas	13
1.3.1 Planos Cardinais	13
1.3.2 Lente grossa	13
1.3.3 Sistema de lentes	14
1.3.4 Sistema de duas lentes	14
2 Propagação da luz	17
2.1 Ondas harmônicas	17
2.1.1 Representação complexa	18
2.1.1.1 Onda harmônica plana em 3 dimensões	18
2.1.2 Operadores Vetoriais	18
2.1.2.1 Operações freqüentes	19
2.1.3 Velocidade de grupo	20
2.1.3.1 Batimento	20
2.1.3.2 Pulso	21
2.2 Ondas eletromagnéticas	21
2.2.1 Equações de Maxwell	21
2.2.2 Equação da onda eletromagnética	23
2.2.3 Índice de refração complexo	23
2.3 Efeito Doppler	23
2.4 Problemas	25
2.4.1 Equação de onda	25
2.4.2 Operadores vetoriais	25
2.4.3 Velocidade de grupo	25

3 Natureza vectorial da luz	27
3.1 Equações de Maxwell: relações vectoriais	27
3.2 Polarização	27
3.2.1 Polarização linear	27
3.2.1.1 Polarizador	28
3.2.2 Polarização elíptica	28
3.2.3 Matrizes de Jones	30
3.2.3.1 Exemplo	32
3.3 Vector de Poynting	32
3.3.1 Vetor de Poynting e Intensidade	33
3.4 Reflexão e refração	34
3.4.1 Equações de Fresnel	35
3.4.1.1 Ângulo de Brewster	37
3.4.2 Reflexão total	37
3.4.2.1 Ondas evanescentes	37
3.5 Problemas	39
3.5.1 Lâmina de retardo	39
3.5.2 Matrizes de Jones	39
3.5.3 Lâmina de retardo de $\lambda/4$	39
3.5.4 Lâmina de retardo rotada	39
3.5.5 Experimento de Birrefringência	40
3.5.6 Intensidade e Campo elétrico num feixe laser	40
3.5.7 Intensidade e Campo Elétrico da luz	40
3.5.8 Ondas evanescentes	41
3.5.9 Método de Abélès	41
4 Interferência e Coerência	43
4.1 Interferência	43
4.1.1 Formalismo matemático	43
4.1.2 Fendas de Young	44
4.1.3 Interferência por uma lâmina de faces paralelas	44
4.1.4 Interferômetro de Michelson	46
4.1.4.1 Estados inicial e final	46
4.1.4.2 Evolução entre os estados inicial e final	46
4.1.5 Velocimetria de efeito Doppler	47
4.1.5.1 Exemplo: Velocimetria de efeito Doppler	47
4.2 Coerência e Espectro de Potência	48
4.2.1 Coerência	50
4.2.1.1 Tempo de coerência e comprimento de coerência	51
4.2.2 Espectro de Potência	52
4.2.2.1 Espectro de potência de ondas não estacionárias	53
4.2.2.2 Espectro de potência de uma sucessão infinita de pulsos	54
4.3 Exemplos	54
4.3.1 Pulses retangulares	54
4.3.2 Onda quase monocromática	55
4.3.3 Pulso amortecido	57
4.3.3.1 Interferometria com luz de um LED	58
4.3.3.2 Espectro de Potência de um LED	60
4.3.3.3 Filtro interferencial	62
4.3.4 Espectroscopia por transformação de Fourier	62
4.3.4.1 Exercícios	62
4.4 Sinal Analítico e Transformada de Fourier	63
4.4.1 Exemplo: onda senoidal	64
4.4.2 Exemplo: pulso amortecido	65
4.5 Interferência e reflexões múltiplas em filmes e lâminas	65
4.5.1 Lâminas	66
4.6 Problemas	67

4.6.1	Fendas de Young	67
4.6.2	Velocimetria Doppler	67
4.6.3	Medida de vibrações por efeito Doppler	67
4.6.4	Interferência, coerência e visibilidade	68
4.6.5	Comprimento de Coerência	68
4.6.6	Espectro de Potência	69
4.6.7	Luz branca no Interferómetro de Michelson	69
4.6.8	Interferograma de um LED	69
4.6.9	Espectro de um LED	70
4.6.10	Dubleto do sódio	70
4.6.11	Função de auto-correlação	71
4.6.12	Espectro contínuo	71
4.6.13	Espectro de pulsos amortecidos.	71
4.6.14	Pulsos gaussianos	72
4.6.15	Filme fino e espectro de potência	72
4.6.16	Filme fino	73
4.6.17	Lâmina de faces paralelas	73
5	Difração e Óptica de Fourier	75
5.1	Formalismo clássico	75
5.1.1	Princípio de Huygens-Fresnel	75
5.1.2	Difração por uma fenda	75
5.1.3	Fenda dupla	77
5.1.3.1	Fenda dupla: outra forma	78
5.1.4	Multiplas fendas: Rede de difração	79
5.1.5	Pente de Dirac	80
5.1.6	Orifícios circulares	80
5.2	Teoria escalar	81
5.2.1	Teorema de Green	81
5.2.1.1	Teorema de Gauss	81
5.2.1.2	Teorema de Green	82
5.2.2	Formulação de Kirchhof	82
5.2.2.1	Formulação de Kirchhof	84
5.2.3	Formulação de Rayleigh-Sommerfeld	85
5.3	Princípio de Babinet: aberturas complementárias	87
5.4	Sistemas lineares	88
5.4.1	Sistema linear invariante	88
5.4.2	Espectro angular de ondas planas	89
5.4.2.1	Propagação	90
5.4.2.2	Difração e espectro angular de ondas planas	93
5.5	Difração e Teoria dos Sistemas Lineares	95
5.5.1	Formulação de Rayleigh-Sommerfeld	95
5.5.2	Aproximação de Fresnel	95
5.5.3	Aproximação de Fraunhofer	96
5.6	Exemplos	97
5.6.1	Difração por um orifício circular	97
5.6.2	Difração por uma rede retangular de amplitude	97
5.6.3	Difração de uma rede de fase com modulação senoidal	98
5.6.4	Difração por uma rede retangular, de fase	99
5.6.5	Difração por uma rede “blazed” por transmissão	100
5.7	Transformação de Fourier pelas lentes	103
5.7.1	Lente fina: transformação de fase	103
5.7.1.1	Significação física	103
5.7.2	Objeto encostado na entrada da lente	103
5.7.3	Objeto antes da lente	105
5.7.3.1	Objeto no plano focal anterior	106
5.7.4	Objeto depois da lente	106

5.7.5	Dupla transformação de Fourier	107
5.7.6	Processamento de imagens	108
5.7.6.1	Multiplexing espacial	108
5.8	Problemas	111
5.8.1	Difração por um orifício circular	111
5.8.2	Fibra óptica monomodo	111
5.8.3	Difração por um arranjo ordenado de microfuros	111
5.8.4	Microscópio	112
5.8.5	Difração por uma rede de amplitude senoidalmente modulada	112
5.8.6	Transmitância retangular de amplitude: rede de fendas	113
5.8.7	Poder de resolução de uma rede de difração	114
5.8.8	Difração de Fresnel	114
5.8.9	Espectro angular de ondas planas	114
5.8.10	Aberturas complementares	115
6	Holografia e Introdução à Teoria da Informação	117
6.1	Introdução	117
6.2	Holografia	117
6.2.1	Elementos matemáticos	117
6.2.1.1	Franjas de interferência	119
6.2.2	Material de Registro	119
6.2.3	Registro e leitura de um holograma	120
6.2.4	Propriedades	120
6.2.4.1	Perspectividade	121
6.2.4.2	Associatividade	121
6.2.4.3	Distributividade	121
6.2.5	Não linearidade e ruído de intermodulação	121
6.2.6	Holografia dinâmica	122
6.2.6.1	Materiais fotorrefrativos	122
6.2.6.2	Leitura de hologramas dinâmicos	124
6.3	Aplicações da Holografia	125
6.3.1	Holografia para medida de vibrações e deformações	125
6.3.1.1	Medida de vibrações	126
6.3.1.2	Medida de deformações	127
6.3.2	Computação Óptica	128
6.4	Teoria da Informação	128
6.4.1	Capacidade dos sistemas de registro	128
6.4.1.1	Abordagem digital	128
6.4.1.2	Abordagem analógica	129
6.4.2	Conteúdo de informação de uma fotografia	130
6.4.2.1	Exemplo	131
6.4.3	Resposta de um sistema	131
6.4.3.1	Constante de tempo de um amplificador	131
6.4.3.2	Poder de resolução de um sistema óptico	134
6.5	Problemas	135
6.5.1	Capacidade de informações em imagens	135
7	Óptica em Sólidos	137
7.1	Propagação em meios anisotrópicos	137
7.1.1	Equação geral da onda	137
7.1.2	Elipsoide de índice de refração	138
7.1.3	Modos próprios de propagação	138
7.1.3.1	Eixo óptico	139
7.1.3.2	Relação de dispersão	139
7.1.3.3	Cristal uniaxial	140
7.1.4	Refração num material birrefringente	141
7.1.5	Cristal de água	143

7.1.6 Incidencia normal	143
7.2 Óptica não linear	143
7.2.1 Oscilação paramétrica	146
7.2.2 Geração do segundo harmônico	146
7.2.3 “Up-conversion”	147
II Experimentos	149
8 Óptica Geométrica	153
8.1 Objetivos	153
8.2 Metodologia	153
8.3 Exemplo	153
9 Índice de refração	155
9.1 Objetivos	155
9.2 Métodos	155
9.2.1 Ângulo de desvio mínimo	155
9.2.2 Ângulo de Brewster	155
9.2.2.1 Filmes finos: Método de Abélès	156
9.2.3 Interferência numa lâmina de faces paralelas	158
10 Interferometria em filmes finos	159
10.1 Objetivos	159
10.2 Introdução	159
10.3 Roteiro proposto	159
11 Birrefringênc-I	161
11.1 Objetivo	161
11.2 Introdução	161
11.3 Metodologia	161
11.3.1 Exemplo	162
11.3.2 Exemplo	164
12 Birrefringênc-II	167
12.1 Objetivo	167
12.2 Metodologia	167
13 Velocimetria Doppler-I	169
13.1 Objetivos	169
13.2 Introdução	169
13.3 Metodologia	169
14 Velocimetria Doppler-II	171
14.1 Objetivo	171
14.2 Teoria: Oscilador harmônico amortecido	171
14.2.1 Ressonância forçada	172
14.3 Experimento	172
14.3.1 Medida da amplitude	172
14.3.2 Medida da velocidade	172
14.3.3 Linearidade da resposta	173
14.3.4 Fator de qualidade	173
15 Velocimetria Doppler-III	177
15.1 Objetivo	177
15.2 Metodologia	177

16 Coerência e espectro de potência da luz	181
16.1 Introdução	181
16.2 Objetivos	181
16.3 Metodologia	181
16.3.1 Estudo das fontes de luz	181
17 Óptica de Fourier	185
17.1 Difração de micro-orifícios circulares	185
17.1.1 Introdução	185
17.1.2 Objetivos	185
17.1.3 Metodologia	185
17.2 Transformação de Fourier pelas lentes	185
17.2.1 Objetivos:	185
17.2.2 Introdução	185
17.2.3 Roteiro proposto	185
17.3 Multiplexing espacial	187
17.3.1 Objetivos:	187
17.3.2 Introdução	187
17.3.3 Roteiro proposto	187
18 Difração	189
18.1 Objetivos	189
18.2 Introdução	189
18.3 Roteiro proposto	189
19 Cristais Fotorrefrativos	191
19.1 Objetivo	191
19.2 Introdução	191
19.3 Metodologia	192
20 Medida de vibrações por holografia	193
20.1 Objetivos	193
20.2 Introdução	193
20.3 Roteiro proposto	193
21 Coeficiente eletro-óptico	195
21.1 Objetivos	195
21.2 Introdução	195
21.3 Roteiro proposto	195
III APÊNDICE	197
A Delta de Dirac	201
A.1 Pente de Dirac	202
A.2 Função Degrau ou de Heaviside	202
B Transformada de Fourier	203
B.1 Propriedades	203
B.2 Funções especiais	205
B.2.1 Função “Retângulo”	205
B.2.2 Função “triângulo”	205
B.2.3 Função “circ”	205
B.2.4 Gaussiana	206
B.2.5 Função Degrau	206
B.2.6 Função “pente” de Dirac	206
B.3 Relações de incerteza na transformação de Fourier	207

C Teorema de Bernstein	209
D Teorema de amostragem de Whittaker-Shannon	211
D.1 Amostragem	211
D.2 Recuperando a informação	212
D.3 Conteúdo da informação	212
D.4 Considerações	212
E Processos Estocásticos	213
E.1 Variável aleatória	213
E.1.1 Função distribuição	213
E.1.2 Densidade de probabilidade	213
E.2 Processos Estocásticos	214
E.2.1 Estatística de primeira e de segunda ordem	214
E.2.2 Valor médio e autocorrelação	214
E.2.3 Processos estacionários	215
E.2.4 Ergodicidade e média temporal	215
E.2.4.1 Ergodicidade do valor médio	215
E.2.4.2 Ergodicidade da Correlação	216
F Alinhamento de lentes	217
G Interferômetro de Michelson.	221
G.1 Introdução	221
G.2 Ajuste do instrumento	221
H Fotodiodos	225
H.1 Regime de operação	225
H.1.1 Regime fotovoltaico	225
H.1.2 Regime fotoconductive	225
H.2 Amplificadores operacionais	228
H.2.1 Uso dos Amplificadores Operacionais	228
I Fontes de luz	231
I.1 Lâmpada de filamento incandescente	231
I.2 “Light-emitting diodes” LEDs	231
I.3 Lâmpadas de descarga: Na e Hg	231
I.4 Laser	233

Listas de Figuras

1.1	Matriz da refração e da transmissão	4
1.2	Calculo objeto-imagem	5
1.3	Planos focais	6
1.4	Planos principais	6
1.5	Pontos nodais	6
1.6	Desenho geométrico	7
1.7	Lente grossa	7
1.8	Lente pcx	8
1.9	Sistema multiplas lentes	10
1.10	Sistema lentes e diafragmas	10
1.11	Calculo pupila	11
1.12	Campo de visão	11
1.13	Lente de campo	11
1.14	Lentes	13
1.15	Sistema de duas lentes grossas	14
1.16	Indice de refração - vidro BK7	15
2.1	Onda	17
2.2	Batimento de duas ondas	20
2.3	Reflexão total e onda evanescente	23
2.4	Efeito Doppler	24
3.1	Luz polarizada-polarizador de fios	28
3.2	Lâmina de retardo	29
3.3	Lâmina de retardo	30
3.4	Onda linearmente polarizada a 45°	32
3.5	Reflexão e refração de ondas planas	34
3.6	Reflexão de Fresnel	35
3.7	Reflexão interna de Fresnel	36
3.8	Reflexão externa de Fresnel	36
3.9	Ângulo de Brewster	36
3.10	Reflexão total	38
3.11	Onda evanescente	38
3.12	Lâmina de retardo	39
3.13	Medida de elipticidade de polarização	40
4.1	Niobato de litio	44
4.2	Niobato de litio	44
4.3	Fendas de Young	45
4.4	Lâmina de faces paralelas	45
4.5	Interferômetro de Michelson	46
4.6	Sinal de efeito Doppler	47
4.7	Sucessão de pulsos emitidos por uma fonte incoerente	49
4.8	Sucessão de pulsos sincronizados, emitidos por uma fonte laser, coerente	49
4.9	Superposição de dois feixes (formados por pulsos) mutuamente defasados	49

4.10	Modelo de pulsos de luz	51
4.11	Grau de coerência	52
4.12	Pulso amortecido	58
4.13	Luz branca	58
4.14	Interferograma LED 520nm	59
4.15	Pulso gaussiano	59
4.16	Interferogramas teorico e experimental	59
4.17	Interferograma experimental	60
4.18	Espectro LED 520nm	60
4.19	Espectro de LED	61
4.20	Espectro de potência medido para um LED	61
4.21	Filtro interferencial	61
4.22	Experiênciia de Michelson com filtro	61
4.23	Transmitância de um filme fino	66
4.24	Inversa da transmitância de filme fino	66
4.25	Sinal Doppler	67
4.26	Experimento de interferência	68
4.27	Visibilidade	68
4.28	Franjas de interferencia LED 520nm	69
4.29	Espectro de um diodo	70
5.1	Teoria de Huygens	76
5.2	Difração por fenda larga	77
5.3	Difração por duas fendas largas	78
5.4	Multiplas fendas de largura finita	78
5.5	Multiplas fendas: Pente de Dirac	78
5.6	Espectro de difração de uma conjunto de 20 fendas retangulares	79
5.7	Envelope de modulação das ordens de difração de uma rede	79
5.8	Largura das ordens de difração de uma rede	79
5.9	Difração de uma rede come fendas infinitamente estreitas	80
5.10	Teorema de Gauss	82
5.11	Formulação de Kirchhof	83
5.12	Construção de Kirchhof	84
5.13	Formulação de Kirchhof	85
5.14	Difração de Kirchhof	85
5.15	Difração de Rayleigh-Sommerfeld	86
5.16	Aberturas complementárias	87
5.17	Sistema linear-Lente não perfeita	88
5.18	Sistema linear-lente perfeita	89
5.19	Efeito Goose-Hänchen	91
5.20	Função de Airy	94
5.21	Rede de transmissão retangular	97
5.22	Intensidade de difração de uma rede retangular de amplitude	98
5.23	Padrão de difração para rede retangular de amplitude com 5 e 500 fendas	98
5.24	Rede retangular de fase	99
5.25	Difração de rede retangular de fase	100
5.26	Rede “blazed”	101
5.27	Espectro de rede “blazed”	101
5.28	Difração de rede “blazed” centrada em +1	101
5.29	Atraso de fase numa lente	103
5.30	Significação física	104
5.31	Objeto encostado na entrada da lente	104
5.32	Objeto antes da lente	105
5.33	Objeto depois da lente	106
5.34	Dupla TFourier	107
5.35	Suavizado de imagem	108
5.36	Edurecimento de imagem	108

5.37 Imagem modulada	109
5.38 Imagem modulada e filtrada	109
5.39 Imagens multiplexadas e filtradas	110
5.40 Imagens multiplexadas e filtradas	110
5.41 Imagens multiplexadas e filtradas	110
5.42 Difração de um arranjo ordenado de microfuros numa lâmina	112
5.43 Rede de transmissão	113
6.1 Onda conjugada	118
6.2 Onda cilíndrica	118
6.3 Franjas de interferência	119
6.4 Transmissão de placa fotográfica	119
6.5 Holograma em placa foto	120
6.6 Holograma reconstruído por onda de referência	120
6.7 Holograma reconstruído por onda objeto	120
6.8 Reconstrução holográfica pela onda de referência conjugada	121
6.9 Distributividade	122
6.10 Cristais fotorrefrativos de $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$	123
6.11 Cristal de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ bruto	124
6.12 Cristais de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ e $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$	124
6.13 Registro da luz em materiais fotorrefrativos	125
6.14 Modulação de índice em material fotorrefrativo	125
6.15 Medida de vibrações e deformações	126
6.16 Membrana de alto-falante vibrando	127
6.17 Deformação de lâmina	128
6.18 Computação óptica	129
6.19 Capacidade: abordagem analógica	129
6.20 Fotografia com processamento	132
6.21 Amplificador eletrônico	133
6.22 Amplificação sub-amortecida	133
6.23 Imagem de uma borda	133
6.24 Função de transferência óptica coerente	134
6.25 Função de transferência óptica incoerente	134
7.1 Elipsóide de índice de refração	139
7.2 Plane wave refractive indices	139
7.3 Superfícies de onda normal	140
7.4 Onda ordinária	141
7.5 Onda extraordinária	141
7.6 Ondas ordinária e extraordinária em cristal uniaxial	142
7.7 Inversa da frente de onda para a onda ordinária e extraordinária num material birrefringente uniaxial	142
7.8 Inversa da frente de onda para a onda ordinária e extraordinária num material birrefringente biaxial	142
7.9 Refração num material birrefringente uniaxial	143
7.10 Vetores de propagação para ondas ordinária e extraordinária na refração num meio birrefringente	143
7.11 Refração num cristal de água (gelo)	144
7.12 Refração em cristal de calcita	144
7.13 Refração em cristal de calcita	144
8.1 Objetiva	154
8.2 Esquema da Objetiva	154
8.3 Amplificação vs distância imagem	154
8.4 Amplificação reciproca vs distância objeto	154
9.1 Montagem de Brewster com LEDs a olho nu	156
9.2 Esquema do experimento de Abélès	156
9.3 Abeles-maior que Brewster	157

9.4 Abeles-Brewster	157
9.5 Abeles-menor que Brewster	157
9.6 Lâmina de faces paralelas	158
 11.1 Montagem: birrefringência em filmes	162
11.2 Gráfico da espessura d da lâmina birrefringente em função do número de ordem N para diferentes λ	164
11.3 Gráfico da espessura d da lâmina birrefringente em função do número de ordem N para diferentes λ	164
11.4 Lâmina de retardo para 633 nm	165
11.5 Elipticidade da luz polarizada por uma lâmina	165
 14.1 Doppler-Altofalante	173
14.2 Resposta de um alto-falante	174
14.3 Amplitude de um alto-falante em função da freqüência	175
14.4 Velocidade normalizada pela corrente	176
14.5 Velocidade normalizada pela corrente	176
 15.1 Efeito da largura de banda finita de um fotodetector	178
15.2 Largura de banda finita de um detector. Detalhe	178
15.3 Freqüência de corte de um fotodetector	179
 16.1 Espectro LED 504	182
16.2 Intensidade de franjas-LED 504	182
16.3 Visibilidade de um led violeta	182
16.4 Espectro de potência de alguns leds comerciais	182
 17.1 Difração de um orifício circular	186
17.2 Difração de um arranjo ordenado de microfuros	186
17.3 Difração de lâmina retrorefletiva	186
 21.1 Configuração transversal	196
B.1 Largura de uma função	207
D.1 Idealização da amostragem	211
F.1 Montagem para alinhamento de lentes	218
F.2 Esquema de lente não centrada	218
F.3 Foto de lente não centrada	218
F.4 Esquema de lente parcialmente ajustada	219
F.5 Foto de lente parcialmente ajustada	219
F.6 Esquema de lente desalinhada	219
F.7 Foto de lente desalinhada	219
F.8 Esquema de lente centrada e alinhada	220
F.9 Foto de lente centrada e alinhada	220
 G.1 Esquema do Interferômetro de Michelson	222
G.2 Franjas de interferência com fonte de luz monocromática extensa	223
 H.1 Junção pn	226
H.2 Junção PIN	226
H.3 Fotodetector: modo fotovoltaico	226
H.4 Fotodetector: modo fotocondutivo	227
H.5 Resposta espectral de fotodetector	227
H.6 Amplificador operacional	228
 I.1 Lâmpada incandescente	232
I.2 Radiação de Corpo Negro	232
I.3 Espectro de LED em 470 nm	232
I.4 Espectro de lâmpada de mercurio	232

I.5	Espectro da lampada de sodio	232
I.6	Espectro de laser de diodo em 676 nm	233

Lista de Tabelas

11.1 Índice de refração do Quartzo	163
11.2 Lâmina birrefringente comercial de quartzo	163

Parte I

Teoria

Capítulo 1

Óptica Geométrica

Este capítulo trata da Óptica geométrica e utiliza uma abordagem matricial para descrever a trajetória da luz nas lentes e sistemas de lentes e a formação de imagens, a partir do traçado de raios (“ray tracing”) [1]. No inicio esta abordagem matricial pode parecer um pouco mais complicada que a tradicional, mas logo se verá que ela simplifica muito os cálculos, sobretudo de sistemas mais complexos. Fica a ressalva que nos limitaremos à Óptica paraxial e que não levaremos em conta nenhum tipo de aberração.

1.1 Matrizes ópticas

O percurso que um raio de luz faz desde que é emitido por um objeto até que forma uma imagem na saída de um sistema de lentes, pode ser descrito por matrizes. Operacionalmente é muito fácil e elegante. No que segue não levaremos em conta as aberrações ópticas que as lentes normalmente produzem.

1.1.1 Refração e translação

Na Fig.1.1 pode-se ver a trajetória de um raio através de uma lente. Convencionaremos em colocar um sub-índice “1” para as quantidades referentes à primeira interface ar-vidro da lente, e “2” para a segunda. A quantidade levará uma “prima” se for à direita da superfície. Assim x_1 na figura é a altura onde o raio de luz atinge a interface, do lado do ar, e x'_1 é do lado do vidro, sendo que obviamente neste caso $x_1 = x'_1$, mas $n_1 \neq n'_1$.

Vamos calcular a refração do raio na primeira interface, usando a lei de Snell assim

$$n_1 \sin \theta_1 = n'_1 \sin \theta'_1 \quad (1.1)$$

$$\theta_1 = \alpha_1 + \phi \quad \theta'_1 = \alpha'_1 + \phi \quad (1.2)$$

Utilizando ângulos muito pequenos (aproximação paraxial) podemos reescrever a Eq.(1.1) assim

$$n_1(\alpha_1 + \phi) = n'_1(\alpha'_1 + \phi) \quad (1.3)$$

$$\text{ou seja} \quad n_1(\alpha_1 + \frac{x_1}{r}) = n'_1(\alpha'_1 + \frac{x_1}{r}) \quad (1.4)$$

$$\text{finalmente} \quad n'_1 \alpha'_1 = n_1 \alpha_1 - kx_1 \quad k \equiv \frac{n'_1 - n_1}{r} \quad (1.5)$$

o que pode ser escrito como uma matriz

$$\begin{bmatrix} n'_1 \alpha'_1 \\ x'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

que representa apenas o efeito de refração de primeira interface. Já a translação da primeira até a segunda interface dentro da lente pode ser escrita, matricialmente, assim

$$\begin{bmatrix} n_2 \alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t}{n'_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \alpha'_1 \\ x'_1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

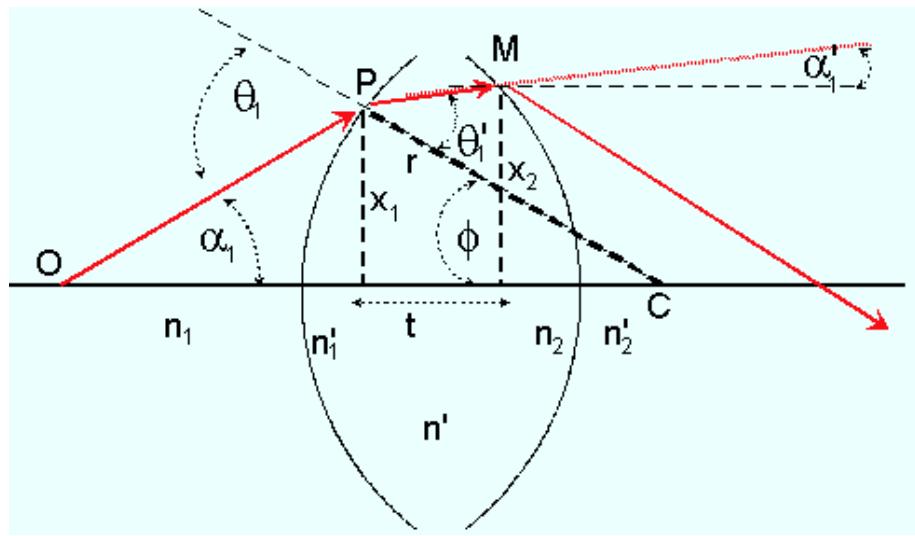


Figura 1.1: Um raio sai do ponto \mathbf{O} fazendo um ângulo α_1 com o eixo óptico da lente, incide no ponto \mathbf{P} da primeira superfície da lente com um ângulo de incidência θ_1 e refrata com um ângulo θ'_1 , se propagando dentro da lente até a outra superfície onde refrata no ponto \mathbf{M} para fora da lente, se propagando fora da lente até cortar o eixo óptico. O centro de curvatura da primeira superfície da lente está em \mathbf{C} e o seu raio de curvatura é r . A segunda interface da lente, na figura, tem um raio de curvatura com sinal oposto ao da primeira interface. Se este último foi considerado positivo, o segundo será necessariamente negativo. Supomos uma aproximação paraxial onde x_1 e x_2 são muito menores que r e consequentemente a distância t é aproximadamente igual à espessura máxima da lente. O desenho está propositalmente desproporcionado para facilitar a visualização dos elementos.

1.1.2 Descrição de uma lente

A descrição completa de uma lente, supondo o raio vindo da esquerda para a direita, se faz então com uma sequência de matrizes que represente sucessivamente a refração na primeira interface R_1 , a translação dentro da lente T e a refração na segunda interface R_2 assim

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}_2 T \mathcal{R}_1 \quad |\mathcal{S}| = 1 \quad (1.8)$$

onde as matrizes acima são

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k_1 = \frac{n'_1 - n_1}{r_1} \quad (1.9)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t}{n'_1} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & -k_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k_2 = \frac{n'_2 - n_2}{r_2} \quad (1.11)$$

Substituindo as expressões das Eqs.(1.9), (1.10) e (1.11) na Eq.(1.8) e remanejando, resulta

$$S = \begin{bmatrix} b & -a \\ -d & c \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

onde

$$a = k_1 + k_2 - k_1 k_2 t / n \quad (1.13)$$

$$b = 1 - k_2 t / n \quad (1.14)$$

$$c = 1 - k_1 t / n \quad (1.15)$$

$$d = -t / n \quad (1.16)$$

$$k_i = \frac{n'_i - n_i}{r_i} \quad i = 1, 2 \quad (1.17)$$

sendo que $n = n'_1 = n_2$

Note que os determinantes das matrizes de refração e de translação valem sempre um (1) e por isso todas as outras matrizes resultantes do produto d'áquelas deverão ter determinantes unitários também.

1.1.3 Traçado de raios

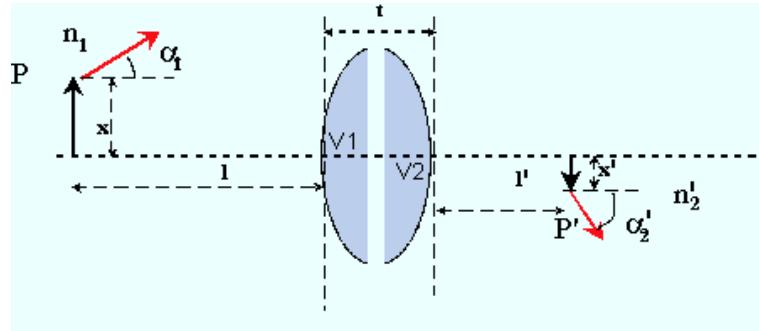


Figura 1.2:

Seja o ponto **P** à distância l na frente do vértice V_1 da lente na Fig.1.2. Desse ponto, colocado uma distância x acima do eixo óptico, sai um raio fazendo um ângulo α_1 com o dito eixo, num meio com índice de refração n_1 . Após atravessar a lente ela chegará ao ponto **P'**, a uma distância l' à direita do vértice V_2 e a uma distância x' por debaixo do eixo, com um ângulo α'_2 , num meio com índice de refração n'_2 , como indicado na figura. A seqüência de translações e refrações pode ser descrita pela seqüência de matrizes correspondentes assim

$$\begin{bmatrix} n'_2 \alpha'_2 \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l'/n'_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ -d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ x \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

1.1.4 Formação de imagem

O produto das três matrizes 2X2 na Eq.(1.18) pode ser calculado resultando uma outra matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l'/n'_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ -d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l/n_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - al/n_1 & -a \\ \frac{bl'}{n'_2} - d - \frac{al'}{n'_2 n_1} + \frac{cl}{n_1} & c - \frac{al'}{n'_2} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Se o ponto P' é a imagem de P , nesse caso a matriz na Eq.(1.19) pode-se simplificar assim

$$\begin{bmatrix} b - al/n_1 & -a \\ \frac{bl'}{n'_2} - d - \frac{al'}{n'_2 n_1} + \frac{cl}{n_1} & c - \frac{al'}{n'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\beta & -a \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

onde β é a amplificação, e o elemento “0” na matriz indica que o tamanho da imagem não pode depender do qual seja o ângulo do raio que sai do objeto para formar a imagem. O termo $1/\beta$ na matriz deriva do fato que o determinante dessa matriz deve ter valor 1.

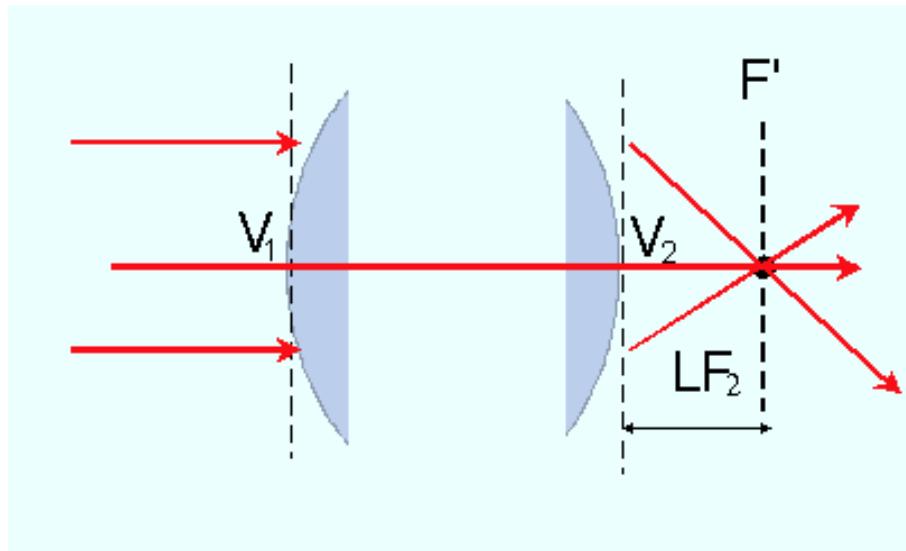
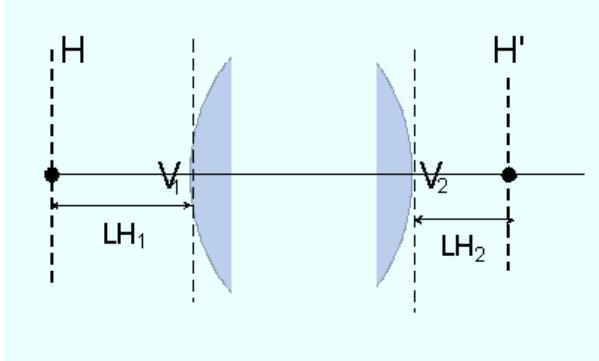
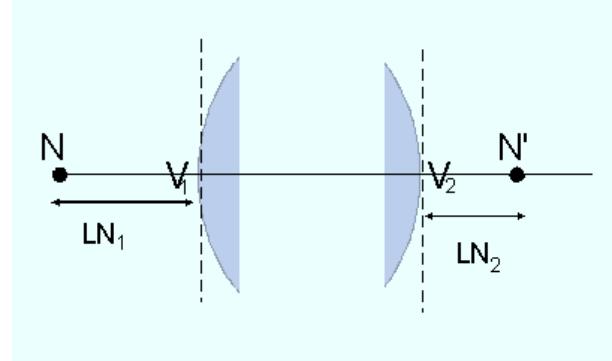
1.1.5 Planos cardinais

Utilizando as matrizes podemos calcular as posições dos planos cardinais. Assumiremos também, de agora em diante, que fora das lentes temos apenas ar, de forma que $n_1 = n'_2 = 1$.

1.1.5.1 Plano focal

Podemos calcular as posições dos planos focais de entrada (F) e de saída (F'), medidos desde os vértices de entrada (V_1) e de saída (V_2) da lente respectivamente. Para o primeiro caso basta substituir, no elemento 22 da matriz na Eq.(1.20)

$$l' \Rightarrow \infty \quad (1.21)$$

Figura 1.3: *Plano focal imagem*Figura 1.4: *Planos principais*Figura 1.5: *Pontos nodais*

o que resulta em $1/\beta = 0$ e que, visto o elemento 11 da primeira matriz na Eq.(1.20) nos permite calcular

$$l = LF_1 = b/a \quad (1.22)$$

Inversamente, fazendo agora a substituição $l \Rightarrow \infty$ no elemento 11 e atentando para o 22 da matriz em Eq.(1.20), resulta (vide Fig.1.3)

$$l' = LF_2 = c/a \quad (1.23)$$

1.1.5.2 Planos principais

Os planos principais de entrada (H) e de saída (H'), representados na Fig.1.4, são definidos na relação objeto-imagem, como os planos onde a imagem é direita e de igual tamanho que o objeto. Substituindo então l e l' por LH_1 e LH_2 respectivamente, considerando que nesse caso $\beta = 1$, atentando para os elementos 11 e 22 na primeira matriz na Eq.(1.20), resulta

$$LH_1 = \frac{b-1}{a} \quad (1.24)$$

$$LH_2 = \frac{c-1}{a} \quad (1.25)$$

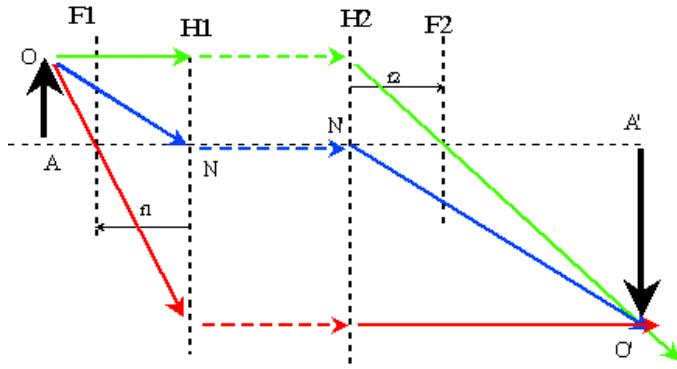


Figura 1.6: A figura mostra os planos e pontos cardinais da lente grossa da Fig.1.7 sem a propria lente

1.1.5.3 Distância focal

As correspondentes distâncias focais (f_1) e (f_2), que são medidas a partir dos planos principais, são então

$$f_1 = LF_1 - LH_1 = 1/a \quad (1.26)$$

$$f_2 = LF_2 - LH_2 = 1/a \quad (1.27)$$

1.1.5.4 Pontos nodais

São dois pontos, representados na Fig.1.5 sobre o eixo óptico, um no espaço de entrada (N) e outro no de saída (N') onde os raios conservam a inclinação, isto é, onde

$$\alpha_1 = \alpha'_2 \quad x_1 = x'_2 = 0 \quad (1.28)$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} n'_2 \alpha'_2 \\ x'_2 \end{bmatrix}_{N'} = \begin{bmatrix} 1/\beta & -a \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix}_N \quad (1.29)$$

e substituindo

$$\alpha_1 = \alpha'_2 \quad x_1 = 0 \quad (1.30)$$

na Eq.(1.29), obtemos

$$n'_2 \alpha'_2 = n_1 \alpha_1 \frac{1}{\beta} - ax_1 \quad (1.31)$$

Pela definição de ponto nodal na Eq.1.30, substituindo na Eq.(1.31), sempre com $n'_2 = n_1 = 1$, resulta em

$$\beta = 1 \quad (1.32)$$

o que significa que N e N' estão nos planos H e H' respectivamente e ambos, pela condição $x_1 = x'_2 = 0$, sobre o eixo óptico.

1.1.6 Traçado geométrico

A definição dos planos e pontos cardinais nos permite utilizá-los para traçar raios e calcular a formação de imagens de forma puramente geométrica como no caso representado na Fig.1.6 Sabendo a posição dos planos e pontos cardinais podemos calcular a posição da imagem $\overline{A' - O'}$ e do objeto $\overline{A - O}$, utilizando alguns raios de trajetória conhecida, lembrando que se trata de uma representação abstrata e que as trajetórias mostradas na Fig.1.6 nem sempre são reais. Da figura podemos calcular

$$l_o/h_o = l_i/h_i \quad A \equiv h_i/h_o = l_i/l_o \quad (1.33)$$

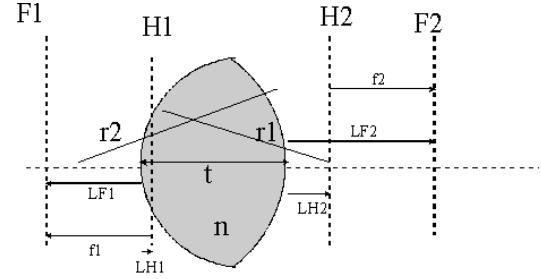


Figura 1.7: Lente grossa com sus planos cardinais

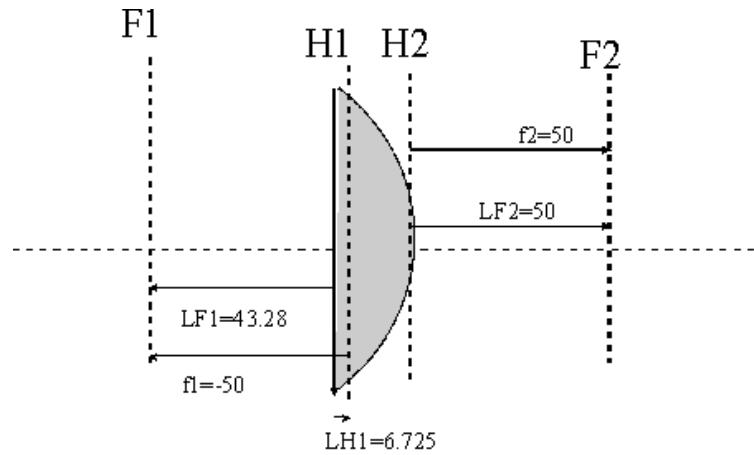


Figura 1.8:

onde A é a amplificação da imagem com as definições:

$$l_o \equiv \overline{A - N} \quad l_i \equiv \overline{A' - N'} \quad h_o \equiv \overline{A - O} \quad h_i \equiv \overline{A' - O'} \quad (1.34)$$

Temos também que

$$\frac{h_o}{l_o - f} = \frac{h_i}{f} \quad \frac{h_o}{f} = \frac{h_i}{l_i - f} \quad (1.35)$$

onde f é a distância focal e de onde chegamos à fórmula bem conhecida:

$$\frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_i} = \frac{1}{f} \quad (1.36)$$

1.1.7 Exemplo

Seja o caso de uma lente plana convexa grossa como indicada na Fig.1.8 com as características: 12mm de espessura no centro, 39.24mm de radio de curvatura e índice de refração de 1.785. Calcule as posições dos planos focais e principais assim como a distância focal.

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0 \\
k_2 &= (1 - 1.785)/(-39.24) = 0.020 \text{ mm}^{-1} \\
a &= 0 + 0.02 = 0.02 \text{ mm}^{-1} \\
b &= 1 - 0.02 \times 12/1.785 = 0.8655 \\
c &= 1 \\
d &= -12/1.785 = -6.7227 \text{ mm} \\
LH_1 &= (b - 1)/a = (0.8655 - 1)/0.02 = -6.725 \text{ mm} \\
LH_2 &= (c - 1)/a = 0 \\
LF_1 &= b/a = 0.8655/0.02 = 43.275 \text{ mm} \\
LF_2 &= c/a = 1/0.02 = 50 \text{ mm} \\
f &= 1/a = 1/0.02 = 50 \text{ mm}
\end{aligned}$$

1.1.8 Sistema de lentes finas

Um sistema formado por duas (ou mais) lentes finas pode ser representado por uma matriz. Para isso identificamos as matrizes de cada uma das (duas) lentes e dos espaçamento T entre elas

$$S_1 = \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ -d_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D & 1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$\mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -d_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

onde

$$a_i = \frac{1}{f'_i} = \frac{1}{f_i} \quad (1.40)$$

$$b_i = c_i = 1 \quad (1.41)$$

$$d_i = 0 \quad (1.42)$$

$$(l_H)_i = (l'_H)_i = 0 \quad (l_F)_i = (l'_F)_i = \frac{1}{a_i} \quad (1.43)$$

e calculamos o produto das matrizes

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \mathcal{T} \mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} b & -a \\ -d & c \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

com os parâmetros

$$a = \left(1 - \frac{D}{f_2}\right) \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (1.45)$$

$$b = 1 - \frac{D}{f_2} \quad (1.46)$$

$$c = 1 - \frac{D}{f_1} \quad (1.47)$$

Substituindo a expressão de a acima na Eq.(1.27) podemos calcular a distância focal do sistema de lentes

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - D} \quad (1.48)$$

Também podemos calcular as posições dos planos principais do sistema, substituindo as expressões acima para a , b e c nas Eqs.(1.24) e (1.25) assim

$$l_H = \frac{-Df_1}{f_1 + f_2 - D} \quad (1.49)$$

$$l'_H = \frac{-Df_2}{f_1 + f_2 - D} \quad (1.50)$$

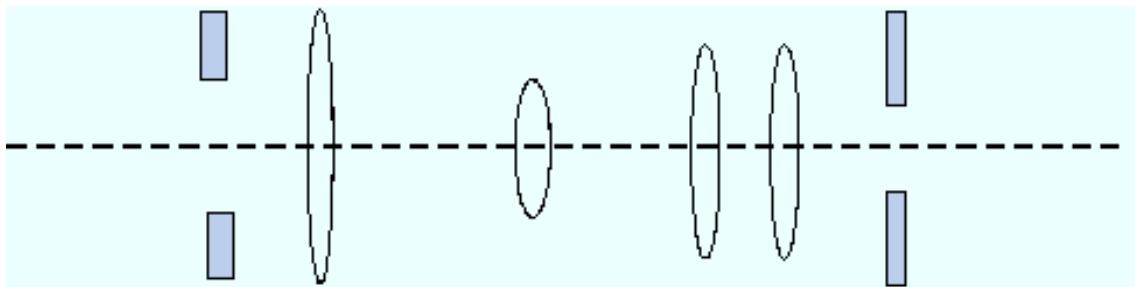


Figura 1.9: Sistema óptico com múltiplas lentes.

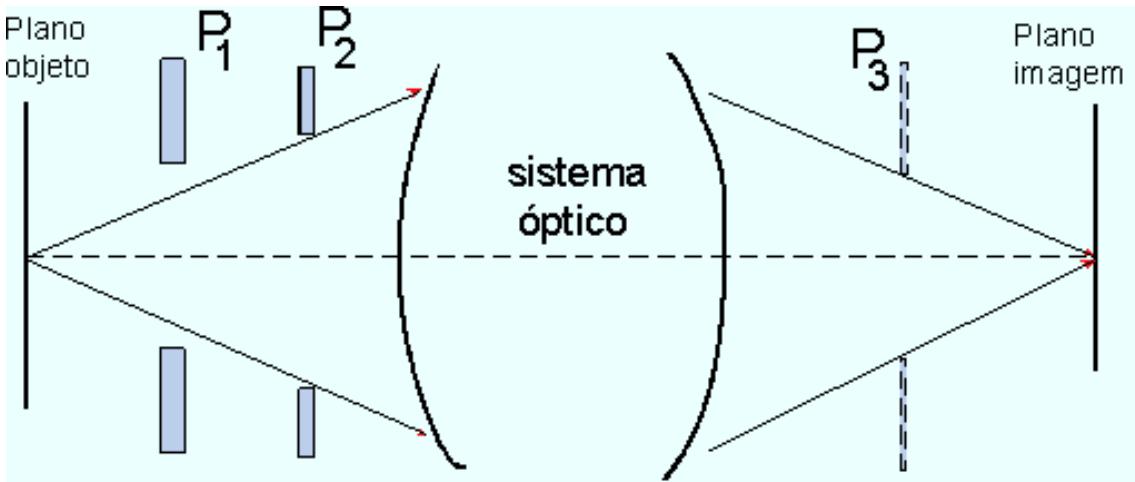


Figura 1.10: Sistema óptico com múltiplas lentes e diafragmas.

1.2 Diafragmas em sistemas ópticos

Num instrumento formado por várias lentes, como esquematizado na Fig.1.9, os tamanhos destas devem ser calculados de forma de casar umas com as outras. Uma lente pequena demais pode ser a responsável por uma limitação indesejada da quantidade de luz no sistema assim como uma lente grande demais pode ser desnecessária por não contribuir com a luminosidade do sistema que estará limitado pelas outras lentes. Lentes pequenas demais ou grandes demais são prejudiciais porque prejudicam o desempenho do sistema ou aumentam desnecessariamente o tamanho e o custo do instrumento sem nenhuma vantagem técnica. Por isso o tamanho de cada lente dentro do sistema deve ser calculado e adequado ao conjunto.

No caso ilustrado na Fig.1.10, por exemplo, existem dois diafragmas reais P_1 e P_2 no chamado "espaço-objeto" e um diafragma imaginário P_3 no chamado "espaço-imagem". O diafragma que de fato está limitando a formação da imagem pelo sistema é P_2 e por isso ele é considerado a "pupila de entrada". A pupila imaginária P_3 na saída é apenas a imagem, no "espaço-imagem", da pupila P_2 e, seja ela imaginária ou real, ela é a "pupila de saída". Do ponto de vista da formação da imagem, P_1 é superfluo e P_2 poderia ser eliminado se P_3 fosse um diafragma real. No caso do sistema simples formado por duas lentes iguais de diâmetro d e ilustrado na Fig.1.11, que forma a imagem A' do ponto A , a pupila de entrada PE é calculada fazendo-se a imagem da última lente, pela primeira lente, no espaço-objeto. Isso leva a definir a posição ($4f/3$ na frente da primeira lente) da PE , seu diâmetro ($d/3$) e a abertura angular (α) do sistema. Esta última é uma medida da luminosidade do sistema, isto é, da quantidade de luz que entra e que será utilizada para formar a imagem.

1.2.1 Campo de visão

Na Fig.1.12 mostra-se como calcular o campo de visão que é simplesmente o tamanho do objeto que pode ser visto pelo sistema. Para isso traçamos uma linha unindo o ponto mais afastado do eixo, no plano-objeto, que ainda possa chegar até a última lente. No caso essa linha é a tracejada que une a borda da pupila de entrada, o centro da primeira lente e a borda da última. O diâmetro do campo neste caso é $d/2$. Uma "lente-de-campo" pode aumentar bastante o campo deste sistema, como ilustrado na Fig.1.13. A lente de campo LC ,

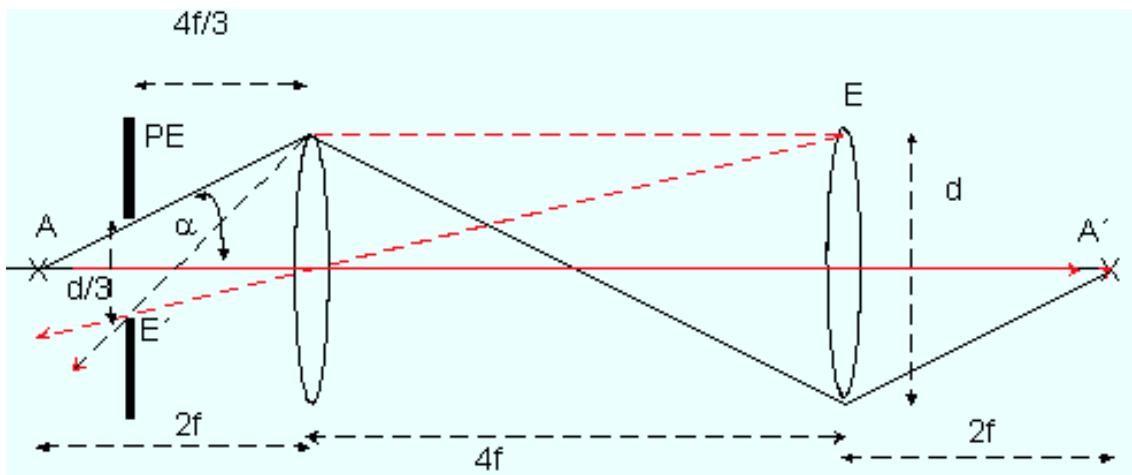


Figura 1.11: Cálculo da pupila de entrada

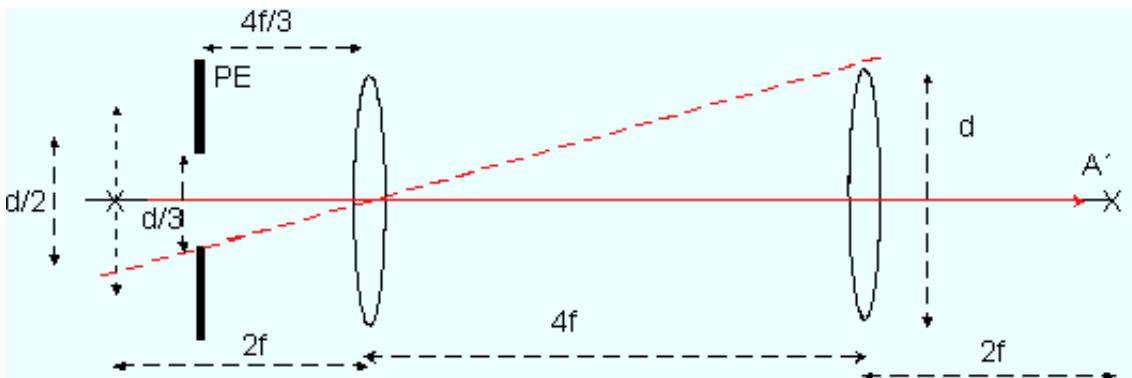


Figura 1.12: Campo de visão do instrumento

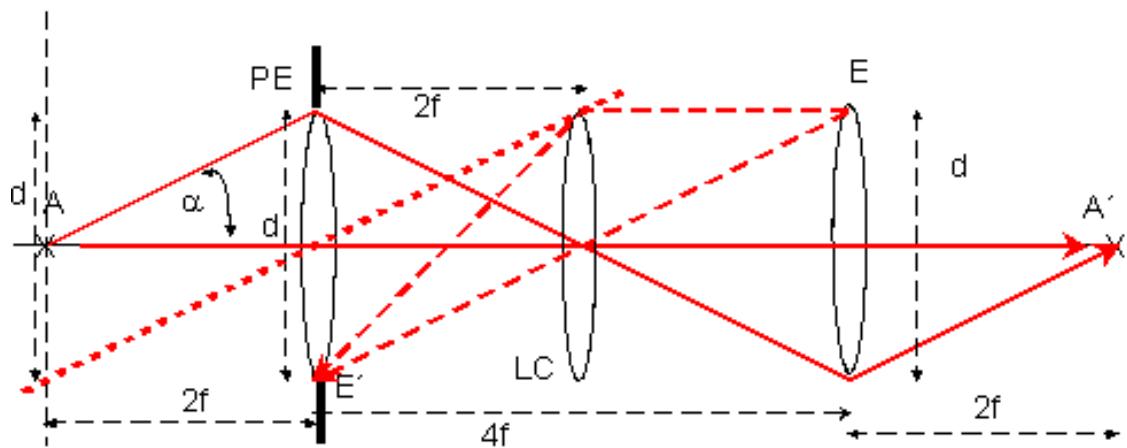


Figura 1.13: Campo de visão do instrumento com "lente de campo"

que neste caso é idêntica às outras, está colocada no meio delas, faz a imagem da última lente cair exatamente sobre a primeira e dessa forma a pupila de entrada fica exatamente do mesmo tamanho e no mesmo lugar que a primeira lente. Como se vê pela Fig.1.13, a abertura angular não muda, mas o campo fica agora maior e valendo \mathbf{d} . Pode-se constatar também que nada muda na formação da imagem \mathbf{A}' do objeto \mathbf{A} .

1.3 Problemas

1.3.1 Planos Cardinais

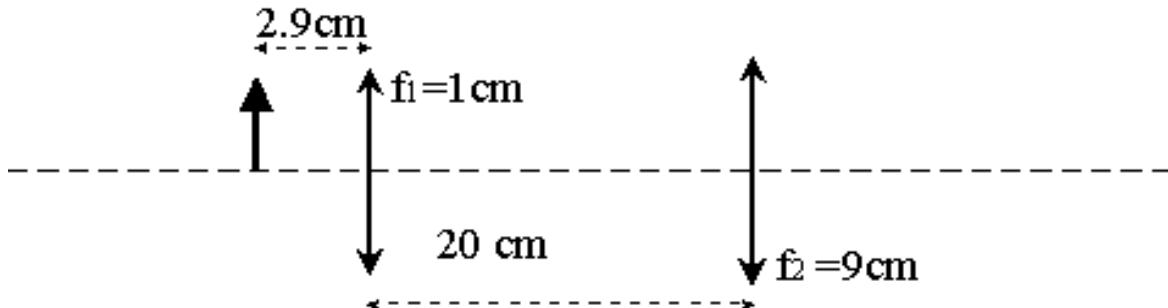
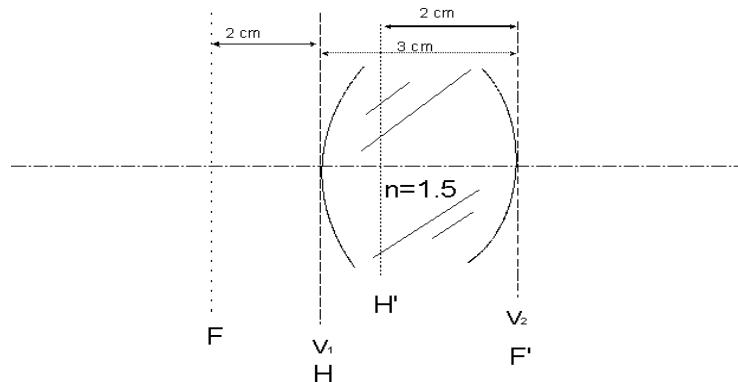


Figura 1.14:

Um sistema óptico está formado por duas lentes convergentes, a primeira com $f_1=1\text{cm}$ e a segunda $f_2=9\text{cm}$, separadas por uma distância de 20cm, como ilustrado na Fig.1.14.

- Calcule a posição dos planos principais e focais do sistema. Faça um desenho indicando as posições desses planos.
Resp.: $LH_1 = 20\text{mm}$; $LH_2 = 180\text{mm}$; $f = -9\text{mm}$
- Usando os planos acima calculados, calcule (gráfica ou analiticamente) a posição da imagem de um objeto colocado a 2.9cm na frente da primeira lente. Em ambos os casos, faça um esquema indicando claramente as posições e distâncias
RESP.: $l' = 175.50\text{mm}$

1.3.2 Lente grossa



Uma lente grossa de 3cm de espessura, tem os planos principais e focais posicionados como indicado na figura.

- Calcule a matriz que representa a referida lente
RESP.: (em mm):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/20 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule (gráfica ou analiticamente) a posição e o tamanho de um objeto colocado 4cm na frente do primeiro plano V_1 da lente, descansando sobre a linha do eixo óptico e com 1cm de altura.
RESP.: $l = 40\text{mm} = 2f \Rightarrow l' = 20\text{mm}; \beta = -1$
- Calcule a matriz do sistema objeto-imagem para o item acima
RESP.: (em mm)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1/20 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

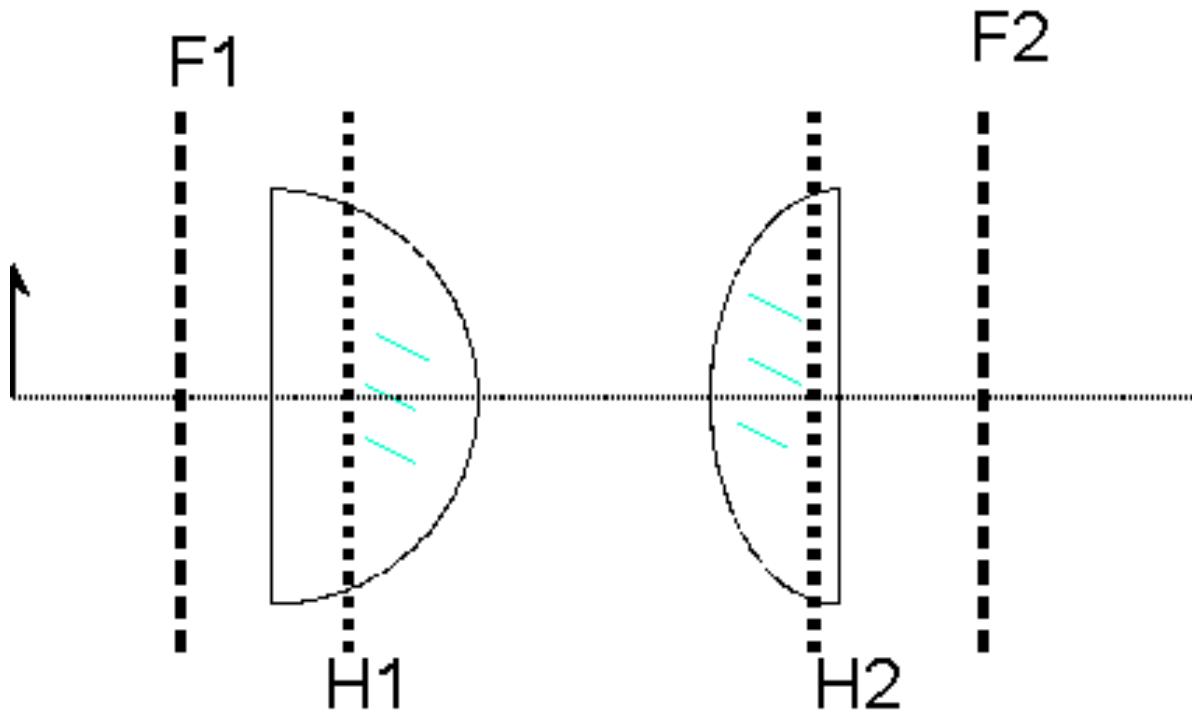


Figura 1.15: Sistema de duas lentes grossas.

1.3.3 Sistema de lentes

No esquema da figura 1.15 vemos um sistema de duas lentes onde estão indicados os planos principais e focais. Um objeto esta colocado a uma distância igual à distância focal à esquerda do plano focal de entrada do sistema, como indicado na figura. Calcule a posição e tamanho da imagem usando:

1. procedimento puramente gráfico
2. algum procedimento numérico

1.3.4 Sistema de duas lentes

Preciso utilizar uma lente biconvexa grossa (espessura 16.6 mm) com distância focal de 55.14 mm. Seria possível ela ser substituída por duas lentes biconexas iguais mas de espessura metade (8.3 mm) colocadas lado a lado para se obter a mesma distância focal da grossa? Quais as características delas? Suponha o mesmo vidro, com $n=1.5$.

RESPOSTA: Sim, é possível. Elas deveriam ter raio de curvatura de 106 mm (o da lente grossa seria de 52.225 mm), o que resultaria num foco de 107.402 mm para cada uma delas.

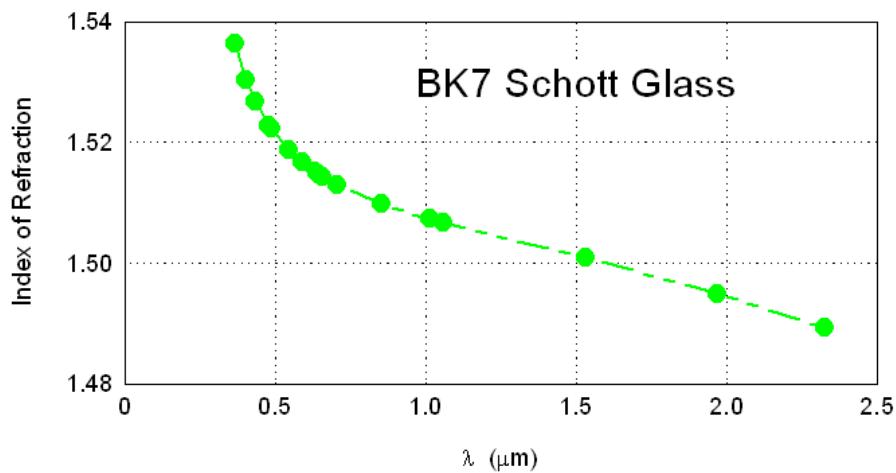


Figura 1.16: *Indice de refração - vidro BK7 Schott.*

Capítulo 2

Propagação da luz

Neste capítulo trataremos da propagação da luz em meios isotrópicos dando ênfase ao seu caráter ondulatório. A propagação em meios anisotrópicos será tratada no Capt.7. Daremos especial atenção ao uso da formulação complexa para representar uma onda, ao uso de operadores vetoriais e à formulação da onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell.

2.1 Ondas harmônicas

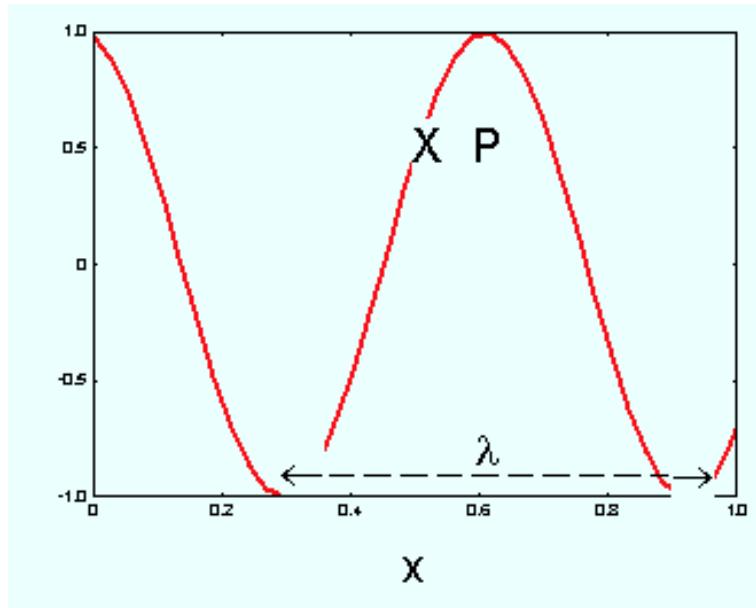


Figura 2.1: *Onda harmônica*

Uma onda harmônica plana e unidimensional se propagando ao longo do eixo x , como a esquematizada na Fig.2.1, pode ser descrita por

$$a(x, t) = \cos(kx - \omega t) \quad (2.1)$$

$$\phi(P) = kx - \omega t \quad (2.2)$$

$$k \equiv 2\pi/\lambda \quad \omega \equiv 2\pi/T \quad (2.3)$$

onde $\phi(P)$ representa a fase associada a um ponto "P" da onda que se propaga junto com ela e onde λ é o comprimento de onda e T é o período temporal. Para calcular a velocidade de fase dessa onda podemos calcular a velocidade desse ponto "P". Considerando que a derivada total da fase desse ponto deve ser zero pois a fase

do ponto é invariante temporalmente, podemos calcular

$$\frac{d\phi(P)}{dt} = \frac{\partial\phi(P)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi(P)}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\phi(P)}{dt} = k\frac{dx}{dt} + \omega\partial t = 0 \quad (2.5)$$

Definindo a velocidade de fase como

$$v \equiv \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

concluimos que

$$v = \omega/k \quad (2.7)$$

2.1.1 Representação complexa

A onda em Eq.(2.1) pode ser escrita como a parte real de uma formulação complexa

$$a(x, t) = \Re\{A(x, t)\} \quad (2.8)$$

$$A(x, t) = \mathcal{A}e^{i(kx - \omega t)} \quad \mathcal{A} = |\mathcal{A}|e^{i\phi_a} \quad (2.9)$$

onde \mathcal{A} é a amplitude complexa que inclui o termo de fase ϕ_a .

2.1.1.1 Onda harmônica plana em 3 dimensões

Até o momento estávamos nos referindo a uma onda no espaço unidimensional. A expressão da onda em três dimensões pode-se formular assim

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.10)$$

onde o vetor propagação \vec{k} está indicando a direção e sentido da onda e \vec{r} é o vetor posição. A fase é

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad (2.11)$$

e a velocidade ser calcula como anteriormente assim

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} - \omega t = 0 \quad (2.12)$$

$$k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z - \omega = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = \omega \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\omega \vec{k}}{k}} \quad (2.14)$$

2.1.2 Operadores Vetoriais

Neste texto utilizaremos bastante os operadores gradiente, divergência e rotacional, simbolizados por ∇

$$\nabla \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{"nabla"} \quad (2.15)$$

que quando aplicado a uma função escalar $\phi(x, y, z)$, resulta num vetor chamado "gradiente"

$$\nabla\phi = \mathbf{grad}\phi = \hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{"gradiente"} \quad (2.16)$$

que representa a máxima derivada direcional dessa função no espaço (x, y, z) , e cuja variação infinitesimal $d\phi$ ao longo de um vetor espacial (infinitesimal) $d\vec{r}$ se calcula pelo produto escalar

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r} \quad (2.17)$$

Da expressão acima fica fácil deducir o significado do gradiente, pois o produto escalar na direita significa que $d\phi$ resulta da projeção ao longo da direção do vetor dr , pelo que aquele valor será máximo quando esse vetor está alinhado com o vetor gradiente e dai os significado de máxima derivada direcional para este.

O operador “nabla” aplicado a um vetor \vec{A} , representa a “divergência” desse campo vetorial

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{“divergência”} \quad (2.18)$$

e a expressão

$$\nabla \cdot \vec{A} dv \quad (2.19)$$

onde v representa o volume, descreve a diferença entre o fluxo das linhas de campo do vetor \vec{A} que saem e que entram nesse volume infinitesimal dv . Se $\nabla \cdot \vec{A}$ é positiva ou negativa, significa que há linhas de campo se originando ou sumindo, respectivamente, ali. Se ela é zero, indica que não há nem “fontes” nem “sumidouros” de linhas de campo, e que elas são então continuas no volume. A integral da divergência num volume V encerrado por uma superfície fechada S , equivale ao fluxo total do campo \vec{A} saindo desse volume, como representado pelo Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} ds \quad \text{Gauss} \quad (2.20)$$

Lembremos do Teorema de Gauss para o campo eletétrico: se a divergência do campo elétrico é zero em V , o fluxo que sai e que entra pela superfície fechada são iguais, o que significa que não há carga elétrica neta (nem fonte-carga positiva-, nem sumidouro-carga negativa, para as linhas de campo) no volume V .

O “rotacional”, representado por

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{“rotacional”} \quad (2.21)$$

descreve a “circulação” do vetor. Assim a expressão

$$\nabla \times \vec{A} d\vec{s} \quad (2.22)$$

onde $d\vec{s}$ representa um vetor superfície infinitesimal, indica a circulação (ou seja a integral de linha) do vetor \vec{A} ao redor dessa superfície infinitesimal. A integral do rotacional sobre uma superfície S limitada por um circuito fechado ℓ , equivale à integral de linha desse vetor \vec{A} ao longo desse circuito fechado, o que se representa matematicamente pelo Teorema de Stokes assim

$$\int_S \nabla \times \vec{A} ds = \oint_{\ell} \vec{A} \cdot d\ell \quad \text{Stokes} \quad (2.23)$$

Se o rotacional é zero no volume V , significa que esse campo é “conservativo” nesse volume, ou seja que a integral de linha num circuito fechado é sempre zero nesse volume, o que também significa que podemos definir um “potencial” para esse campo, e que a integral de linha desse campo entre dois pontos, depende apenas da posição desses pontos e não do caminho escolhido para calcular a integral de linha.

Uma demonstração matemática das propriedades enunciadas nesta seção pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Slater e Frank [2].

2.1.2.1 Operações freqüentes

A formulação complexa da onda pode facilitar a execução de algumas operações como ser:

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = \Re\left\{\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\right\} = \Re\{-i\omega A(x, t)\} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial x} = \Re\{ikA(x, t)\} \quad (2.25)$$

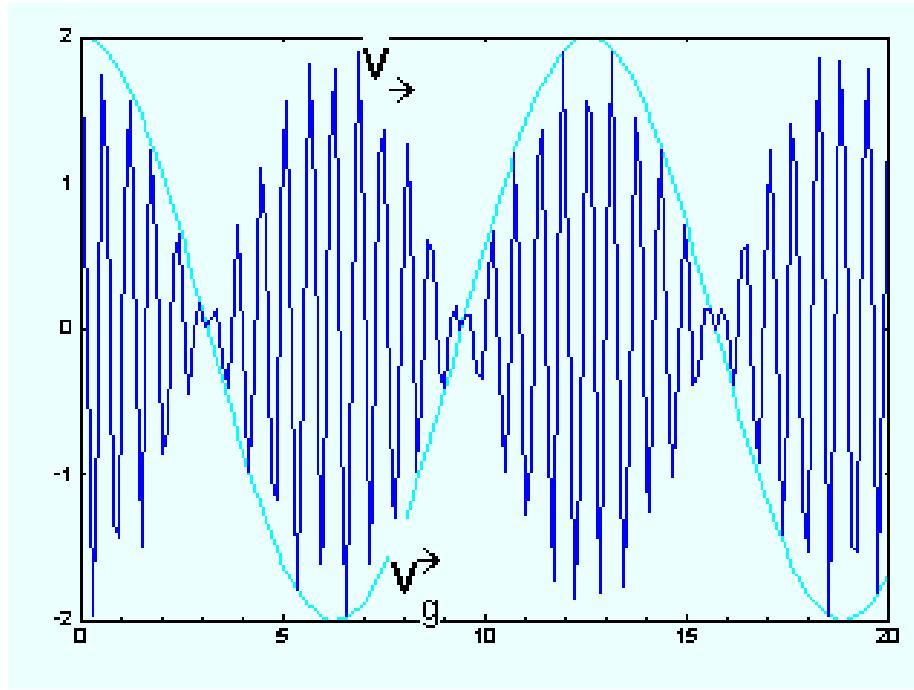


Figura 2.2: Batimento resultante da soma de duas ondas com freqüências e comprimentos de onda pouco diferentes. A velocidade de fase está indicada como v e a de grupo como v_g

Porém nem sempre se pode operar dessa forma. Por exemplo, para se calcular a média de um produto

$$\langle a(x, t)b(x, t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T a(x, t)b(x, t) dt \not\equiv \Re\{\langle A(x, t)b(x, t) \rangle\} \quad (2.26)$$

A desigualdade acima resulta do fato que o operador “média temporal” é linear mas o produto não o é. Para realizar a média temporal de um produto temos então que voltar às definições

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= \langle \Re\{a\}\Re\{b\} \rangle = \langle \frac{|\mathcal{A}||\mathcal{B}|}{2} [\cos(2kx - 2\omega t + \phi_a + \phi_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)] \rangle \\ &= \langle \frac{|\mathcal{A}||\mathcal{B}|}{2} \cos(\phi_a - \phi_b) \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde

$$a(x, t) = \Re\{\mathcal{A} e^{i(kx - \omega t)}\} \quad \mathcal{A} = |\mathcal{A}| e^{i\phi_a} \quad (2.28)$$

$$b(x, t) = \Re\{\mathcal{B} e^{i(kx - \omega t)}\} \quad \mathcal{B} = |\mathcal{B}| e^{i\phi_b} \quad (2.29)$$

Em resumo podemos então escrever

$$\boxed{\langle a(x, t)b(x, t) \rangle = \frac{1}{2}\Re\{\mathcal{A}\mathcal{B}^*\}} \quad (2.30)$$

2.1.3 Velocidade de grupo

2.1.3.1 Batimento

Sejam duas ondas harmônicas de igual amplitude mas com freqüência e comprimento de onda levemente diferentes assim

$$A(x, t) = a e^{i[(\bar{k} + \delta k/2)x - (\bar{\omega} + \delta\omega/2)t]} + a e^{i[(\bar{k} - \delta k/2)x - (\bar{\omega} - \delta\omega/2)t]}$$

$$\begin{aligned}
&= a[e^{i(x\delta k/2 - t\delta\omega/2)} + e^{-i(x\delta k/2 - t\delta\omega/2)}]e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)} \\
&= [2a \cos(x\delta k - t\delta\omega)]e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

O primeiro fator à direita na Eq.(2.31) representa a amplitude enquanto o segundo representa a fase da onda resultante. Ambos termos representam formalmente ondas propagantes, o que significa que tanto a fase quanto a amplitude desse batimento se propagam. Suas respectivas velocidades calculam-se na forma usual

$$v = \bar{\omega}/\bar{k} \tag{2.32}$$

$$v_g = \delta\omega/\delta k \tag{2.33}$$

Podemos deduzir então que a velocidade da amplitude, que é chamada de "velocidade de grupo" calcula-se assim:

$v_g = \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{\bar{\omega}}$

(2.34)

2.1.3.2 Pulso

Vamos generalizar o resultado acima, para o caso de um pulso formado por uma distribuição contínua de ondas descrita pela integral

$$\begin{aligned}
A(x, t) &= \int_{\bar{\omega} - \Delta\omega_o}^{\bar{\omega} + \Delta\omega_o} \mathcal{A}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega \\
&= e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)} \left[\int_{-\Delta\omega_o}^{+\Delta\omega_o} \mathcal{A}(\bar{\omega} + \Delta\omega) e^{i\Delta\omega[(dk/d\omega)\bar{\omega}x - t]} d\Delta\omega \right] \\
&\text{para } \Delta\omega_o/\bar{\omega} \ll 1 \text{ e } \frac{\Delta k}{\Delta\omega} \approx \frac{dk}{d\omega}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

O fator entre parênteses retos representa a amplitude desse conjunto de ondas (pulso) e, como no caso anterior, representa uma onda que se propaga com a chamada velocidade de grupo que está formalmente indicada na exponencial dentro do termo de amplitude e vale

$$v_g = (d\omega/dk)_{\bar{\omega}} \tag{2.36}$$

2.2 Ondas eletromagnéticas

A partir das equações de Maxwell, podemos desenvolver relações que leam à formulação de expressões de ondas, tanto para \vec{E} como para \vec{H} , assim ficando matematicamente demonstrada a existência de ondas eletromagnéticas.

2.2.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell propriamente ditas são

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.37}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2.38}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.39}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{2.40}$$

onde \vec{E} e \vec{H} são as intensidades dos campos elétrico e magnético respectivamente, \vec{j} é a densidade de corrente elétrica, \vec{D} é o deslocamento elétrico, \vec{B} a indução magnética e ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica.

As equações acima se complementam com as chamadas equações materiais

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} \quad (2.41)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.42)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.43)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.44)$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) \quad (2.45)$$

onde ϵ_0 e ϵ são a permissividade elétrica do vácuo e do material respectivamente, χ a susceptibilidade dielétrica do material, \vec{P} o vetor polarização do material, μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo, \vec{M} o vetor magnetização do material e σ a condutividade. Lembramos que o termo $1 + \chi = \epsilon$ representa a constante dielétrica do material. Vamos nos restringir ao caso em que

$$\rho = 0 \quad \vec{M} = 0 \quad (2.46)$$

supondo também que o meio seja isotrópico, isto é, σ e χ independentes da direção de propagação. Lembrando a propriedade

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (2.47)$$

e considerando a Eq.(2.37), resulta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (2.48)$$

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (2.49)$$

$$(2.50)$$

lembrando que $\nabla \cdot (\epsilon_0(1 + \chi) \vec{E}) = \rho = 0$ então a equação acima se reduz à expressão de uma onda amortecida

$$\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (2.51)$$

Começando a partir da Eq.(2.38) uma equação de onda formalmente idêntica pode ser obtida para \vec{H} .

$$\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla^2 \vec{H} = 0 \quad (2.52)$$

Lembremos que a equação geral da onda plana no espaço, amortecida, pode ser escrita como

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (2.53)$$

onde ψ representa o parâmetro oscilante, v a velocidade de fase da onda e γ a constante de amortecimento. Comparando a Eq.(2.53) com as Eqs.(2.51) e (2.52) podemos concluir que estas últimas representam ondas amortecidas com constante de amortecimento

$$\gamma = \sigma \mu_0 \quad (2.54)$$

e velocidade de propagação

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi}} \quad c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \epsilon = 1 + \chi \quad (2.55)$$

onde c é a velocidade no vácuo e ϵ a constante dielétrica do material. É interessante comparar as expressões nas Eqs.(2.51) e (2.52) com a de uma oscilação mecânica unidimensional amortecida

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + kx = 0 \quad (2.56)$$

onde x representa a coordenada do oscilador. Comparando as Eqs.(2.56) com as (2.51) e (2.52) deduzimos as seguintes relações formais:

$$\begin{array}{lll} \text{termo de inércia:} & \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) & \Rightarrow m \\ \text{termo de amortecimento:} & \mu_0 \sigma & \Rightarrow \gamma \\ \text{termo de restituição:} & -\nabla^2 & \Rightarrow k \end{array} \quad (2.57)$$

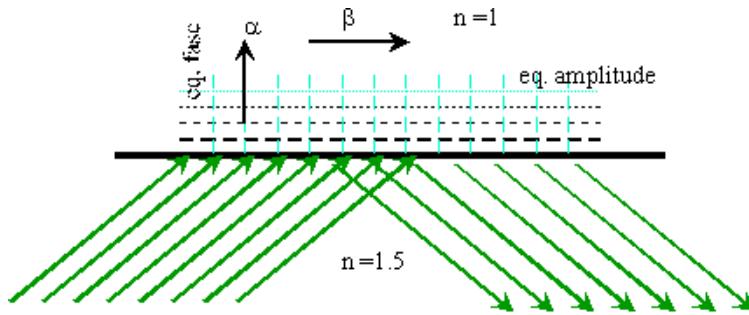


Figura 2.3: Reflexão total e onda evanescente: os planos equi-amplitude (paralelos à interface) e os planos equi-fase, o primeiro definido por $\vec{\alpha}$ e o segundo por $\vec{\beta}$, são mutuamente perpendiculares.

2.2.2 Equação da onda eletromagnética

Para o caso de uma onda harmônica plana em três dimensões representada na formulação complexa como em Eq.(2.10) encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^2} &\Rightarrow -i\omega \\ \nabla^2 &\Rightarrow -k^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

que substituídas na Eq.(2.51) resultam em

$$(k^2 - \mu_0\varepsilon_0(1 + \chi)\omega^2 - i\omega\mu_0\sigma) \vec{E} = 0 \quad (2.59)$$

que é a chamada formulação de Helmholtz para a equação da onda para o caso de uma onda harmônica plana. Como a expressão dentro do parêntese deve se anular para qualquer \vec{E} , então podemos, a partir dela, achar a expressão para a constante de propagação da onda e para o índice de refração

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \chi + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right] \quad (2.60)$$

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = 1 + \chi + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \quad (2.61)$$

2.2.3 Índice de refração complexo

Das equações acima fica claro que o vetor de onda e o índice de refração são quantidades complexas que podemos, em geral, escrever assim:

$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha} \quad (2.62)$$

$$n + i\kappa \quad (2.63)$$

A expressão da onda do campo elétrico fica então de seguinte forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.64)$$

$$\text{ou seja } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.65)$$

Se os vetores $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ são paralelos, isso significa que o amortecimento da amplitude ocorre ao longo da direção de propagação da onda e essa onda diz-se ser “homogênea”. Caso contrário, é uma onda inhomogênea. A onda inhomogênea mais conhecida é a chamada onda evanescente que se forma na reflexão total, ilustrada na Fig.2.3, onde estão representados os planos de igual amplitude (linhas horizontais) e de igual fase (linhas verticais).

2.3 Efeito Doppler

O efeito Doppler se refere à mudança de freqüência e de comprimento de onda que sofrem as ondas ao se refletirem num objeto que se move em relação à fonte emissora ou, alternativamente, emitidas por uma fonte

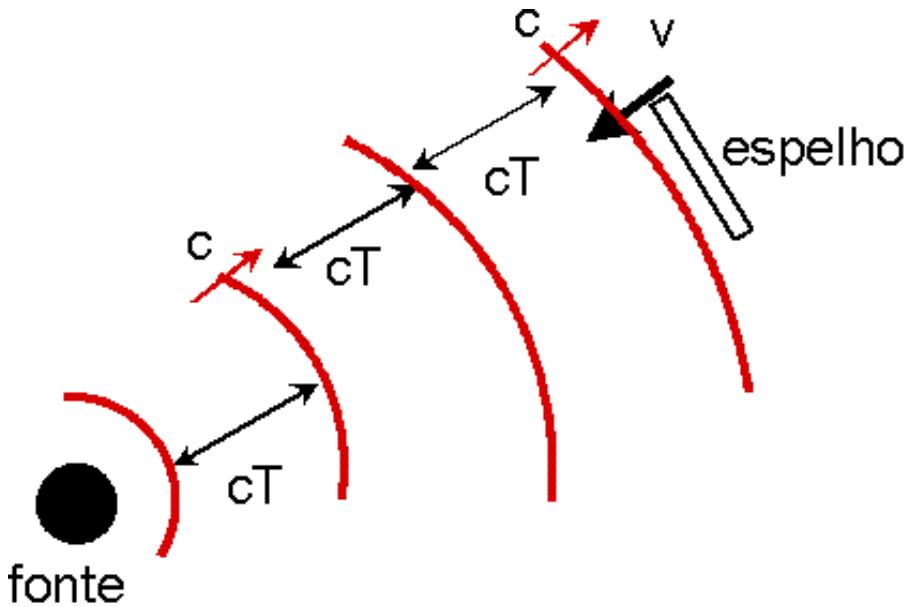


Figura 2.4: Efeito Doppler entre uma fonte estacionária e um espelho se movendo hacia a fonte.

em movimento em relação ao observador. O desenho da Fig.2.4 esquematiza o primeiro caso. Suponhamos uma fonte estacionária emitindo pulsos de luz, com velocidade c e período T , e um espelho se movendo com velocidade v em linha reta ao encontro da fonte. O intervalo de tempo que transcorre entre que dois picos de luz consecutivos batam (e se refletam no espelho móvel) será

$$t = \frac{\lambda}{c+v} = T' \quad (2.66)$$

que é exatamente o período desses pulsos ao se refletirem no espelho móvel. Resulta então que o período, a freqüência e o comprimento de onda da onda refletida, vistas num referencial estacionário em relação à fonte ficam modificados em relação à onda emitida pela fonte (sempre supondo $v/c \ll 1$) assim:

$$T' = \frac{T}{1+v/c} \approx T(1-v/c) \quad (2.67)$$

$$\nu' = \nu(1+v/c) \quad (2.68)$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1+v/c} \approx \lambda(1-v/c) \quad (2.69)$$

Se levamos em conta o efeito da Relatividade, teremos dois efeitos Doppler[3], um longitudinal como o que acabamos de estudar mas cuja freqüência vale agora

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \quad (2.70)$$

e um outro, transversal, que modifica a freqüência assim

$$\nu' = \nu \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (2.71)$$

e que não existe no contexto da Física não Relativista. Note que Eq.(2.70) e Eq.(2.68) são equivalentes se $v/c \ll 1$. É óbvio que os resultados são os mesmos caso o espelho esteja fixo e a fonte se move com velocidade v ao seu encontro. Se o espelho (fonte) se afasta em linha reta da fonte (espelho) em lugar de se aproximar, v muda de sinal nas equações acima.

2.4 Problemas

2.4.1 Equação de onda

Verifique que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (2.72)$$

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.73)$$

é a equação de uma onda onde v é sua velocidade de fase.

2.4.2 Operadores vetoriais

Com as definições da sec.2.1.2, verificar as seguintes igualdades para o caso de uma onda harmônica plana tridimensional

$$\nabla \cdot \vec{A} = i \vec{k} \cdot \vec{A} \quad (2.74)$$

$$\nabla \times \vec{A} = i \vec{k} \times \vec{A} \quad (2.75)$$

2.4.3 Velocidade de grupo

Calcule a expressão da velocidade de grupo sabendo que, na região de interesse, o índice de refração responde à função

$$n = A + B/\lambda^2 \quad (2.76)$$

Verifique que $v_g \leq v$ somente se $B \geq 0$.

Capítulo 3

Natureza vectorial da luz

Neste capítulo trataremos das propriedades da luz que têm a ver com sua natureza vetorial. Veremos as relações entre os vetores campo elétrico, magnético e de Poynting, à partir das Equações de Maxwell na sua formulação diferencial. Veremos o que acontece com a polarização da luz quando ela passa por lâminas de retardo de fase, que são materiais anisotrópicos. A abordagem geral da propagação da luz em meios anisotrópicos porém, será tratada mais detalhadamente no capítulo 7.

3.1 Equações de Maxwell: relações vectoriais

No caso de uma onda harmônica plana, os operadores vetoriais ∇ e $\frac{\partial}{\partial t}$ podem ser substituídos assim:

$$\nabla \Rightarrow i\vec{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$$

E nesse caso as equações de Maxwell ficam assim:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} & = & \rho = 0 \\ \mu \nabla \cdot \vec{H} & = & 0 \\ \nabla \times \vec{E} & = & -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} & = & \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} i\vec{k} \cdot \vec{E} & = & 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{H} & = & 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} & = & i\omega \mu \vec{H} \\ i\vec{k} \times \vec{H} & = & \vec{j} - i\omega \varepsilon \vec{E} \end{array} \quad (3.1)$$

3.2 Polarização

As relações vectoriais acima permitem pôr em evidência as relações vectoriais entre os diferentes vectores que caracterizam a onda.

3.2.1 Polarização linear

No caso da polarização linear, as relações acima

$$\begin{array}{rcl} i\vec{k} \cdot \vec{E} & = & 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{H} & = & 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} & = & i\omega \mu \vec{H} \\ i\vec{k} \times \vec{H} & = & \vec{j} - i\omega \varepsilon \vec{E} \end{array}$$

levam às seguintes equações

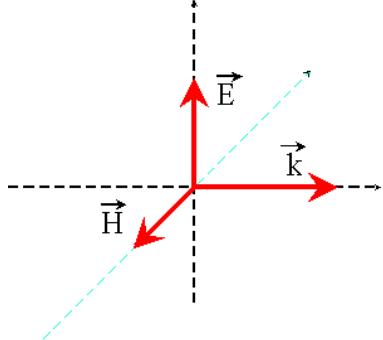
$$\begin{array}{rcl} kE & = & \omega \mu H \\ kH & = & -(\omega \varepsilon - i\sigma)E \end{array}$$

do que resulta

$$\begin{aligned} E^2(\omega \varepsilon - i\sigma) &= \omega \mu H^2 \\ &\Downarrow \\ |\frac{E}{H}|^2 &= |\frac{\omega \mu}{\omega \varepsilon - i\sigma}|^2 \\ \text{meio não condutor: } |\frac{E}{H}| &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon v} \end{aligned}$$

$$\text{vácuo: } \left| \frac{\vec{E}}{\vec{H}} \right| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

que permitem representar \vec{E} , \vec{H} e \vec{k} como vetores mutuamente ortogonais assim:



$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} &= i\omega\mu\vec{H} \\ i\vec{k} \times \vec{H} &= \vec{j} - i\omega\epsilon\vec{E} \end{aligned}$$

3.2.1.1 Polarizador

Um polarizador deixa passar a componente da luz (representada pelo vetor \vec{E}) numa determinada direção apenas. Assim, luz não polarizada fica linearmente polarizada depois do polarizador. Um polarizador elementar poderia ser imaginado formado por fios condutores paralelos, alinhados como representados na Fig.3.1. Qual das polarizações, em cada um dos três casos da Fig.3.1, passa por esse polarizador e qual não?

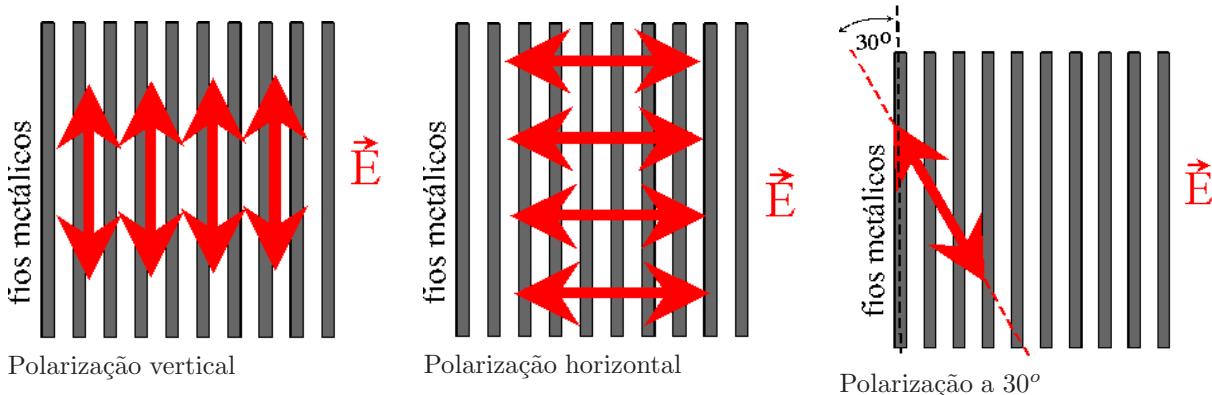


Figura 3.1: Luz linearmente polarizada atravessando um polarizador

3.2.2 Polarização elíptica

Um material que tenha índices de refração diferentes para as diferentes direções de vibração da luz polarizada chama-se de “birrefringente”. Nesses materiais existem duas direções mutuamente ortogonais, chamadas de “próprias” que têm índices de refração determinados (chamados um de “ordinário” e o outro de “extraordinário”). Qualquer polarização da luz pode-se decompor nestas duas direções “próprias”, sendo que cada uma dessas componentes se propaga com seu correspondente índice de refração próprio, ordinário ou extraordinário. Uma lâmina de retardor têm sempre os eixos próprios (principais) no seu plano de entrada. Suponhamos que os eixos principais de uma lâmina de retardor estejam alinhados com os eixos x - e y de um sistema de coordenadas. Suponhamos também que uma luz linearmente polarizada, com amplitude A , incida normalmente sobre essa lâmina, com a direção da polarização fazendo um ângulo θ com o eixo x como ilustrado na Fig.3.2. Nesse caso as amplitudes na entrada da lâmina serão

$$x_o = A \cos \theta \quad (3.2)$$

$$y_o = A \sin \theta \quad (3.3)$$

e a expressão das oscilações na saída será

$$x = x_o \sin(\omega t + \phi) = x_o \sin \omega t \cos \phi + x_o \cos \omega t \sin \phi \quad (3.4)$$

$$y = y_o \sin \omega t \quad (3.5)$$

$$\text{com } x_o = A \cos \theta \text{ e } y_o = A \sin \theta \quad (3.6)$$

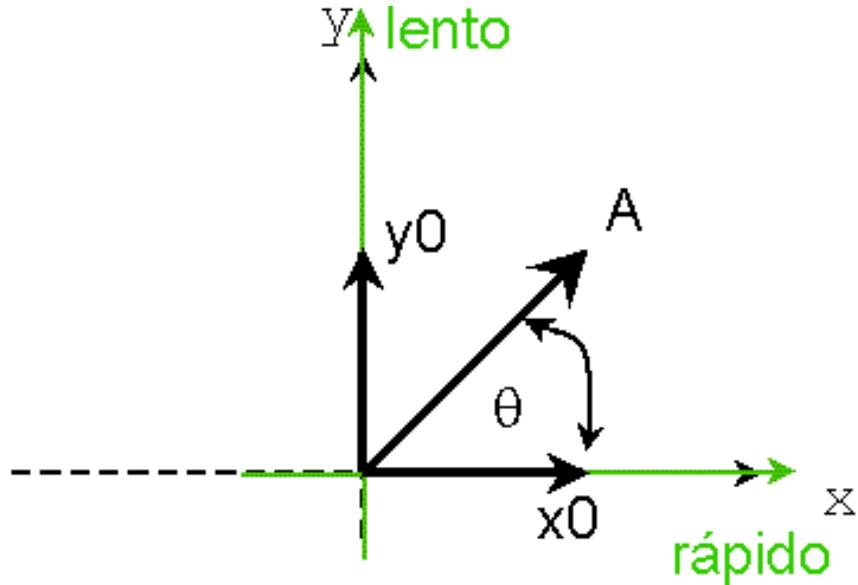


Figura 3.2: Lâmina de retardo alinhada com os eixos coordenados “x” e “y”

onde ω é a freqüência da luz e ϕ é o atraso de fase entre ambas componentes (onda rápida e onda lenta) na saída da lâmina. Somando os quadrados das expressões em Eq.(3.4) e (3.5) e rearranjando os termos resulta

$$\frac{x^2}{x_o^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - \sin^2 \phi - 2\frac{x}{x_o} \frac{y}{y_o} \cos \phi = 0 \quad (3.7)$$

que representa uma elipse rotada, que pode ser transformada numa elipse não-rotada por meio de uma rotação do sistema de coordenadas. Para isso usamos a matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Com as correspondentes transformações $x \rightarrow x'$ e $y \rightarrow y'$, a Eq.(3.7) fica assim

$$\frac{y'^2}{b^2} + \frac{x'^2}{a^2} = 1 + x'y' \frac{2x_o y_o \cos 2\alpha \cos \phi + (y_o^2 - x_o^2) \sin 2\alpha}{x_o^2 y_o^2 \sin^2 \phi} \quad (3.9)$$

com

$$\frac{1}{a^2} = \frac{x_o^2 y_o^2 \sin^2 \phi}{y_o^2 \cos^2 \alpha + x_o^2 \sin^2 \alpha - x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x_o^2 y_o^2 \sin^2 \phi}{y_o^2 \sin^2 \alpha + x_o^2 \cos^2 \alpha + x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (3.11)$$

Anulando o último termo da direita na Eq.(3.9), para procurar a elipse não rotada, encontramos o ângulo de rotação α

$$\tan 2\alpha = 2 \frac{x_o y_o}{x_o^2 - y_o^2} \cos \phi \quad (3.12)$$

necessário para que o novo sistema de coordenadas mostre uma elipse centrada:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (3.13)$$

A razão da potência máxima sobre a mínima da luz na saída da lâmina é

$$\frac{P_M}{P_m} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{y_o^2 \sin^2 \alpha + x_o^2 \cos^2 \alpha + x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi}{y_o^2 \cos^2 \alpha + x_o^2 \sin^2 \alpha - x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (3.14)$$

Substituindo a Eq.(3.6) nas Eqs.(3.12) e (3.14), encontramos as relações

$$\frac{P_M}{P_m} = \frac{2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha + \sin 2\theta \sin 2\alpha \cos \phi}{2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \alpha - \sin 2\theta \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (3.15)$$

$$\tan 2\alpha = \tan 2\theta \cos \phi \quad (3.16)$$

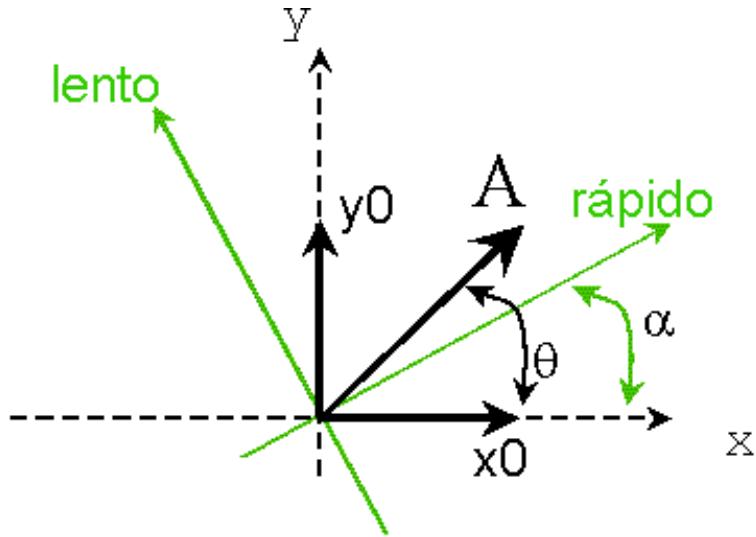


Figura 3.3: Lâmina de retardo

Note que para o caso particular quando $\theta = \pi/4$ a equação acima se simplifica pois $\alpha = \pi/4$ e então resulta

$$\frac{P_M}{P_m} = \frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \quad (3.17)$$

3.2.3 Matrizes de Jones

Vamos calcular a matriz de Jones que descreve uma lâmina birrefringente cujo eixo lento atrasa a onda de uma fase ϕ e cujo eixo rápido está inclinado de um ângulo α no sentido anti-horário sobre o eixo x no sistema de coordenadas, como indicado na Fig.3.3. Supondo uma onda chegando à lâmina com componentes (na formulação complexa):

$$E_x^o = x_o e^{ikz} \quad E_y^o = y_o e^{ikz} \quad (3.18)$$

no momento arbitrário $t = 0$. As projeções nos eixos rápido e lento serão respectivamente

$$E_r = (x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) e^{ikz} \quad (3.19)$$

$$E_l = (-x_o \sin \alpha + y_o \cos \alpha) e^{ikz} \quad (3.20)$$

Na saída da lâmina essas componentes terão sofrido um atraso de fase relativo ϕ , ficando assim

$$E'_r = (x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha) e^{ikz} \quad (3.21)$$

$$E'_l = (-x_o \sin \alpha + y_o \cos \alpha) e^{i(kz + \phi)} \quad (3.22)$$

e recompondo de novo as componentes nos eixos x e y teremos

$$E'_x = x_o \left[\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha e^{i\phi} \right] e^{ikz} + y_o \frac{\sin 2\alpha}{2} (1 - e^{i\phi}) e^{ikz} = x e^{ikz} \quad (3.23)$$

$$E'_y = y_o \left[\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha e^{i\phi} \right] e^{ikz} + x_o \frac{\sin 2\alpha}{2} (1 - e^{i\phi}) e^{ikz} = y e^{ikz} \quad (3.24)$$

onde as ondas na saída são

$$E'_x = x e^{ikz} \quad E'_y = y e^{ikz} \quad (3.25)$$

Colocando os resultados em termos de matrizes resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde

$$a = \cos^2 \alpha + e^{i\phi} \sin^2 \alpha \quad (3.27)$$

$$b = \frac{\sin 2\alpha}{2}(1 - e^{i\phi}) \quad (3.28)$$

$$c = \frac{\sin 2\alpha}{2}(1 - e^{i\phi}) \quad (3.29)$$

$$d = \sin^2 \alpha + e^{i\phi} \cos^2 \alpha \quad (3.30)$$

Uma outra forma, mais elegante, de resolver este problema seria utilizando apenas matrizes. Imaginemos uma onda linearmente polarizada ao longo do eixo x , representada por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

que incide numa lâmina retardadora cujo eixo lento, alinhado com y , retarda a onda em uma fase ϕ e que se representa pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Antes da onda incidir na lâmina, fazemos aquela rotar um ângulo α no sentido horário, para o que rotamos o sistema de coordenadas no sentido anti-horário. Quando a onda sair da lâmina, rotamos o sistema de coordenadas de um ângulo α no sentido horário de forma a restaurar a situação inicial da onda incidente (polarização alinhada com o eixo x). Sabendo que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

representa uma lâmina retardadora cujo eixo rápido está alinhado com x e o lento (que atrasa de uma fase ϕ) está ao longo do eixo y e que a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

representa a rotação do sistema de coordenadas num ângulo α no sentido anti-horário, podemos escrever a seqüência indicada acima assim

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

onde estamos representando, de direta à esquerda, os seguintes elementos:

- onda linearmente polarizada sobre o eixo x
- sistema de coordenadas rotando de um ângulo α no sentido anti-horário (ou polarização da luz rotando α no sentido horário)
- lâmina retardadora com o eixo rápido alinhado com x
- sistema de coordenadas rotando um ângulo α no sentido horário

Se calculamos o produto das três matrizes excluindo a que representa a onda (extrema direita), teremos

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + e^{i\phi} \sin^2 \alpha & (1 - e^{i\phi}) \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ (1 - e^{i\phi}) \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2 \alpha + e^{i\phi} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

que representa a lâmina que procuramos e que coincide com o resultado da matriz 2×2 na Eq.(3.26). Se simplificamos o problema pensando numa lâmina retardadora de $\lambda/4$, com o eixo rápido a 45° sobre o eixo x , a matriz fica da forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+i) \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Supondo uma onda incidente linearmente polarizada ao longo do eixo x , e desconsiderando o fator constante na frente da matriz da lâmina, resulta uma onda na saída com a expressão

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

que é uma onda circularmente polarizada, como esperado neste caso.

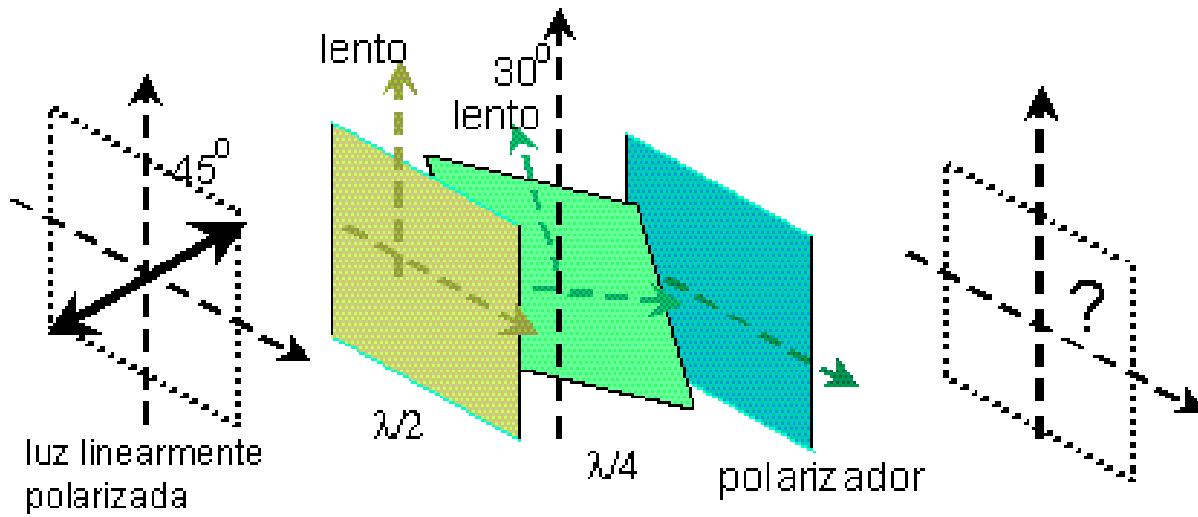


Figura 3.4: Onda linearmente polarizada a 45° com a vertical, incidindo pela esquerda, primeiro numa lâmina $\lambda/2$, depois numa lâmina $\lambda/4$ rotada 30° com o eixo vertical e finalmente num polarizador que permite passagem da polarização horizontal.

3.2.3.1 Exemplo

A Fig.3.4 mostra luz polarizada atravessando uma série de elementos polarizantes. Quál é a polarização da luz na saída? Em primeiro lugar vamos calcular as matrizes dos elementos polarizantes, segundo a Eq.(3.2.3):

- A lâmina $\lambda/2$ fica descrita por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

- A lâmina $\lambda/4$ rotada 30° fica representada por:

$$\begin{bmatrix} \cos^2 30^\circ + i \sin^2 30^\circ & (1-i)(\sin 60^\circ)/2 \\ (1-i)(\sin 60^\circ)/2 & \sin^2 30^\circ + i \cos^2 30^\circ \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

- e o polarizador que deixa passar apenas a polarização no eixo x fica descrito por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

O conjunto de elementos em seqüência pode ser então descrito por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 30^\circ + i \sin^2 30^\circ & (1-i)(\sin 60^\circ)/2 \\ (1-i)(\sin 60^\circ)/2 & \sin^2 30^\circ + i \cos^2 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 + i0.25 & (1-i)0.433 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

considerando que $\cos^2 30^\circ = 0.75$, $\sin^2 30^\circ = 0.25$ e $(\sin 60^\circ)/2 = 0.433$. Agora podemos calcular o efeito dessa bateria de componentes polarizantes

$$\begin{bmatrix} 0.75 + i0.25 & (1-i)0.433 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 + i0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Como é a polarização dessa luz na saída? Era necessário ou não fazer todos esses cálculos para chegarmos a esse resultado?

3.3 Vector de Poynting

O vector de Poynting \vec{S} representa o fluxo de potência de uma onda eletromagnética e se define como

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

É possível verificar que de fato ele representa o fluxo de potência, começando pelo cálculo de sua divergência:

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{S} dv = \oint \vec{S} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \text{potência}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$$

Equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} &= -\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} &= \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= -(\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) - \vec{E} \cdot \vec{j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Integrando a função acima no volume V

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dv$$

e utilizando o teorema de Gauss obtemos

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dv$$

Analisando o resultado obtido podemos concluir que de fato o vetor de Poynting representa mesmo o fluxo de potência

FLUXO de POTÊNCIA: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

3.3.1 Vetor de Poynting e Intensidade

A intensidade é o módulo da média temporal do fluxo de potência e se pode calcular a partir de \vec{S} assim:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

A média temporal é

$$\langle \vec{S} \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

Em função da lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\mu\omega \vec{H}$$

podemos escrever

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \frac{1}{\omega\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0)$$

e utilizando o teorema vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

resulta

$$\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) = (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \vec{k} - (\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) \vec{E}_0$$

que substituído na expressão de \vec{S} leva a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \frac{\vec{k}}{\omega\mu}$$

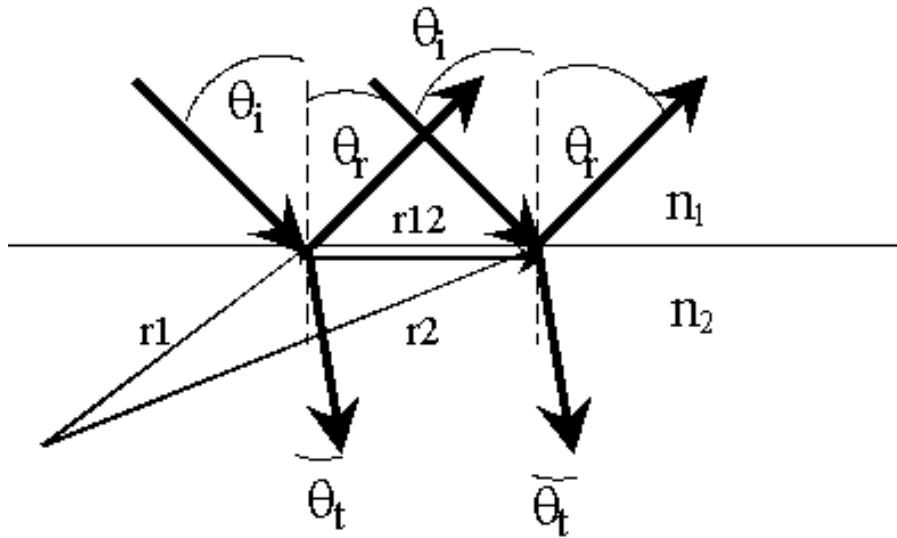


Figura 3.5: Reflexão e refração de ondas planas

Como a intensidade é o módulo do valor médio do vetor de Poynting, escrevemos então:

$$\boxed{I \equiv |<\vec{S}>| = \frac{1}{2}\epsilon |E_0|^2 |\frac{\vec{k}}{k}| v} \quad (3.44)$$

Considerando que a densidade volumétrica de energia num campo elétrico uniforme e constante (E_0) escreve-se como

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2$$

a Eq.(3.44) descreve então a energia da onda como representada apenas pelo termo do campo elétrico. Podemos também escrever a apenas em função do campo magnético H_0 utilizando a relação adequada na sec.3.2.1. Para o caso específico de um meio não condutor onde se verifica $|E/H| = \sqrt{\mu/\epsilon}$ e onde a densidade de energia magnética é $w_H = \mu H^2/2 = w_E$, podemos escrever Eq.3.44 como

$$I = \left(\frac{1}{4}\epsilon E_0^2 + \frac{1}{4}\mu H_0^2\right) |\frac{\vec{k}}{k}| v \quad (3.45)$$

É interessante verificar que a intensidade é a propagação, com a velocidade da luz, da densidade volumétrica da densidade de energia eletromagnética.

3.4 Reflexão e refração

A reflexão e refração de uma onda plana numa interfase como indicado na Fig.3.5 apresentam continuidade da fase, o que significa que, nas coordenadas \vec{r}_1 e \vec{r}_2 na interfase teremos

$$\begin{aligned} \phi_i(r1) &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_i - \omega t_1 & \phi_i(r2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_i - \omega t_2 \\ \phi_r &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_r - \omega t_1 & \phi_r(r2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_r - \omega t_2 \\ \phi_t &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_t - \omega t_1 & \phi_t(r2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_t - \omega t_2 \\ \phi_i(r1) &= \phi_r(r1) = \phi_t(r1) & \phi_i(r2) &= \phi_r(r2) = \phi_t(r2) \end{aligned}$$

Subtraindo as expressões para o ponto $r2$ e $r1$ resulta

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_{12} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_{12} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_{12} \quad \vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Sabendo que

$$k_i = k_0 n_1 \quad k_r = k_0 n_1 \quad k_t = k_0 n_2$$

concluimos que

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (3.46)$$

que resume as leis de reflexão e de refração (Snell).

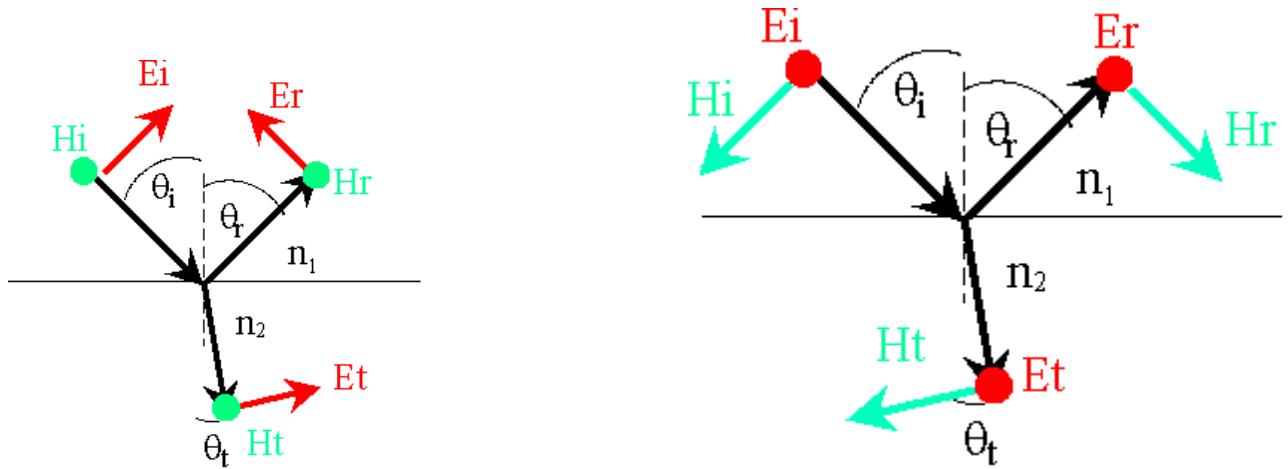


Figura 3.6: Reflexão de Fresnel para configuração TM (esquerda) e TE (direita)

3.4.1 Equações de Fresnel

A Fig.3.6 mostra o vetor do campo elétrico e o vetor intensidade do campo magnético das ondas incidentes, refletida e refratada. Pela continuidade das componentes paralelas numa interfase, para os campos \vec{E} e \vec{H} resulta:

$$\begin{aligned} E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ H_i + H_r &= H_t \end{aligned}$$

mas como num meio não condutor se verifica $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$ então fica

$$\begin{aligned} E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ (E_i + E_r) \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} &= E_t \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \end{aligned}$$

Sabendo que os índices de refração podem se escrever como

$$n_1 = c\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad n_2 = c\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \text{ com } n \equiv n_2/n_1$$

o que junto com as equações para os campos elétricos incidentes, refletidos e transmitidos acima, resulta em

$$r_{TM} \equiv E_r/E_i = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (3.47)$$

e similarmente para a polarização TE

$$r_{TE} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (3.48)$$

Usando a lei de Snell, as duas formulações acima podem se escrever também assim

$$r_{TE} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (3.49)$$

$$r_{TM} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (3.50)$$

A reflectância para ambas polarizações ($|r_{TE}(\theta_i)|^2$ e $|r_{TM}(\theta_i)|^2$) aparece nas Figs.3.7 e 3.8 para os casos de reflexão interna ($n=1.5$) e externa ($n=1/1.5$) respectivamente. Em ambos os casos fica claro que para TM, existe um ângulo de incidência (chamado de Brewster) para o qual a reflexão é nula, o que não é o caso para TE. Na Fig.3.8 vemos o fenômeno de reflexão total que ocorre para

$$n_i \sin \theta_i \geq n_t \quad (3.51)$$

onde n_i representa o índice de refração no meio do raio incidente e n_t o do meio do lado do raio refratado.

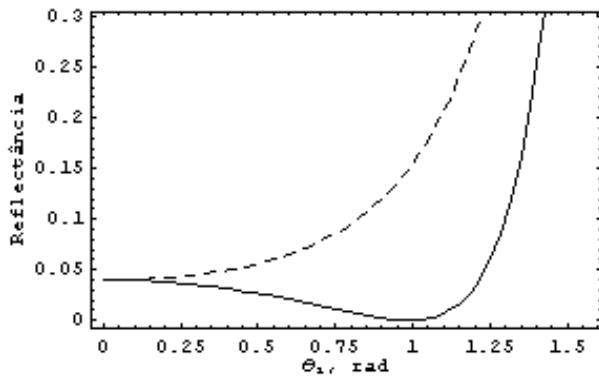


Figura 3.7: Reflectância numa interface com índice de refração relativo $n=1.5$, para polarização TE(tracejado) e TM(continuo)

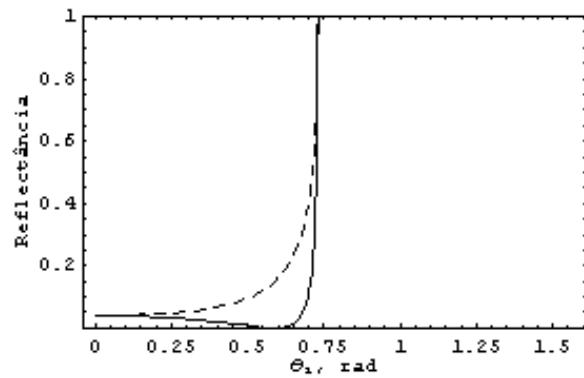


Figura 3.8: Reflectância numa interface com índice de refração relativo $n=1/1.5$, para polarização TE(tracejado) e TM(continuo)

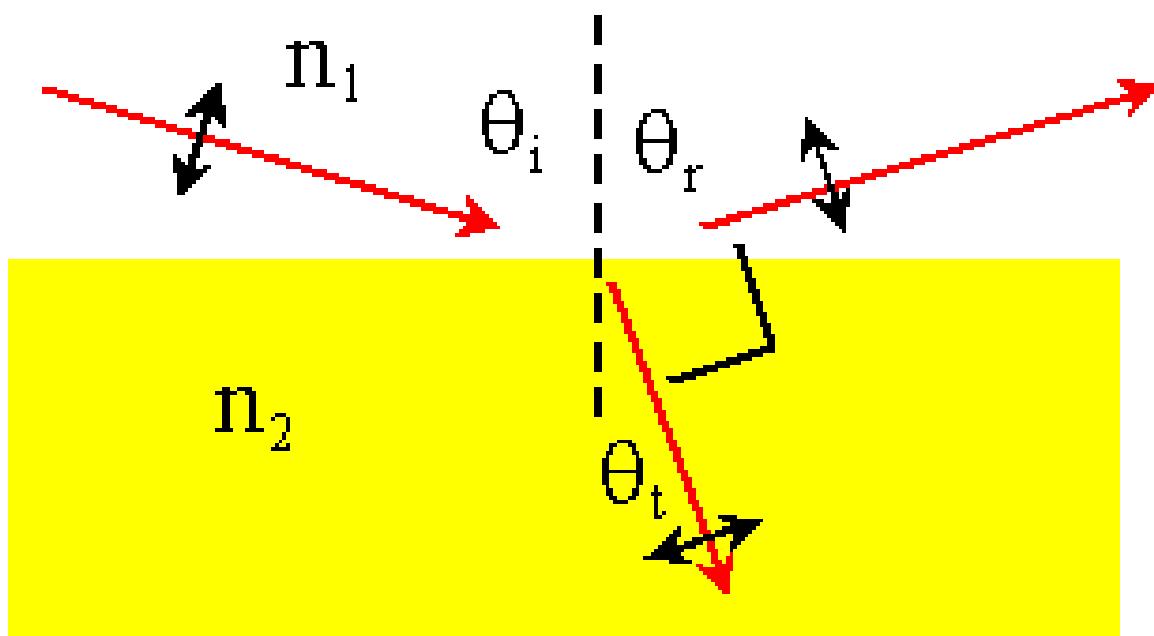


Figura 3.9: Ângulo de Brewster: ângulo de incidência: θ_i ; reflexão: θ_r , refração: θ_t

3.4.1.1 Ângulo de Brewster

Da Eq.(3.50) fica claro que não haverá reflexão para o caso $\theta_i + \theta_t = \pi/2$, o que significa que o feixe refletido e o refratado formam um ângulo de 90° .

$$\begin{aligned}\theta_r + \theta_t &= \pi/2 & \theta_i = \theta_r = \theta_{B1} & \theta_t = \theta_{B2} \\ \sin \theta_{B2} &= \sin(\pi/2 - \theta_{B1}) = \sin \pi/2 \cos \theta_{B1} - \cos \pi/2 \sin \theta_{B1} = \cos \theta_{B1}\end{aligned}$$

e levando em conta a lei de Snell, concluimos que o ângulo de Brewster vale

$$\tan \theta_{B1} = n_2/n_1 \quad (3.52)$$

e que na propagação inversa ele vale

$$\tan \theta_{B2} = n_1/n_2 \quad (3.53)$$

O uso do ângulo de Brewster é muito útil para a medida do índice de refração por se tratar de uma técnica muito simples, porém pouco precisa.

É interessante notar, na Fig.3.9, que não é por acaso que não há luz refletida no ângulo de Brewster, pois nessa condição, o raio refletido e o transmitido fazem 90° . Se pensamos que a luz refletida e transmitida pelo material, é resultado das oscilações da matéria, e neste caso ela oscila (polarização TM) no plano de incidência (plano da página) e lembrando que as ondas eletromagnéticas são transversais, então seria mesmo impossível haver luz refletida.

3.4.2 Reflexão total

Nas Eqs.(3.47) e (3.48) podemos substituir θ_t usando a Lei de Snell, para ficar na forma

$$r_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (3.54)$$

$$r_{TM} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (3.55)$$

Na reflexão interna ($n < 1$), quando o ângulo de incidência é tal que $\sin \theta_i > n$, a quantidade dentro do radical fica negativa e então as expressões nas Eqs.(3.54) e (3.55) ficam assim

$$r_{TE} = \frac{\cos \theta_i - i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i + i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = \frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{-ib/a}}{\sqrt{c^2 + b^2} e^{ib/a}} \quad (3.56)$$

$$r_{TM} = \frac{n^2 \cos \theta_i - i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i + i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = \frac{c - ib}{c + ib} = \frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2} e^{-ib/c}}{\sqrt{c^2 + b^2} e^{ib/c}} \quad (3.57)$$

onde a b e c são reais. Fica evidente que nesse caso

$$| r_{TE} |^2 = | r_{TM} |^2 = 1 \quad (3.58)$$

o que significa que haverá reflexão total, como mostrado na Fig.3.8 para $\sin \theta_i \geq \sin \theta_c = n$, onde θ_c é o ângulo crítico de reflexão total.

3.4.2.1 Ondas evanescentes

Para o caso $\theta_i \geq \theta_c$, quando ocorre reflexão total, mesmo assim podemos escrever a amplitude da luz transmitida como

$$T = T_0 e^{i(\vec{k}^t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.59)$$

Mas, nesse caso, quais serão as características dessa onda? Se escrevemos

$$\vec{k}^t \cdot \vec{r} = k_x^t x + k_z^t z \quad (3.60)$$

onde "x" é a coordenada ao longo da interfase entre os dois meios e "z" é a coordenada perpendicular à interfase e com valores positivos hacia o material de menor índice de refração. Por continuidade de fase, nesse caso temos que

$$k_x^t = k^t \sin \theta_t = k^i \sin \theta_i \quad (3.61)$$

e também

$$k_z^t = \sqrt{(k^t)^2 - (k_x^t)^2} = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} \quad k_0 \equiv 2\pi/\lambda_0 \quad (3.62)$$

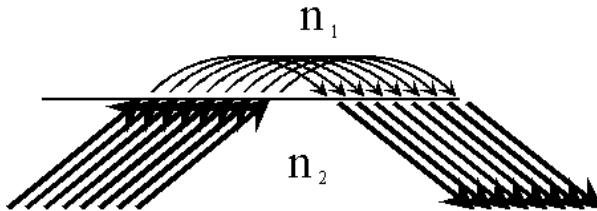


Figura 3.10: Ilustração da penetração dos raios no segundo meio, na reflexão total

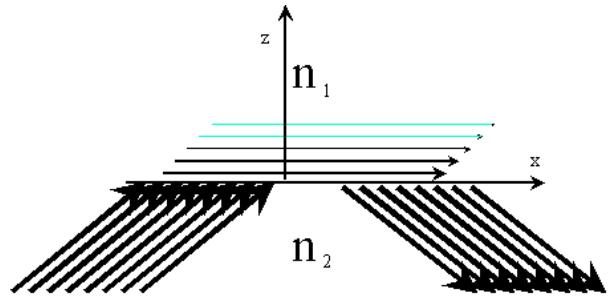


Figura 3.11: Onda evanescente viajando no segundo meio, formada pela envolvente dos raios mostrados na Fig.3.10, com constante de propagação β na direção x e amplitude decaindo exponencialmente com coeficiente α ao longo do eixo z , perpendicular à interfase.

onde λ_0 representa o comprimento de onda no vácuo. Para o caso em que $\sin \theta_i > \sin \theta_c = n_2/n_1$ então

$$k_z^t = i\alpha \quad \alpha \equiv k_0 n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \quad (3.63)$$

$$k_x^t = \beta \quad \beta \equiv k^i \sin \theta_i \quad (3.64)$$

e então podemos escrever

$$T = T_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta x - \omega t)} \quad (3.65)$$

A reflexão total pode ser vista como um fenômeno de “tunelamento” óptico onde a luz penetra uma pequena distância dentro do segundo material ($n_1 > n_2$) para sair depois, num ponto deslocado ao longo do eixo x paralelo à interfase, como ilustrado na Fig.3.10. Considerando a envolvente de todos os raios de uma onda, isso significa que temos uma onda viajando ao longo da coordenada “x” na interfase entre os dois materiais, com constante de propagação β , com amplitude decrescendo exponencialmente no interior do segundo meio com constante α como ilustrado nas Figs.3.10 e 3.11. Podemos imaginar que se trata de uma onda inhomogênea com vetores $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ tais que $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. É interessante notar que o vetor de propagação $\beta = k^i \sin \theta_i$ é menor que o valor do vetor k^i no meio material correspondente e por isso essa onda, se propagando na interface, chama-se de onda retardada. A penetração da onda evanescente no segundo meio pode ser aproveitado para fazer análise espectroscópica de materiais, onde precisamos apenas apoiar o prisma contra a superfície a ser analisada. Essa técnica se chama de ATR (acrônimo do inglês “attenuated total reflexion”). Quanto mais próximo o ângulo de incidência esteja do ângulo crítico, mais profundamente a onda evanescente penetra no segundo meio. Como exemplo podemos calcular com que precisão temos que nos aproximar do ângulo crítico para termos uma amplitude da onda evanescente de pelo menos 1% do seu valor na interface, à 0.01 mm dentro do segundo meio, supondo $\lambda = 633$ nm e $n_2/n_1 = 1.50$. Para isso multiplicamos por 0.01 mm a expressão acima para α :

$$\alpha z = k_0 n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \ln(100) \quad \text{onde } z = 0.01\text{mm} \quad (3.66)$$

de onde resulta

$$100 \frac{\theta_i - \theta_c}{\theta_c} \approx 0.13\% \quad (3.67)$$

Ou seja que o ângulo de incidência não pode se afastar em mais de que 0.13% do valor do ângulo crítico $\theta_c = \arcsin(1/1.5)$.

3.5 Problemas

3.5.1 Lâmina de retardo

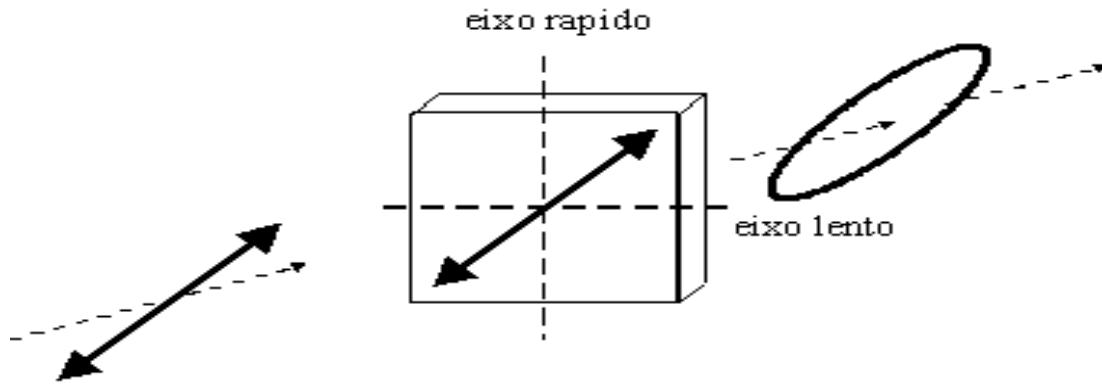


Figura 3.12: *Lâmina de retardo*

Uma luz linearmente polarizada incide a 45° com os eixos principais de uma lâmina birrefringente, como iniciado na Fig.3.12. Ao passar pela lâmina a luz fica elipticamente polarizada, onde a razão entre as intensidades do eixo maior sobre o menor vale 10.

- Calcule o valor da diferença de fase entre as componentes lenta e rápida da luz na saída da lâmina.
- Se a espessura da lâmina é de 0.2mm e o comprimento de onda da luz é de 633nm, calcule a diferença entre os índices de refração para o eixo rápido e para o lento.

3.5.2 Matrizes de Jones

1. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ representa uma lâmina de retardo de $\lambda/4$, com os eixos rápido e lento paralelos aos eixos do sistema de coordenadas.
2. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ permite rotar o sistema de coordenadas de um ângulo α no sentido anti-horário, construa a matriz de uma lâmina de retardo de $\lambda/4$ rotada de α .
3. Para $\alpha = 45^\circ$, verifique que se trata mesmo de uma lâmina de retardo de $\lambda/4$ a 45° com o sistema de coordenadas. Dica: teste o comportamento da lâmina com uma onda linearmente polarizada a 45° e com outra linearmente polarizada ao longo do eixo x ou y .

3.5.3 Lâmina de retardo de $\lambda/4$

Quero construir uma lâmina de retardo de $\lambda/4$ para $\lambda = 633$ nm, utilizando quartzo cujos índices nos eixos rápido e lento são respectivamente 1.544 e 1.553.

1. Qual é a espessura de quartzo necessário?
2. Sobre essa lâmina faço incidir perpendicularmente um raio de luz circularmente polarizado da forma:

$$E_x = E^o \cos(kz - \omega t) \quad E_y = E^o \sin(kz - \omega t) \quad k = 2\pi/\lambda \quad \omega = 2\pi/T$$

sendo que o eixo x é paralelo ao eixo “lento” da lâmina

- (a) Escreva a matriz de Jones correspondente a essa polarização.
- (b) Descreva a polarização resultante na saída da lâmina.

3.5.4 Lâmina de retardo rotada

Suponha uma lâmina de retardo de $\lambda/4$ com o eixo lento a 45° abaixo do eixo x do. Calcule a polarização da luz na saída da lâmina nos seguintes casos:

- Luz linearmente polarizada ao longo do eixo x
- Luz linearmente polarizada a 45° acima do eixo x
- Luz circularmente polarizada girando no sentido horário visto no sentido de propagação da luz.

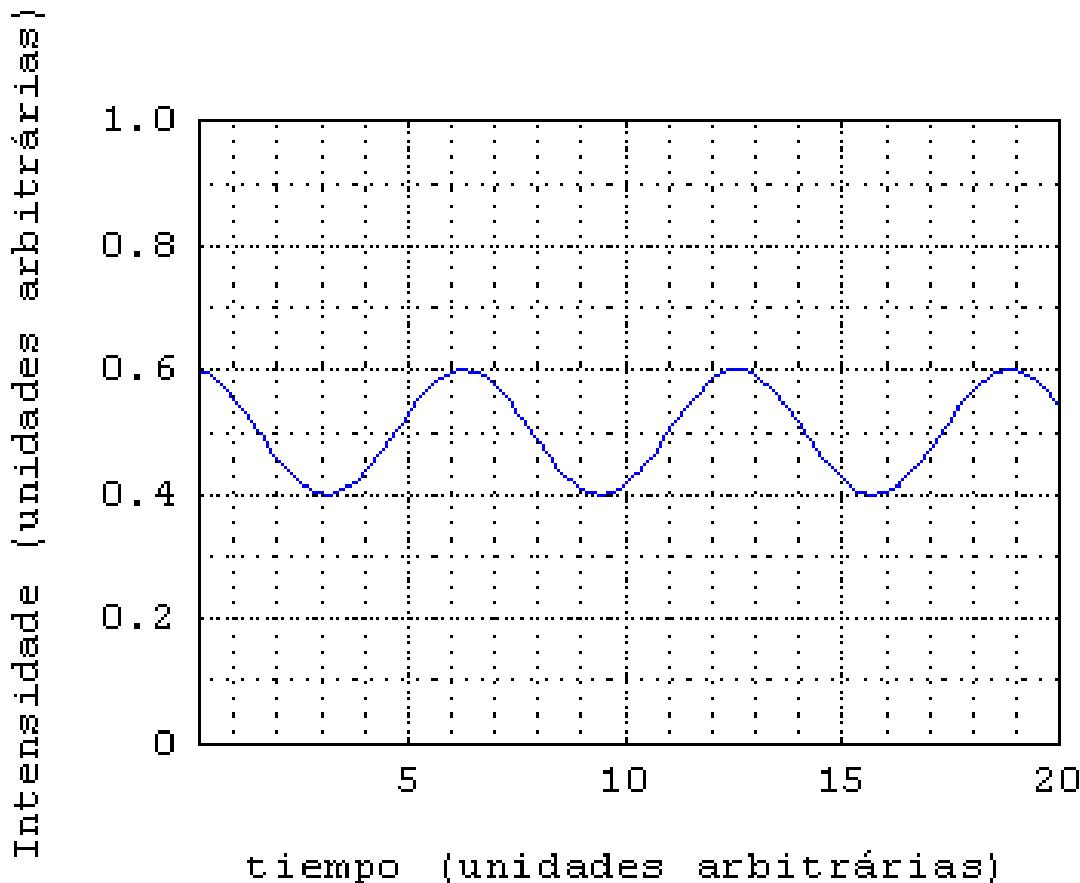


Figura 3.13: Medida da elipticidade da polarização da luz que passa por uma lâmina birrefringente, como aparece na tela do osciloscópio no experimento do laboratório

3.5.5 Experimento de Birrefringência

Uma luz linearmente polarizada de $\lambda = 589\text{nm}$ incide sobre uma lâmina birrefringente a 45° entre os dois eixos lento e rápido da lâmina que está sendo medida. A Fig.3.13 mostra o sinal que aparece no osciloscópio depois do segundo polarizador, aquele que rota com velocidade angular constante, depois da lâmina. Se a lâmina tem 1mm de espessura, quanto vale a diferença entre os dois índices de refração, no eixo rápido e no eixo lento da lâmina?

3.5.6 Intensidade e Campo elétrico num feixe laser

Um raio laser de He-Ne ($\lambda = 633 \text{ nm}$) de 1mW de potência tem uma distribuição gaussiana de intensidade na seção transversal à da direção de propagação. Sua intensidade máxima decai para $1/e$ (e : número de Euler) a 0.25mm do centro do raio. Calcule:

1. O valor máximo da intensidade da luz
2. O valor máximo do campo elétrico dessa luz

$$\text{OBS: } \int_0^{\infty} x e^{-x^2/a^2} dx = a^2/2$$

3.5.7 Intensidade e Campo Elétrico da luz

Calcule a amplitude do campo elétrico da onda de luz nos seguintes casos:

1. Uma lâmpada de 1000W a 1metro
2. Uma onda luminosa harmônica e plana se propagando no ar, com uma intensidade de 10mW/cm^2 .

3.5.8 Ondas evanescentes

Na reflexão total se geram ondas evanescentes cuja amplitude cai rapidamente com a distância à interface de reflexão. Isso pode ser utilizado para fabricar um divisor de feixes, utilizando dois prismas de vidro de 90° .

- Desenhe um divisor de feixes formado por dois prismas de vidro ($n=1.50$) que permita dividir um feixe incidente ($\lambda = 633\text{nm}$) em um transmitido e outro refletido, ambos com mas ou menos a mesma intensidade. Despreze as perdas por reflexão de Fresnel nas faces de entrada e saída de ambos prismas e suponha o índice do ar $n=1$.
- Supondo que o índice de refração não varie com o comprimento de onda da luz, qual seria a variação na percentagem da intensidade de luz transmitida, se o comprimento de onda aumentasse em 10%?

3.5.9 Método de Abélès

Ao utilizar a técnica de Abélès (vide sec. 9.2.2.1) para medida de índice de refração em filmes finos, normalmente colocamos o substrato de vidro com o filme de forma que o feixe de luz chegue primeiro ao filme e depois ao substrato e não a contrário. A técnica poderia funcionar igualmente se fazemos chegar o feixe de luz pelo lado de trás, isto é, pelo lado do substrato e chegando depois no filme? Justifique matematicamente sua resposta e faça um desenho ilustrativo.

Capítulo 4

Interferência e Coerência

A pureza espectral ou grau de monocromaticidade da luz, indica o quanto ela está próxima da condição ideal de uma onda harmônica pura, e pode ser medido usando um espetrômetro. Já a coerência, que está relacionada com o comprimento dos trens de onda que formam a radiação luminosa sob estudo, determina a capacidade de produzir franjas de interferência e, consequentemente, deve ser medida em experimentos de interferometria. Esses conceitos de pureza espectral por um lado, e coerência por outro, aparentemente tão distintos, estão estreitamente relacionados física e matematicamente. Veremos que, se conhecendo um deles, podemos calcular o outro.

Desenvolveremos o formalismo matemático adequado para descrever a interferência de duas ondas, estudaremos alguns experimentos clássicos de interferência e prestaremos especial atenção aos experimentos com o interferômetro de Michelson e a velocimetria de efeito Doppler, que utiliza esse interferômetro.

Daremos especial atenção à abordagem da luz como processo estocástico e desenvolveremos e estudaremos a função de autocorrelação (vide capt.E) e sua relação com o espectro de potência. À luz destes conceitos analisaremos vários modelos teóricos para representar pulsos de luz de diferentes origens.

4.1 Interferência

Analisaremos a interferência da luz, em termos matemáticos primeiro, e depois a partir de dois arranjos experimentais clássicos: o experimento das fendas de Young, e o interferômetro de Michelson. Este último será extensivamente utilizado para estudar o efeito Doppler e sobretudo para estudar a coerência da luz.

4.1.1 Formalismo matemático

Seja uma onda $\vec{e}(\vec{r}, t)$, formada pela soma das duas ondas harmônicas de freqüências angulares ω_1 e ω_2 e vetores de propagação \vec{k}_1 e \vec{k}_2 respectivamente

$$\begin{aligned}\vec{e}(\vec{r}, t) &= \vec{e}_1(\vec{r}, t) + \vec{e}_2(\vec{r}, t) \\ \vec{e}_1(\vec{r}, t) &= \vec{E}_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \phi_1) = \Re\{\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}, t)\} \\ \vec{e}_2(\vec{r}, t) &= \vec{E}_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \phi_2) = \Re\{\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}, t)\}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_j(\vec{r}, t) &= \vec{E}_j e^{i\Phi_j(\vec{r})} e^{-i\omega t} & \Phi_j(\vec{r}) &= \vec{k}_j \cdot \vec{r} + \phi_j & \vec{E}_j &= \hat{e}_j E_j \\ |\vec{k}_j| &= 2\pi/\lambda & \omega &= 2\pi/T\end{aligned}$$

$\Re\{ \}$ representa a “parte real”, \vec{r} é o vetor de posição e \hat{e}_j é o vetor unitário no eixo “j”. A intensidade resultante (vide Eq.(3.44)) é:

$$I = |<\vec{S}>| \propto |<\vec{e}|^2> = |<\vec{e}_1(\vec{r}, t) + \vec{e}_2(\vec{r}, t)|^2>$$

No que segue convencionaremos trocar o sinal de “proporcionalidade” pelo de “igualdade”, ficando então a expressão da intensidade na forma

$$\begin{aligned}I &= |<\vec{e}_1(\vec{r}, t)|^2 + |<\vec{e}_2(\vec{r}, t)|^2 + 2\vec{e}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_2(\vec{r}, t)> \\ \text{sendo } I_1 &= |<\vec{e}_1(\vec{r}, t)|^2> = \frac{1}{2} |E_1|^2 & I_2 &= |<\vec{e}_2(\vec{r}, t)|^2> = \frac{1}{2} |E_2|^2 \\ \text{e } 2<\vec{e}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_2(\vec{r}, t)> &= <\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 [\cos(\Phi_1 + \Phi_2 - (\omega_1 + \omega_2)t) + \cos(\Phi_1 - \Phi_2 - (\omega_1 - \omega_2)t)]>\end{aligned}$$

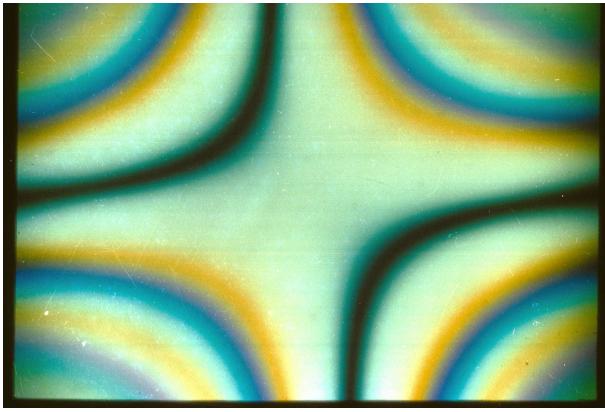


Figura 4.1: Figura de interferência produzida por um cristal de niobato de litio com o eixo óptico no plano da figura, observado com luz branca convergente, entre polarizadores cruzados

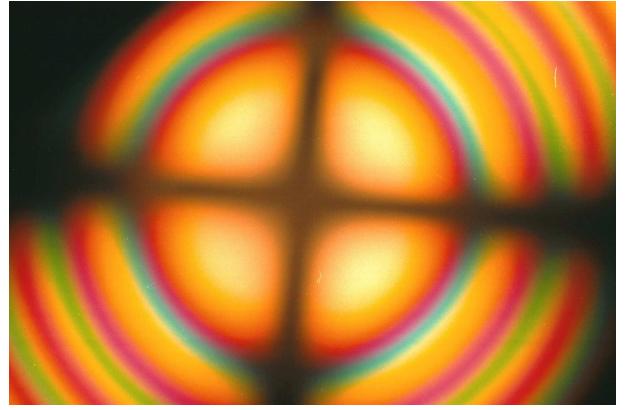


Figura 4.2: Figura de interferência produzida por um cristal de niobato de litio com o eixo perpendicular ao plano da figura, observado com luz branca convergente, entre polarizadores cruzados

onde o símbolo “ $\langle \rangle$ ” representa a média temporal. Na verdade a onda luminosa é uma função aleatória e ela, assim como as quantidades dela derivadas (intensidade, por exemplo) devem ser descritas pelas suas “esperanças matemáticas” e não pelas “médias temporais” indicadas pelo símbolo “ $\langle \rangle$ ” [4]. Podemos porém utilizar esta última no lugar da primeira, no caso de processos aleatórios estacionários no sentido amplo (vide capt.E). O processo é estacionário no sentido amplo, quando as estatísticas de primeira (média) e de segunda (produto) ordem são constantes, ou seja independentes do instante em que são calculados. Adotaremos um critério simples: se o processo (função temporal) aleatório é estacionário em sentido amplo (o que significa que sua média e seu produto de (auto-)correlação independem do tempo), as correspondentes esperanças matemáticas podem ser calculadas pelas correspondentes médias temporais.[4, 5].

Para o caso de um detector com resposta maior que $\omega_1 - \omega_2$ e muito menor que $\omega_1 + \omega_2$, o primeiro termo à direita da igualdade não será detectado dando um sinal nulo, resultando então:

$$\langle \vec{e}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2 - (\omega_1 - \omega_2)t) \rangle \quad (4.1)$$

onde $\vec{E}_{1,2}$ são constantes. Para o caso que $\omega_1 = \omega_2$, a expressão da intensidade fica

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2) \quad (4.2)$$

que é a expressão mais conhecida para descrever a interferência de duas ondas.

4.1.2 Fendas de Young

A Fig.4.3 representa esquematicamente o experimento das fendas de Young. Um luz pontual de geometria cilíndrica é gerada depois da primeira fenda. As outras duas fendas posteriores, simétricas em relação à primeira, geram duas outras ondas pontuais e cilíndricas. A Eq.(4.2) descreve a formação de franjas de interferência no experimento das fendas de Young, supondo que, por razões de simetria, as duas ondas que interferem têm a mesma fase nas fendas, mas ao chegar no ponto A a diferença de fase entre elas corresponde à diferença de caminho $D \sin \alpha$, ou seja:

$$\phi_1 - \phi_2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = \frac{2\pi D \sin \alpha}{\lambda}$$

o que substituído na Eq.(4.2) resulta em

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi D \sin \alpha / \lambda)$$

dando origem a franjas brilhantes nas posições onde $\sin \alpha = N\lambda/D$ e franjas escuras onde $\sin \alpha = (2N+1)\lambda/(2D)$, onde N é um número inteiro. Note-se que o vetor \vec{r} representa a posição de observação que pode ser arbitrariamente escolhida como sendo o centro de coordenadas sendo então $\vec{r} = 0$.

4.1.3 Interferência por uma lâmina de faces paralelas

Um outro tipo de interferência de dois feixes de luz é ilustrado na Fig.4.4 que mostra esquematicamente uma onda luminosa refletida na primeira interface (ar-vidro) de uma lâmina de vidro de faces paralelas, interferindo com a onda

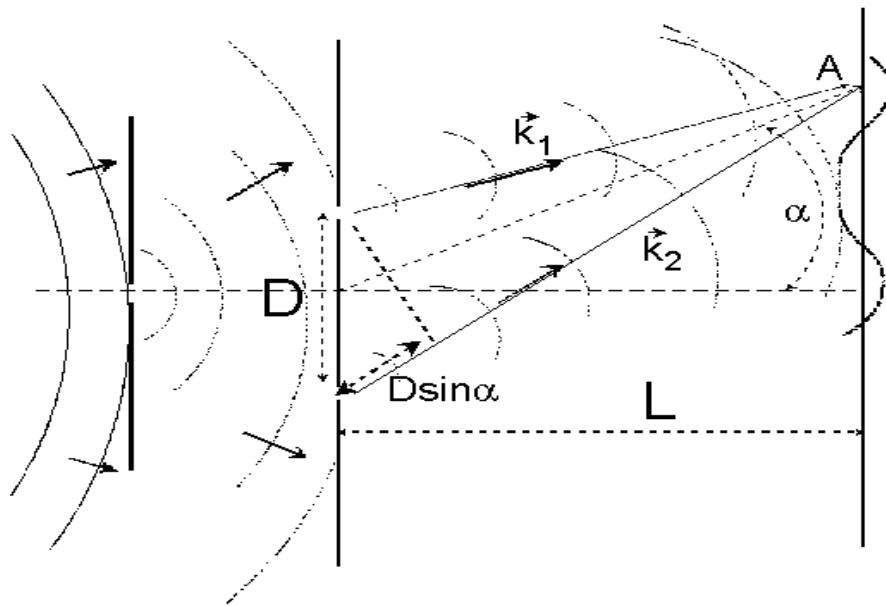


Figura 4.3: Experimento de interferência das duas fendas de Young

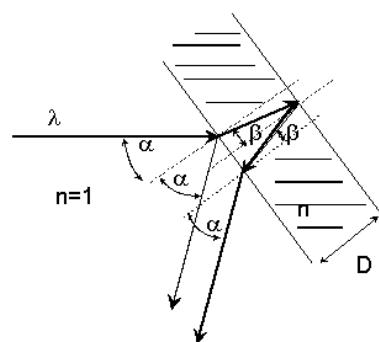


Figura 4.4: Interferência numa lâmina de faces paralelas.

refletida na segunda interface (vidro-ar). Ao mudar o ângulo de incidência muda a diferença de fase entre os dois feixes e poderemos ver assim máximos e mínimos sucessivos em função do ângulo α . Para o caso do ângulo de incidencia ser muito pequeno ($\alpha \ll 1$), a espessura da lâmina D pode ser calculada assim [6]:

$$D = \frac{\lambda n}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \quad (4.3)$$

onde n é o índice de refração do vidro e λ é o comprimento de onda da luz (suposta coerente). O ângulo α_1 é o ângulo de incidência do feixe onde pode-se ver um mínimo de interferência. O ângulo α_2 corresponde ao próximo mínimo de interferência. Veja o caso de um experimento concreto descrito na sec.4.6.17.

4.1.4 Interferômetro de Michelson

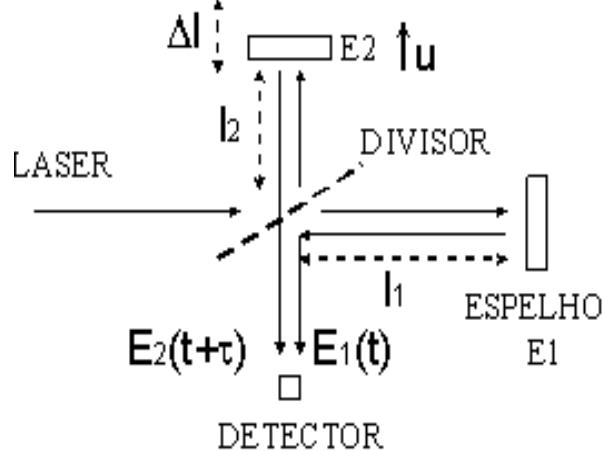


Figura 4.5: *Interferômetro de Michelson.*

Neste caso interferem duas ondas, uma que se reflete no espelho E1 e percorre uma distância $2l_1$ e a outra que se reflete no espelho E2 e percorre uma distância $2l_2$ como indicado na Fig.4.5. Ambas provêm da mesma onda inicial que é dividida no “beam-splitter”(divisor) de 50%. Queremos saber o número de franjas de interferência que passam pelo detector quando deslocamos o espelho E2 de uma distância Δl . O problema pode ser analisado de duas formas:

4.1.4.1 Estados inicial e final

Neste caso analisamos a expressão da intensidade da luz (vide Eq.(4.2) com $\vec{r} = 0$) no estado inicial e no final quando o espelho E_2 desloca-se uma distância Δl . Verificamos a variação na fase ocorrida entre esses dois estados e sabendo que cada 2π radianos representa uma franja, podemos calcular o que queremos, assim:

$$\text{número de franjas: } \frac{(\phi_1 - \phi_2)_{\text{final}} - (\phi_1 - \phi_2)_{\text{inicial}}}{2\pi} = \frac{2 \Delta l}{\lambda}$$

4.1.4.2 Evolução entre os estados inicial e final

Agora vamos analisar o processo de movimento do espelho E2. Por causa do efeito Doppler [7], a freqüência da luz que se reflete no espelho que se afasta com velocidade u , se altera de ω para ω'

$$\omega' = \omega(1 - 2u/c) \quad \omega_D \equiv \omega' - \omega = -2\omega u/c \quad (4.4)$$

o que, substituído na expressão da interferência nas Eqs.(4.1,4.2) com $\vec{r} = 0$, resulta em

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi(t) - \omega_D t) \quad (4.5)$$

A expressão de $\phi(t)$ neste caso é:

$$\phi(t) = kl_2 + k'l_2 - 2kl_1 \quad k' = k(1 - 2u/c)$$

A variação da fase ($\phi(t) - \omega_D t$), no argumento do coseno, durante o movimento de E2, é:

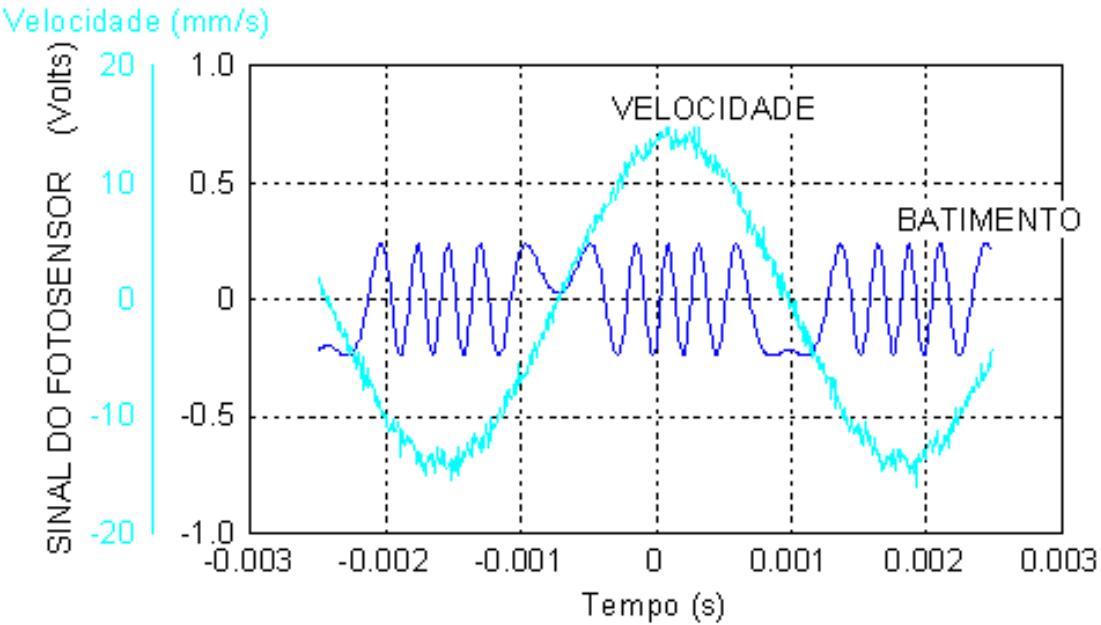


Figura 4.6: Exemplo típico de um batimento de freqüência variável produzido pela oscilação da membrana de um alto-falante. A curva representando a velocidade da membrana foi calculada a partir do batimento. (Experimento desenvolvido pelo Dr. A.A. Freschi no curso “Técnicas ópticas para medida de vibrações e deformações” UNICAMP-IFGW/FEM, Campinas-SP, Março 1998).

$$\begin{aligned}
 d\phi(t) - d(\omega_D t) &= k dl_2 + k' dl_2 + l_2 dk' - d(\omega_D t) \quad dl_2 = u dt \\
 &= 2ku dt - 2kdl_2 u/c - 2kl_2 du/c - d(\omega_D t) \\
 &= 2ku dt - 2kd(l_2 u)/c - d(\omega_D t)
 \end{aligned}$$

Calculando a variação total da fase durante o movimento do espelho E2, desde $t = 0$ até t , e supondo que tanto no inicio quanto no fim verificam-se as condições $u = 0$ e $\omega_D = 0$, o número de franjas referentes a esta variação de fase resulta ser

$$\text{número de franjas: } \frac{\int_0^t (d\phi(t) - d(\omega_D t))}{2\pi} = \frac{\int_0^t 2ku dt}{2\pi} = \frac{2\Delta l}{\lambda}$$

que é o mesmo resultado obtido na sec.4.1.4.2. Isso mostra que ambos procedimentos são equivalentes.

4.1.5 Velocimetria de efeito Doppler

O fato que o movimento de um dos espelhos no interferômetro de Michelson produça uma (pequena) variação na freqüência da luz nele refletida, que depende da velocidade do espelho em questão, é utilizado para se medir essa velocidade, a partir do batimento produzido ao interferir essa onda com uma outra refletida pelo espelho estacionário. A Fig.4.6 mostra o sinal típico de um tal batimento detectado num experimento real onde um dos espelhos foi substituído pela membrana (pintada com uma tinta retro-refletora do tipo usada em sinais de trânsito) oscilante de um alto-falante.

4.1.5.1 Exemplo: Velocimetria de efeito Doppler

A membrana de um alto-falante vibra em regime perfeitamente elástico (oscilação harmônica) com uma amplitude de $a=1\text{mm}$ e uma freqüência de $f=3\text{KHz}$.

1. Calcule a expressão para a variação temporal da freqüência da luz de $\lambda_0 = 633\text{nm}$ ao ser retro-espalhada pela dita membrana.

RESP: O movimento da membrana é descrito pela fórmula

$$x = x_0 \cos(2\pi ft)$$

e sua velocidade é

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -u_M \sin(2\pi ft) \text{ com } u_M = 2\pi x_0 f$$

que substituída na Eq.(4.4) nos permite calcular a freqüência da luz refletida na membrana móvel:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \frac{8\pi^2 x_0 f}{\lambda_0} \sin(2\pi ft)}$$

2. Se eu faço interferir o feixe acima com um outro de igual amplitude e de freqüência fixa correspondente a $\lambda_o = 633\text{nm}$, vai ocorrer um batimento, de freqüência variável, parecido com o que se pode ver na Fig.4.6. Calcule a expressão para essa freqüência do batimento, assim como seus valores máximo e mínimo.

RESP: Quando $\omega_1 \neq \omega_2$ no termo de interferência da Eq.(4.1), ocorre um batimento. A freqüência desse batimento é:

$$\begin{aligned}\omega_b &= \omega - \omega_0 = \frac{8\pi^2 x_0 f}{\lambda_0} \sin(2\pi ft) \\ \text{ou } \nu_b &= \frac{4\pi x_0 f}{\lambda_0} \sin(2\pi ft)\end{aligned}$$

Seu valor mínimo é $\nu_b^m = 0$ e seu valor máximo é $\nu_b^M = 4\pi x_0 f / \lambda_0$.

3. Veja se é possível utilizar esse batimento para calcular o valor da amplitude da oscilação da membrana, caso você saiba sua freqüência de excitação. O que você precisa medir para poder calcular a referida amplitude?

RESP: Posso calcular x_0 a partir da medida de ν_b^M , conhecendo f e λ_0 .

4. Para o caso ilustrado na Fig.4.6, estime o valor máximo para a velocidade da membrana e o valor da amplitude da oscilação. Com esses dados calcule a freqüência de oscilação da membrana.

RESP: Podemos estimar u_M da Fig.4.6, medindo o menor período que vale $\Delta t \approx 2.4 \times 10^{-4}\text{s}$ que corresponde a um deslocamento da membrana de $\lambda_0/2$ e então:

$$u_M \approx \lambda_0 / (2\Delta t) = 0.633\mu\text{m} / (2 \times 2.4 \times 10^{-4}\text{s}) = 1.35\text{mm/s}$$

Para estimar a amplitude, contamos o número total de períodos num ciclo completo (2 vezes a amplitude) que é aproximadamente 4.5, e assim:

$$x_0 \approx (4.5/2)(\lambda_0/2) = 0.71\mu\text{m}$$

A freqüência da membrana será então

$$f = u_M / (2\pi x_0) \approx \frac{1.35\text{mm/s}}{2\pi 0.71\mu\text{m}} \approx 302\text{Hz}$$

que se aproxima do valor (295.7Hz) de excitação do altofalante diretamente medido na tela do osciloscópio na Fig.4.6.

4.2 Coerência e Espectro de Potência

A coerência e a pureza espectral da luz estão diretamente relacionadas entre elas e o caráter aleatório das ondas de luz é fundamental para se compreender estes conceitos. Veremos que as idéias de “coerência” e de “espectro de potência” não têm sentido em termos de pulsos isolados e que se aplicam apenas às sucessões de pulsos que formam ondas ditas “estacionárias”.

As diferentes fontes de luz (lâmpadas incandescentes, lâmpadas de descarga de gases, arco elétrico, lasers, etc.) emitem trens de ondas ou “pulsos” com determinadas características médias (freqüência, amplitude, etc.) incluindo o comprimento do pulso. Os átomos contidos na “lâmpada” são excitados de alguma maneira e por isso algum elétron no átomo passa para um nível energético maior. Ao decair ele emite um fôton com a energia correspondente à da diferença entre o nível excitado e o de repouso aonde o elétron cai no final do processo. Entre um pulso e o seguinte tudo fica mais ou menos igual exceto sua fase, que varia aleatoriamente devido a estar associada aos diferentes instantes em que cada pulso é emitido. Isto se repete continuadamente dando uma sucessão de pulsos com as características médias determinadas pelo processo de decaimento mas sem nenhuma relação de fase entre eles como ilustrado na Fig.4.7

Em lâmpadas de gás de alta pressão, a densidade de átomos é muito grande e por isso a freqüência das colisões entre os átomos aumenta muito. Conseqüentemente o processo de decaimento pode ser interrompido mais rapidamente do que em lâmpadas de baixa pressão. O resultado são pulsos mais curtos, ainda que com a mesma freqüência (cor) média dada pela diferença de níveis energéticos no átomo, o que não muda pelas colisões, obviamente. O caso de radiação laser é bastante diferente: Por causa de um mecanismo especial, o decaimento de um átomo fica sendo “estimulado” ou “iniciado” pelo pulso que incide nele e isso faz que exista uma “sintonia” de fase entre ambos, o pulso estimulante e o estimulado. O resultado disso é uma sucessão de pulsos todos em fase uns com os outros. É como se os pulsos

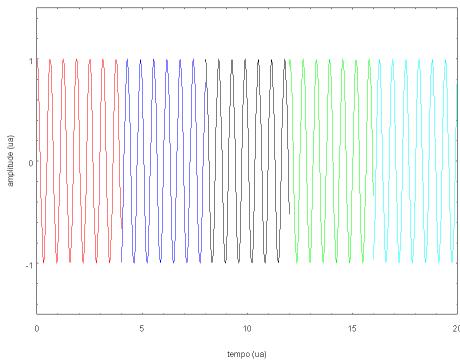


Figura 4.7: Sucessão de pulsos (representados com diferentes cores) emitidos por uma fonte incoerente

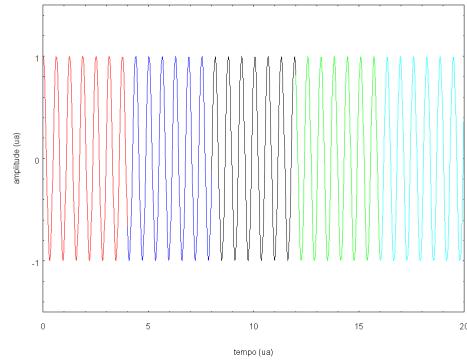


Figura 4.8: Sucessão de pulsos (representados com diferentes cores) sincronizados emitidos por uma fonte laser, coerente

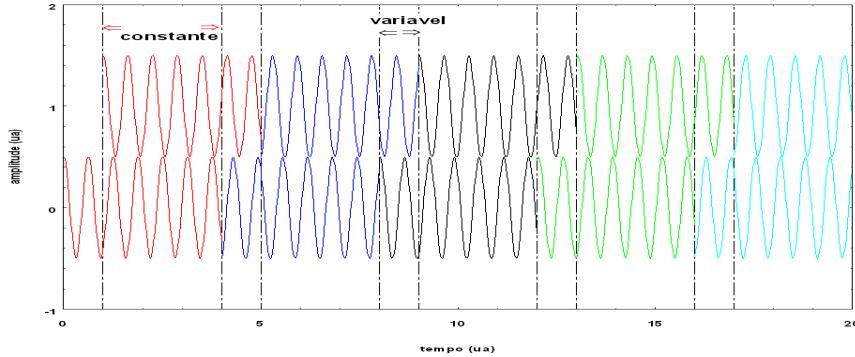


Figura 4.9: Superposição de dois feixes (formados por pulsos) mutuamente desfasados. Na região indicada por “constante” a diferença de fase entre os dois pulsos que se superpõem é constante sempre pois se trata sempre do mesmo pulso. Na região indicada por “variável” a diferença de fase é sempre distinta para cada vez, pois se trata sempre de 2 pulsos diferentes.

sucessivos estivessem “emendados” sem discontinuidade de fase como ilustrado na Fig.4.8. Em algum momento essa sintonia é interrompida e tudo recomeça. Por causa desta sintonia os lasers podem emitir pulsos de centímetros, metros ou quilómetros enquanto que as fontes ditas “incoerentes” emitem pulsos de micrômetros ou milímetros como máximo.

O comprimento dos pulsos é uma variável fundamental nos fenômenos de interferência da luz. Num experimento de interferência sempre estamos superpondo dois raios de luz provenientes da mesma fonte mas percorrendo caminhos um pouco diferentes ou superpondo dois feixes provenientes de um mesmo feixe que foi dividido em dois por um “beam-splitter”. O resultado é sempre a superposição de dois feixes, um atrasado em relação ao outro, como ilustrado na Fig.4.9.

Ao superpormos esses dois feixes atrasados, há uma região onde se superpõem apenas um pulso com ele mesmo (atrasado) e marcada como “constante” na figura. Na outra região, marcada como “variável”, se superpõem um pulso com o seu vizinho. Como a relação entre pulsos sucessivos é aleatória, aleatória é também a relação de fase na superposição nessa última região. Essa variação rápida de fase não permite visualizar a interferência desses feixes pois os nossos instrumentos de observação são muito mais lentos. Na região marcada como “constante” em câmbio, a posição espacial das franjas de interferência não muda pois a diferença de fase entre os pulsos em questão é sempre a mesma já que depende apenas do atraso entre as duas ondas. As franjas de interferência observadas são apenas originadas nessas regiões ditas “constante”. A medida que vamos aumentando a diferença de caminho entre os dois feixes no experimento de interferência, a percentagem de luz que contribui efetivamente à visualização das franjas diminui e o contraste dessas franjas diminui também por conta da contribuição da parte “variável” que aumenta e que não contribui à formação das

franjas. Quando a diferença de caminho é da ordem do comprimento dos pulsos, não veremos mais franjas.

4.2.1 Coerência

O termo de interferência na Eq.(4.1) pode ser também escrito em função da formulação complexa assim:

$$\langle \vec{e}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_2(\vec{r}, t) \rangle = \Re\{\langle \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}_2^*(\vec{r}, t) \rangle\}$$

e a intensidade resultante terá então a seguinte formulação:

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2 \Re\{\langle \mathcal{E}_1(\vec{r}, t) \mathcal{E}_2^*(\vec{r}, t) \rangle\}$$

No caso do interferômetro de Michelson, uma das ondas está atrasada em relação à outra, de forma que a expressão acima pode ser escrita assim

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2 \Re\{\Gamma(\tau)\} \quad (4.6)$$

$$\Gamma(\tau) = \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_2^*(t + \tau) \rangle \quad (4.7)$$

simplificando com $\vec{r} = 0$, mas sem perda de generalidade, onde a diferença de argumentos $\Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r})$ está representada pela diferença (temporal) de caminho óptico $\tau = 2\Delta l/c$, sendo que $\Gamma(\tau)$ é a **função de correlação** chamando-se **auto-correlação** para o caso de \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 serem a mesma onda. É importante notar que $\Gamma(\tau)$ está formada por um fator $e^{i\omega\tau}$ (ou diretamente um termo senoidal), cuja parte real descreve as oscilações rápidas de intensidade devido às franjas de interferência, e um fator real mais lento em τ , que representa a envolvente da função e que descreve a variação do contraste ou visibilidade das franjas. A Eq.(4.6) mostra claramente que o interferômetro de Michelson é um “correlómetro”, isto é, um medidor de função de auto-correlação. Definido o “grau de coerência” da luz como

$$\gamma(\tau) \equiv \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \quad \Gamma(0) = \sqrt{I_1 I_2}$$

a expressão da intensidade fica

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} \Re\{\gamma(\tau)\} \quad (4.8)$$

A função $\gamma(\tau)$ é complexa e periódica em τ . Ela está formada por um termo oscilatório rápido em τ , $e^{i\omega\tau}$, cuja parte real representa as franjas de interferência, e um outro fator também real e mais lento em τ , que representa a amplitude das franjas. Os valores máximos (I_M) e mínimos (I_m) para a intensidade (as franjas) são respectivamente

$$\begin{aligned} I_M &= I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \\ I_m &= I_1 + I_2 - \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \\ \mathcal{V} &= \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|}{I_1 + I_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

O parâmetro \mathcal{V} é a chamada “visibilidade” das franjas e é claro que ela depende de $|\gamma(\tau)|$ sendo:

máxima para	$ \gamma(\tau) = 1$	luz totalmente coerente
zero para	$ \gamma(\tau) = 0$	luz incoerente
intermediária para	$ \gamma(\tau) < 1$	luz parcialmente coerente

É interessante destacar que, ao escrever a expressão de $\Gamma(\tau)$ na Eq.(4.7), estamos implicitamente supondo que ela não depende do instante t em que o cálculo (ou a medida) é feito: isso significa admitir o caráter estacionário da $\mathcal{E}(t)$. Ou seja que, para definir sua função de auto-correlação, a função envolvida deve ser necessariamente estacionária.

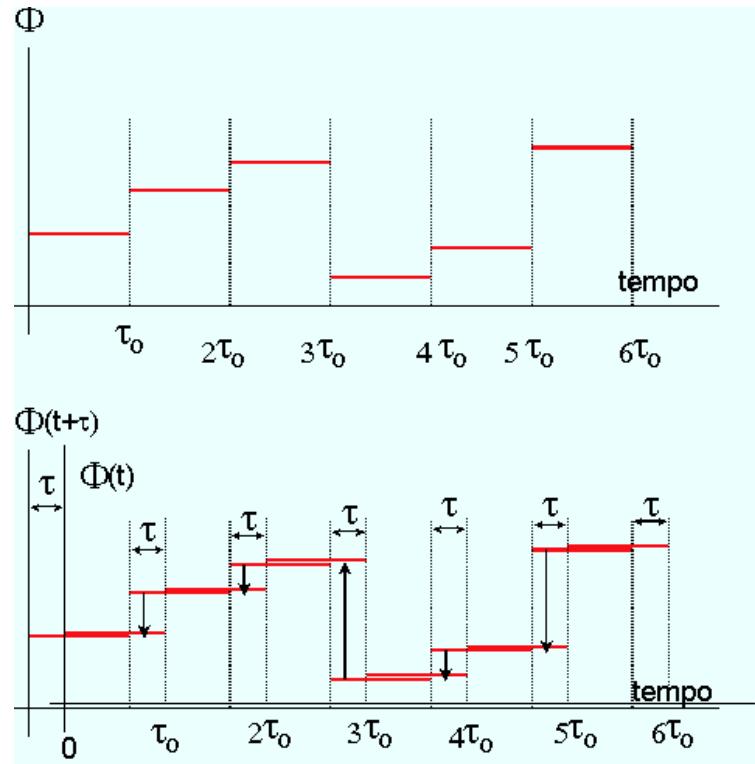


Figura 4.10: Gráfico superior: Evolução da fase para o modelo de luz descrito na Eq.(4.10). Gráfico inferior: superposição de $\phi(t)$ com $\phi(t + \tau)$ (levemente deslocada na vertical para facilitar a visualização).

4.2.1.1 Tempo de coerência e comprimento de coerência

Vamos calcular a expressão de $\gamma(\tau)$ para um modelo simplificado de luz. Seja uma luz representada por um campo elétrico [7]

$$\mathcal{E}(t) = E_o e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)} \quad 0 \leq \phi(t) \leq 2\pi \quad (4.10)$$

onde $\phi(t)$ assume aleatoriamente e com igual probabilidade quaisquer valores dentro do intervalo $[0, 2\pi]$, ficando constante por um tempo τ_o , como ilustrado na Fig.4.10.

Para calcular o grau de coerência complexo

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t+\tau) \rangle}{\langle |\mathcal{E}(t)|^2 \rangle} = e^{i\omega\tau} \langle e^{-i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} \rangle \\ &< e^{-i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} dt \end{aligned}$$

Ao formular a média temporal acima estamos supondo, como indicado na sec.4.1, que estamos tratando com uma onda estacionária. Para isso vamos considerar não apenas um pulso, mas uma sucessão deles, cujo conjunto constitui a onda estacionária em questão. Para calcular a integral acima podemos supor que T inclui um número inteiro de intervalos τ_o e fazer então o cálculo por intervalos assim

$$\begin{aligned} \langle e^{-i\phi(t) - \phi(t+\tau)} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\tau_o} \int_0^{\tau_o-\tau} e^{-i\phi(t) - \phi(t+\tau)} dt \right\rangle + \\ &\quad \left\langle \frac{1}{\tau_o} \int_{\tau_o-\tau}^{\tau_o} e^{-i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} dt \right\rangle \end{aligned}$$

Considerando (vide a Fig.4.10) que no intervalo $[0, \tau_o - \tau]$ a diferença de fase é sempre zero, e que no outro intervalo $[\tau_o - \tau, \tau_o]$ ela é aleatória (resultando numa integral média nula), o resultado será

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \Lambda\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right) \quad (4.11)$$

$$|\gamma(\tau)| = \Lambda\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right) \quad (4.12)$$

Onde a função “triângulo” “ Λ ” está descrita em B no Apêndice. Fica evidente que τ_o representa o comprimento (em termos temporais) de coerência da luz. Para tempos maiores que τ_o , o termo de interferência desaparece e a soma é incoerente. A Fig.4.11 mostra $\Re\{\gamma(\tau)\}$, ficando evidente a presença de máximos e mínimos na intensidade da luz, ou seja, mostra as franjas de interferência com freqüência angular ω , cuja visibilidade vai diminuindo à medida que aumenta τ , até $\tau = \tau_o$, a partir de onde fica constante em zero.

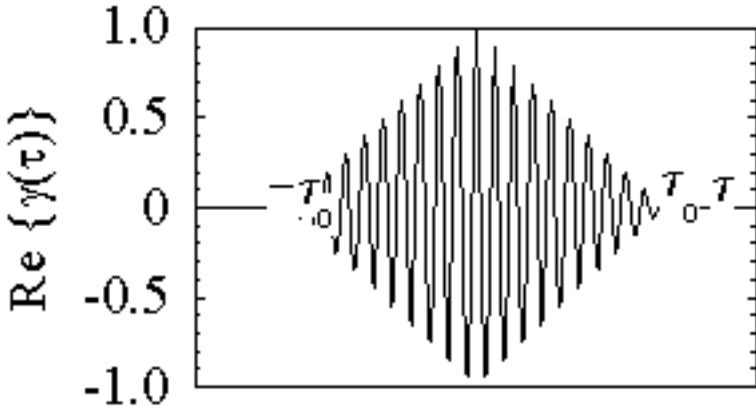


Figura 4.11: Parte real do grau de coerência complexo para o modelo de luz da Fig.4.10

4.2.2 Espectro de Potência

Ele é definido como a transformada de Fourier (TF) da função de autocorrelação [4, 5]

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (4.13)$$

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{+i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (4.14)$$

Para compreender o significado de $S(\nu)$, voltemos à definição de $\Gamma(\tau)$

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t+\tau) \rangle \\ \text{sendo que } \Gamma(0) &= \langle |\mathcal{E}(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)d\nu \text{ representa a potência} \\ \text{e consequentemente } S(\nu) &= \frac{d \langle |\mathcal{E}(t)|^2 \rangle}{d\nu} \text{ é o espectro de potência} \end{aligned}$$

ou seja a potência média por intervalo de freqüência da onda, que é real e não negativo.

Uma propriedade básica da função $\Gamma(\tau)$, deriva diretamente do fato de ela ser a Transformada de Fourier de uma função real, no caso $S(\nu)$:

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (4.15)$$

$$\Gamma^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (4.16)$$

$$\Gamma^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (4.17)$$

ou seja que

$$\boxed{\Gamma^*(-\tau) = \Gamma(\tau)} \quad (4.18)$$

Por causa da relação de transformação de Fourier entre $\Gamma(\tau)$ e $S(\nu)$, existe uma relação entre as larguras de ambas funções, como estudado na sec.B.3, pelo que concluimos que a largura dos envelopes de ambas funções verificam a importante relação

$$\Delta\nu \Delta\tau \geq 1 \quad (4.19)$$

Isso significa que, se uma luz tem grande largura espectral $\Delta\nu$, ela terá necessariamente, um pequeno comprimento de coerência ($c\Delta\tau$) determinado por $\Delta\tau$.

4.2.2.1 Espectro de potência de ondas não estacionárias

Vamos supor que estamos lidando com uma onda $f(t)$ que existe no intervalo $[-T/2, +T/2]$ ou que eu quero limitá-la a esse intervalo. Nesse caso estaremos em presença de uma onda não estacionária pelo que não vou poder definir $\Gamma(\tau)$ e consequentemente também não vou poder calcular seu espectro a partir da Eq.(4.13). É necessário então procurar uma outra via. A TF dessa função temporalmente limitada será

$$V_T(\nu) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu$$

Utilizando o Teorema de Parseval (Eq.(B.8)) podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_T(\nu)|^2 d\nu$$

que vale para funções temporalmente limitadas e finitas, e da definição da potência média, resulta

$$\text{potência: } \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V_T(\nu)|^2}{T} d\nu$$

Da expressão acima podemos achar então o espectro de potência para o caso de ondas não estacionárias

$$\boxed{S(\nu) = \frac{|V_T(\nu)|^2}{T}} \quad (4.20)$$

4.2.2.2 Espectro de potência de uma sucessão infinita de pulsos

Estudar o espectro de potência de um pulso isoladamente é algo bastante pouco real. Na realidade podemos nos encontrar com alguma fonte que emita pulsos sucessivos do mesmo tipo e podemos querer saber como calcular o espectro de potência dessa sucessão, e que relação guarda esse espectro com os pulsos individuais que a compõem. Seja uma soma de pulsos, idênticos mas temporalmente distribuídos no intervalo $(0, T)$, do tipo

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N_T} f(t - t_i) \quad 0 \leq t_i \leq T \quad t_i \text{ aleatório}$$

onde $N_T \rightarrow \infty$

e com as respectivas relações de Fourier

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ G(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \end{aligned}$$

A partir das definições acima e da propriedade de translação (veja Eq.(B.6)) da TF

$$\text{TF}\{f(t)\} = F(\nu) \Rightarrow \text{TF}\{f(t - t_o)\} = F(\nu) e^{-i2\pi\nu t_o}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \sum_{i=1}^{N_T} F(\nu) e^{-i2\pi\nu t_i} \\ |G(\nu)|^2 &= |F(\nu)|^2 \left(N_T + \sum_{j \neq i} \sum_{i=1}^{N_T} e^{-i2\pi\nu(t_i - t_j)} \right) \end{aligned}$$

Considerando que o último termo à direita deve ser zero (t_i e t_j sendo arbitrários) e considerando a Eq.(4.20), resulta

$$S(\nu) = \frac{|G(\nu)|^2}{T} = \frac{|F(\nu)|^2 \bar{N}T}{T} \quad N_T = \bar{N}T$$

onde \bar{N} é o número de pulsos por unidade de tempo. O resultado final é

$S(\nu) = \bar{N} |F(\nu)|^2$

(4.21)

4.3 Exemplos

Estudaremos alguns casos concretos a seguir

4.3.1 Pulsos retangulares

Um bom exemplo para ilustrar o tratamento de uma radiação formada por uma sucessão de pulsos retangulares com fase aleatória é o próprio modelo descrito em 4.2.1.1, que descreve uma luz quase-monocromática formada por uma sucessão de pulsos de duração τ_o e de forma

$$E(t) = E_o e^{-i\omega_o t} e^{i\phi(t)} \quad (4.22)$$

onde, após cada intervalo τ_o , $\phi(t)$ assume valores aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 2π . Adotaremos agora uma abordagem diferente, calculando primeiro $S(\nu)$ a partir da formulação em Eq.(4.21) e, a partir dela, calcularemos $\Gamma(\tau) = \text{TF}^{-1}\{S(\nu)\}$. Para isso escrevemos o pulso que compõe a radiação descrita na Eq.(4.22) como:

$$E(t) = E_o e^{-i\omega_o t} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau_o}\right) \quad (4.23)$$

Da expressão acima calculamos

$$S(\nu) = \bar{N} |\text{TF}\{E(t)\}|^2 = \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 |\text{sinc}(\tau_o(\nu + \nu_o))|^2 \quad \omega = 2\pi\nu$$

sendo que as funções “rect(x)” e “sinc(x)” estão definidas em sec.B.2. Em função das considerações na sec.4.4, podemos trocar $\nu + \nu_o$ por $\nu - \nu_o$ resultando

$$S(\nu) = \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 |\text{sinc}(\tau_o(\nu - \nu_o))|^2 \quad \text{para } \nu \geq 0$$

Podemos re-escrever a expressão acima como:

$$S(\nu) = \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 |\text{sinc}(\tau_o\nu)|^2 * \delta(\nu - \nu_o)$$

e nesse caso a função de auto-correlação pode agora ser obtida assim:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \text{TF}^{-1}\{S(\nu)\} \\ &= \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 [\text{TF}^{-1}\{\text{sinc}(\tau_o\nu)\} * \text{TF}^{-1}\{\text{sinc}(\tau_o\nu)\}] \text{TF}^{-1}\{\delta(\nu - \nu_o)\} \\ &= \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 \left[\text{TF}^{-1}\{\text{TF}\left\{\frac{1}{\tau_o} \text{rect}\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right)\right\}\} * \text{TF}^{-1}\{\text{TF}\left\{\frac{1}{\tau_o} \text{rect}\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right)\right\}\} \right] \text{TF}^{-1}\{\delta(\nu - \nu_o)\} \\ &= \bar{N} |E_o|^2 \tau_o^2 \left[\frac{1}{\tau_o} \text{rect}\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right) * \frac{1}{\tau_o} \text{rect}\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right) \right] e^{i\omega_o\tau} \end{aligned}$$

cuja formulação normalizada é

$$\gamma(\tau) = \Lambda(\tau/\tau_o) e^{i\omega_o\tau}$$

que é a mesma expressão obtida a partir de considerações de probabilidades na sec.4.2.1.1. No caso presente, os elementos de probabilidades já estão embutidos nas considerações que levaram a formular o espetro em termos da Eq.(4.21).

4.3.2 Onda quase monocromática.

Estudemos o caso de uma onda quase-monocromática, com freqüência angular centrada em ω_0 , que podemos formular assim

$$E(t) = K \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega t \, d\omega \quad (4.24)$$

Vamos calcular o seu espetro de potência e sua auto-correlação, assim como o termo de interferência que poderia ser observado em algum experimento (como por exemplo num interferômetro de Michelson) que utilice essa luz.

Em primeiro lugar, por se tratar de uma onda estacionária, é possível calcular $\Gamma(\tau)$ diretamente da sua definição e dela calcular $S(\nu)$. Vamos começar por $\Gamma(\tau)$:

$$\Gamma(\tau) = \langle E(t)E(t + \tau) \rangle \quad (4.25)$$

$$= K^2 \left\langle \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega t \, d\omega \int_0^{+\infty} e^{-(\omega' - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega'(t + \tau) \, d\omega' \right\rangle \quad (4.26)$$

$$= K^2 \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \, d\omega \int_0^{+\infty} e^{-(\omega' - \omega_0)^2/a^2} \langle \cos \omega t \cos \omega'(t + \tau) \rangle \, d\omega' \quad (4.27)$$

A média temporal indicada em Eq.(4.27) pode ser escrita assim

$$\langle \cos \omega t \cos \omega'(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos[(\omega' + \omega)t + \omega'\tau] + \cos[(\omega' - \omega)t + \omega'\tau] \rangle \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \omega'\tau \quad \text{para } \omega = \omega' \quad (4.29)$$

$$= 0 \quad \text{para } \omega' \neq \omega \quad (4.30)$$

Substituindo o resultado das Eqs.(4.29-4.30) na Eq.(4.27), resulta

$$\Gamma(\tau) = \frac{K^2}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \, d\omega \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega \tau \, d\omega \quad (4.31)$$

A primeira integral vale

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a \left[\text{Erf}\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right) \right]_0^{+\infty}$$

e considerando que

$$\text{Erf}(\pm\infty) = \pm 1 \quad \text{Erf}(-a) = -\text{Erf}(a) \quad (4.32)$$

resulta ser

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a(1 + \text{Erf}(\omega_0/a)) \approx a\sqrt{\pi} \quad \text{para } \omega_0/a \gg 1 \quad (4.33)$$

A segunda integral é

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega \tau d\omega &= \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} (e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau})/2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(\omega^2/a^2 - \omega(2\omega_0/a^2 - i\tau) + \omega_0^2/a^2)} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(\omega^2/a^2 - \omega(2\omega_0/a^2 + i\tau) + \omega_0^2/a^2)} d\omega \end{aligned} \quad (4.34)$$

Sabendo que

$$\int_0^{+\infty} e^{-(Ax^2 + Bx + C)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2 - 4AC}{4A}} \left[1 - \text{Erf}\left(\frac{B}{2\sqrt{A}}\right) \right]$$

podemos escrever a integral Eq.(4.34) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega \tau d\omega &= \\ \frac{1}{4}a\sqrt{\pi} e^{-\tau^2 a^2/4} \left[e^{-i\omega_0 \tau} + e^{i\omega_0 \tau} + e^{i\omega_0 \tau} \text{Erf}(\omega_0/a + i\tau a/2) + e^{-i\omega_0 \tau} \text{Erf}(\omega_0/a - i\tau a/2) \right] d\omega \end{aligned} \quad (4.35)$$

Sabendo ainda que

$$[\text{Erf}(x + iy)]^* = \text{Erf}(x - iy) \quad \text{para } x \text{ e } y \text{ reais}$$

podemos reescrever a equação acima assim

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{4}a\sqrt{\pi} e^{-\tau^2 a^2/4} \left[2 \cos(\omega_0 \tau) + 2\Re\{e^{i\omega_0 \tau} \text{Erf}(\omega_0/a + i\tau a/2)\} \right] d\omega \quad (4.36)$$

Substituindo as Eqs.(4.36) e (4.33) na Eq.(4.31), resulta

$$\Gamma(\tau) = \frac{K^2 a^2 \pi}{4} e^{-\tau^2 a^2/4} \cos(\omega_0 \tau + \phi(\tau)) \quad (4.37)$$

onde o termo de fase $\phi(\tau)$ depende do termo $\Re\{\text{Erf}(\omega_0/a + i\tau a/2)\}$ que se supõe variar muito mais lentamente do que $\omega_0 \tau$ no argumento do cosseno. O termo de interferência será então

$$2\Re\{\Gamma(\tau)\} = \frac{K^2 a^2 \pi}{2} e^{-\tau^2 a^2/4} \cos(\tau \omega_0 + \phi(\tau))$$

O espectro de potência pode ser calculado de $\Gamma(\tau)$

$$S(\nu) = \text{TF}\{\Gamma(\tau)\} \quad (4.38)$$

$$= \frac{K^2 a^2 \pi}{4} \text{TF}\{e^{-\tau^2 a^2/4}\} * \text{TF}\{\cos(\tau \omega_0 + \phi(\tau))\} \quad (4.39)$$

$$= \frac{K^2 a \pi \sqrt{\pi}}{2} e^{-4\pi^2 \nu^2/a^2} * [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \quad (4.40)$$

Considerando apenas o semi-eixo positivo, resulta que

$$S(\nu) = \frac{K^2 a \pi \sqrt{\pi}}{2} e^{-4\pi^2 \nu^2/a^2} * \delta(\nu - \nu_0) = \frac{K^2 a \pi \sqrt{\pi}}{2} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \quad (4.41)$$

O resultado acima já era previsível visto a expressão inicial na Eq.(4.24) que de fato descreve uma soma continua de ondas harmônicas, centradas em $\omega = \omega_0$. Lembremos também que (vide sec.4.2.2) o fator $K^2 a^2 \pi / 4$ na Eq.(4.37) deve representar o módulo quadrado do campo elétrico assim que podemos escrever $E_0 = K a \sqrt{\pi} / 2$ e então

$$\Gamma(\tau) = E_0^2 e^{-\tau^2 a^2/4} \cos(\omega_0 \tau + \phi(\tau)) \quad (4.42)$$

$$S(\nu) = \frac{2E_0^2 \sqrt{\pi}}{a} e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2} \quad (4.43)$$

4.3.3 Pulso amortecido

Estudemos o caso de uma sucessão de pulsos amortecidos onde cada um deles pode ser representado da forma

$$\begin{aligned} f(t) &= A e^{-at} \cos \omega_0 t \text{ para } t \geq 0 \quad a \geq 0 \\ &= 0 \text{ para } t < 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Seu espectro de potência será

$$S(\omega) = \tilde{N} |TF\{f(t)\}|^2 \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \tilde{N} A^2 \left| \frac{a + i\omega}{(a + i\omega)^2 + (\omega_0)^2} \right|^2 \\ &= \tilde{N} |A|^2 \frac{a^2 + (\omega)^2}{(a^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

que representa uma curva Lorentziana. Para calcular sua função de autocorrelação fazemos a transformada inversa

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= TF^{-1}\{S(\omega)\} \\ &= \tilde{N} |A|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}a} \left[\frac{a - i\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} (2a + i\omega_0)(e^{-(a + i\omega_0)(\tau - \tau_0)} * \text{Unitstep}(\tau - \tau_0)) + \right. \\ &\quad + e^{(a + i\omega_0)(\tau - \tau_0)} \text{Unitstep}(-\tau + \tau_0)) + \\ &\quad + \frac{a + i\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} (2a - i\omega_0)(e^{(a - i\omega_0)(\tau - \tau_0)} * \text{Unitstep}(-\tau + \tau_0)) + \\ &\quad \left. + e^{-(a - i\omega_0)(\tau - \tau_0)} \text{Unitstep}(\tau - \tau_0)) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

A Eq.(4.47) pode se escrever também assim

$$\Gamma(\tau) = 2\tilde{N} |A|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}a} e^{-a(\tau - \tau_0)} \left[\frac{2a^2 + \omega_0^2}{a^2 + \omega_0^2} \cos(\omega_0(\tau - \tau_0)) - \frac{a\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} \sin(\omega_0(\tau - \tau_0)) \right] \quad (4.48)$$

para $\tau \geq \tau_0$

para $\tau \geq \tau_0$ e

$$\Gamma(\tau) = 2\tilde{N} |A|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}a} e^{a(\tau - \tau_0)} \left[\frac{2a^2 + \omega_0^2}{a^2 + \omega_0^2} \cos(\omega_0(\tau - \tau_0)) + \frac{a\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} \sin(\omega_0(\tau - \tau_0)) \right] \quad (4.49)$$

para $\tau \leq \tau_0$

Isso significa que $\Gamma(\tau)$ é uma expressão real.

É interessante verificar que a energia (por unidade de volume) do pulso vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{A^2}{4a} + \frac{A^2 a}{4(a^2 + \omega_0^2)} \quad (4.50)$$

Pelo teorema de Parseval (4), essa energia pode ser também calculada pela sua transformada de Fourier assim:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |TF\{f(t)\}|^2 d\nu &= \left[A^2 \frac{(2a^2 + ia\omega_0 + \omega_0^2) \operatorname{arctg}(\frac{2\pi\nu}{a-i\omega_0}) + (2a^2 - ia\omega_0 + \omega_0^2) \operatorname{arctg}(\frac{2\pi\nu}{a+i\omega_0})}{8a\pi(a^2 + \omega_0^2)} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{A^2}{4a} \frac{2a^2 + \omega_0^2}{a^2 + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

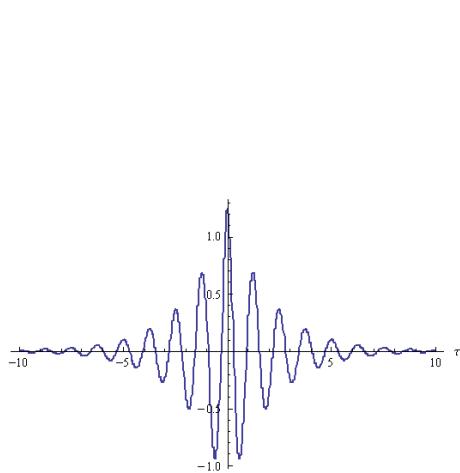


Figura 4.12: $\Re\{\Gamma(\tau)\} = \Gamma(\tau)$ para um pulso amortecido da forma $\propto e^{-0.5t} \cos(5t)$ em unidades arbitrárias

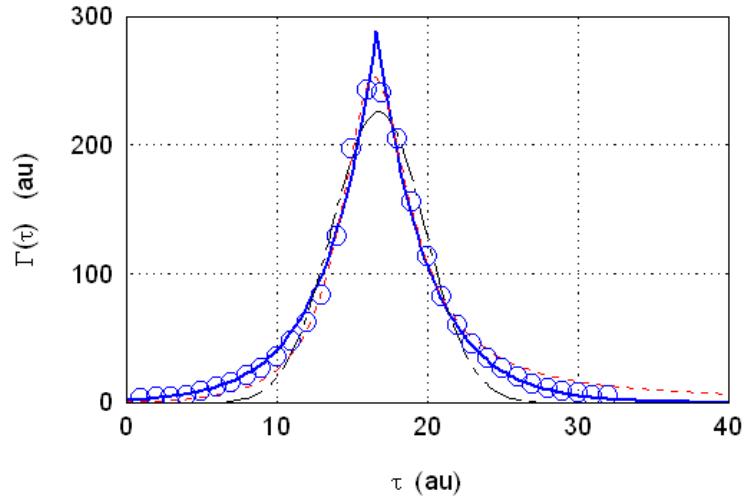


Figura 4.13: Visibilidade de uma lâmpada incandescente medida num interferômetro de Michelson: A curva grossa continua representa uma exponencial ($A e^{-a |\tau - \tau_0|}$) com $A = 290$, $a = 0.294$ e $\tau_0 = 16.6$, a curva preta com tracejado grande representa uma gaussiana ($A e^{-(\tau - \tau_0)^2/a^2}$) com $A = 226$, $\tau_0 = 16.8$ e $a = 4.34$ e a curva vermelha com tracejado pequeno representa uma lorentziana ($A \frac{a^2 \tau^2}{(a^2 + \tau_0^2 - \tau^2)^2 + 4a^2 \tau^2}$) com $A = 7808$, $a = 2.82$ e $\tau_0 = 16.3$.

que é a mesma expressão que a mostrada na Eq.(4.50).

Na Fig.4.12 podemos ver uma representação gráfica de $\Gamma(\tau)$ para um pulso amortecido arbitrário, como o descrito na Eq.4.44, com $a = 0.5 \text{ s}^{-1}$, $\omega_0 = 5 \text{ rad}$ e $\tau_0 = 0$. A Fig.4.13 mostra a visibilidade (\circ) de uma fonte de luz branca experimentalmente medida num interferômetro de Michelson e seu ajuste com diferentes curvas (exponencial, gaussiana e lorentziana) sendo obviamente o melhor ajuste resulta com a exponencial que representa a envolvente da Eq.(4.49). Ou seja que a luz emitida pela lâmpada incandescente está adequadamente representada pelo modelo de um pulso amortecido, representado na Eq.(4.44). Cada um dos pontos (\circ) no gráfico da Fig.4.13 corresponde a meia interfranja ou seja a $\lambda/2$ e sabendo que o pico do espectro de nossa fonte de luz, representada na Fig.I.1, está em $\lambda_p \approx 650 \text{ nm}$, podemos concluir que o espaçamento entre pontos na Fig.4.13, que representa 1 au, corresponde a

$$1 \text{ au} \approx \frac{\lambda_p}{2 \times c} = \frac{650 \times 10^{-9}}{2 \times 3 \times 10^8} = 1.083 \times 10^{-15} \text{ s} \quad (4.52)$$

Por outro lado, com os parâmetros indicados na Fig.4.13 para a curva exponencial podemos calcular a largura de $\Gamma(\tau)$

$$\Delta\tau = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^{+\infty} \Gamma(\tau) d\tau = 6.78 \text{ au} \quad (4.53)$$

e com o resultado na Eq.4.52 para 1 au, podemos calcular

$$\Delta\tau \approx 6.78 \text{ au} \times 1.083 \times 10^{-15} \text{ s} \approx 7.3 \times 10^{-15} \text{ s} \quad (4.54)$$

Pela relação de incerteza da TF descrita na sec.B.3, podemos concluir que a largura espectral para essa luz é

$$\Delta\nu \geq 1/(7.3 \times 10^{-15}) \text{ Hz} \quad (4.55)$$

$$|\Delta\lambda| = \lambda^2 \Delta\nu/c \geq 193 \text{ nm} \quad (4.56)$$

4.3.3.1 Interferometria com luz de um LED

Encontram-se disponíveis no mercado LEDs emitindo luz com relativamente alto grau de pureza espectral e com os quais podem se fazer experimentos de interferometria. A Fig.4.14 mostra as franjas de interferência registradas num experimento com interferômetro de Michelson com um desses LEDs e na Fig.4.15 vemos a representação gaussiana que se

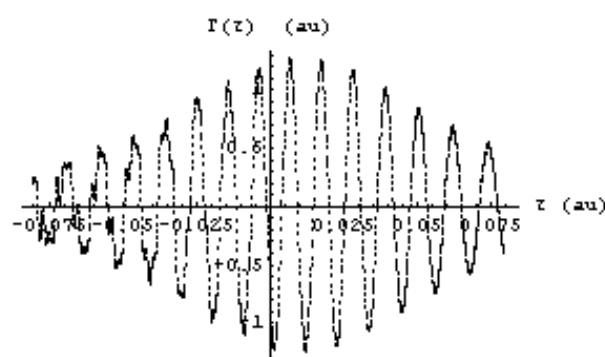


Figura 4.14: $\Re\{\Gamma(\tau)\}$ obtido num interferómetro de Michelson para um LED de 520nm, em unidades arbitrárias.

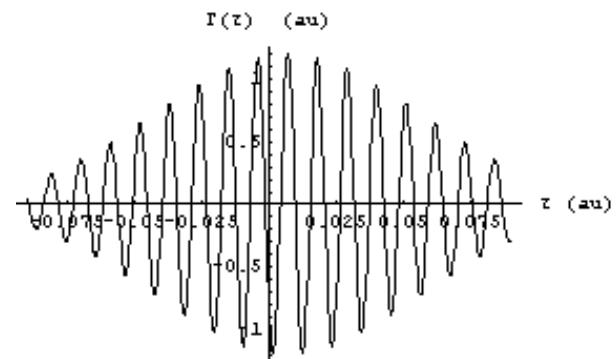


Figura 4.15: $\Re\{\Gamma(\tau)\}$ para um pulso gaussiano da forma $e^{-(\tau - \tau_0)^2/a^2} \cos(\omega_0(\tau - \tau_0))$ com $a = 0.07$, $\tau_0 = 0.007$ e $\omega_0 = 569$ tudo em unidades arbitrarias

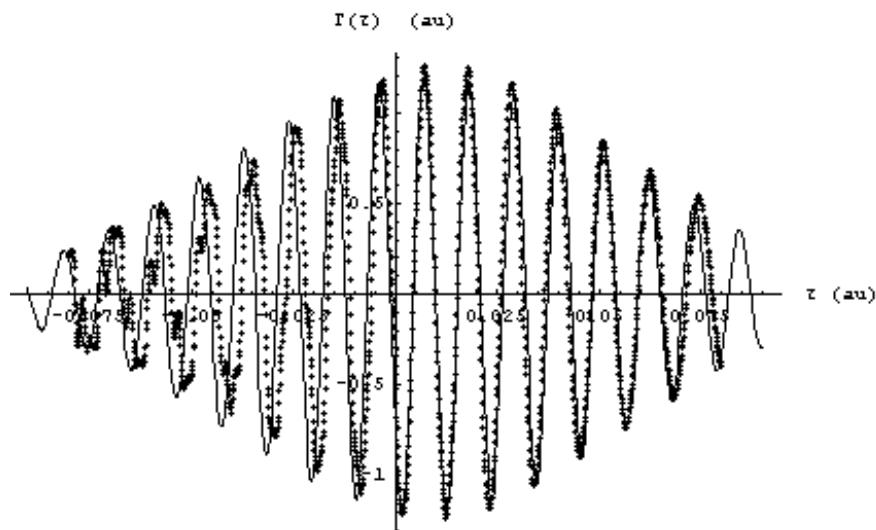


Figura 4.16: Superposição das curvas teóricas e experimentais nas Figs. 4.15 e 4.14

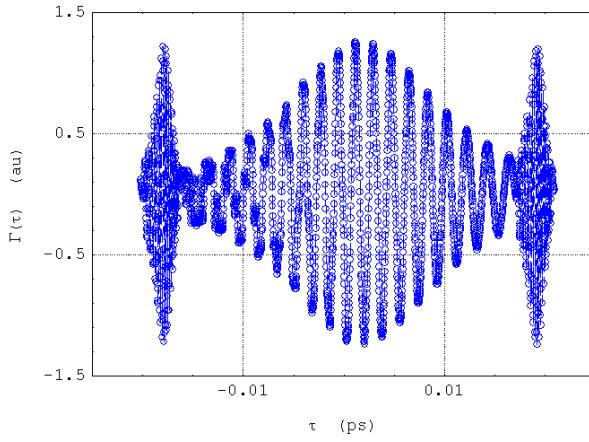


Figura 4.17: Imagem da tela do osciloscópio referente ao experimento da Fig.4.14 em coordenadas temporais reais (picosegundos) utilizando o fator de conversão: 0.161ps/au para τ . A varredura do espelho piezoelétrico no interferômetro foi feito com uma tensão na forma de rampa, onde as franjas comprimidas nos extremos correspondem ao retorno rápido da rampa

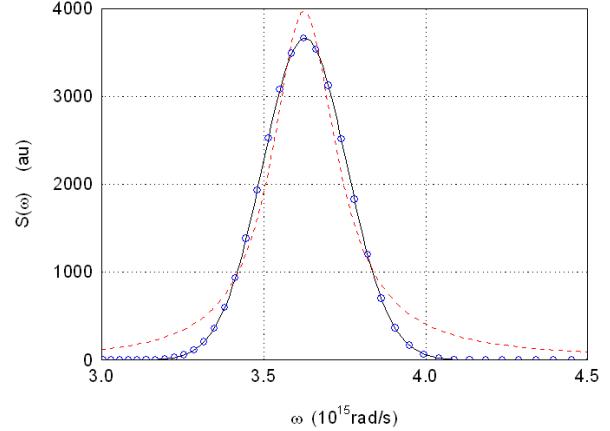


Figura 4.18: Espectro do LED de 520nm (círculos) e seu ajuste com uma curva lorentziana na forma da Eq.(4.46) ($a = 0.121$, $\omega_0 = 3.62$) e uma gaussiana da forma $e^{-(\omega - \omega_0)^2/a^2}$ (contínua) com $a = 0.184$, $\omega_0 = 3.63$) ambas com abscissas em unidades 10^{15} rad/s.

ajusta melhor aos resultados experimentais desse LED. Para facilitar a comparação, ambos os gráficos aparecem superpostos na Fig.4.16. A Fig.4.17 é a imagem da tela do osciloscópio de onde se obteve a Fig.4.14 mas agora com a base de tempo convertida para em unidades absolutas. A Fig.4.18 mostra o espectro medido para esse mesmo LED.

4.3.3.2 Espectro de Potência de um LED

As Figs.4.19 e 4.20 mostram espectros medidos (\circ) para dois LEDs. O espectro da Fig.4.20 não ajusta perfeitamente nem para uma gaussiana nem para uma lorentziana. O da Fig.4.19 em câmbio, ajusta bem para uma gaussiana da forma

$$S(\nu) = e^{-\pi\nu^2/a^2} \otimes \delta(\nu - \nu_0) \quad (4.57)$$

$$\Gamma(\tau) = \text{TF}^{-1}\{S(\nu)\} \propto e^{-\pi a^2 \tau} e^{i2\pi\nu_0\tau} \quad (4.58)$$

que levou aos seguintes valores:

- $\lambda_0 = c/\nu_0 = 467$ nm
sendo então $\nu_0 = 6.4 \times 10^{14}$ Hz
- O valor máximo foi $S(\nu_0) = 5400$ au
e $S_1(\nu_1 = c/\lambda_1) = S_2(\nu_2 = c/\lambda_2) = S(\nu_0) e^{-\pi} \approx 250$ au
com $\lambda_1 = 430$ nm e $\lambda_2 = 510$ nm, com $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 80$ nm
 $a = \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{3 \times 10^8}{(467 \times 10^{-9})^2} 80 \times 10^{-9} = 1.1 \times 10^{14}$ Hz
- Quantas franjas de interferência poderão ser detectadas num experimento de interferência utilizando o mesmo detector usado para medir o espectro?
Considerando a interferência de dois feixes de igual amplitude que pode se escrever assim

$$I = 2\Gamma(0) + 2\Re\{\Gamma(\tau)\} \quad (4.59)$$

o número de franjas que se podem observar dependerá do número de períodos observados até a visibilidade cair até $1/e^2$ do seu valor central, ou seja para $\pi a^2 \tau^2 = 2$ que substituído em

$$\Re\{\Gamma(\tau)\} = e^{-\pi a^2 \tau^2} \cos(2\pi\nu_0\tau) \quad (4.60)$$

resulta num número de franjas

$$\text{Parte Inteira}\left\{\frac{\nu_0}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right\} = 4 \quad (4.61)$$

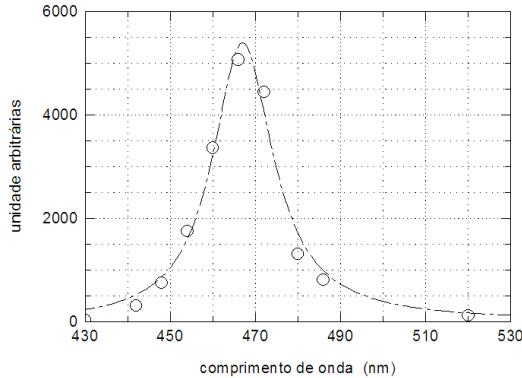


Figura 4.19: Espectro de LED

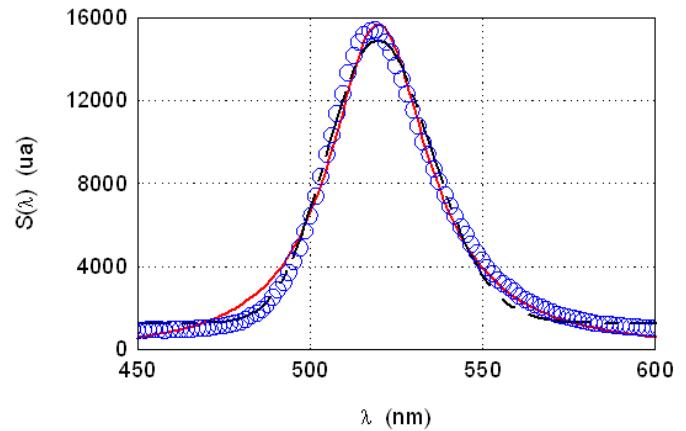


Figura 4.20: Espectro de potência medido para um LED, em unidades arbitrárias. A curva contínua representa uma lorentziana $a(1+b^2/\lambda^2)/((1+b^2(1/\lambda^2-1/\lambda_0^2))^2+4b^2/\lambda^2)$ com $a = 63500$ ua, $b = 15500$ nm, $\lambda_0 = 519$ nm e 228 ua de fundo. A curva tracelada representa uma gaussiana $a * \text{exponent} - b^2(1/\lambda - 1/\lambda_0)^2$ com $a = 13600$ ua, $b = 12600$ nm e $\lambda_0 = 520$ nm com 1267 ua de fundo.

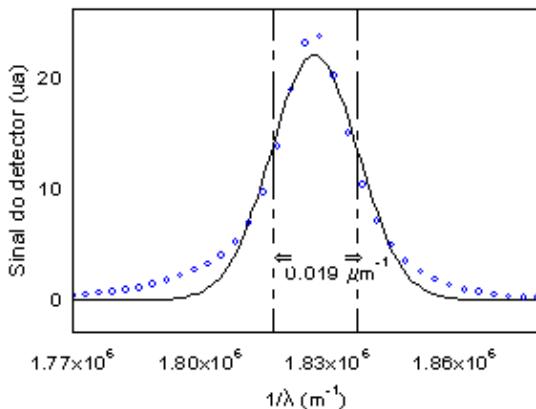


Figura 4.21: Espectro de um filtro interferencial Zeiss (círculos), medido no Laboratório de Ensino de Óptica/IFGW-UNICAMP, pelo Eng. A. Costa. A largura a meia altura é de $\Delta(1/\lambda) \approx 0.019 \mu\text{m}^{-1}$ e a posição do máximo está em $\lambda_M = 547.5 \mu\text{m}$. A curva contínua representa o ajuste dos dados experimentais por uma gaussiana (Eq.(4.62)).

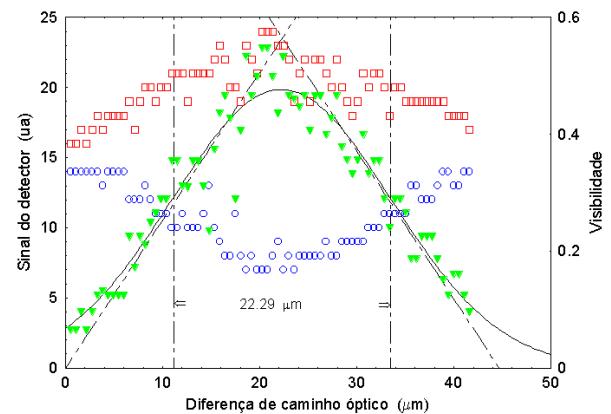


Figura 4.22: Intensidade do máximo (quadrados) e do mínimo (círculos) para franjas de interferência (eixo da esquerda) medidas no Laboratório de Ensino de Óptica/IFGW-UNICAMP, pelo Eng. A. Costa num interferômetro de Michelson. A visibilidade correspondente (Triângulo cheio, eixo da direita) mostra uma largura a meia altura de $\Delta(l) \approx 22.3 \mu\text{m}$. A curva contínua representa o ajuste por uma gaussiana (Eq.(4.63)).

4.3.3.3 Filtro interferencial

O espectro de um filtro interferencial da firma Zeiss foi medido e o resultado aparece na Fig.4.21. O gráfico original foi reprocessado para colocá-lo em função de $1/\lambda$ como aparece na figura. A largura a meia altura foi estimada em $0.019 \mu m^{-1}$ e os dados foram ajustados com uma gaussiana da forma

$$S(1/\lambda) \propto e^{-2\pi^2 T_o^2 c^2 (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o})^2} \quad (4.62)$$

que corresponde a expressão de $S(\nu)$, para pulsos gaussianos, na sec.4.3.2. Os parâmetros ajustados resultaram ser

$$2\pi^2 T_o^2 c^2 = 4760 \mu m^2 \quad T_o c = 15.5 \mu m$$

Com uma fonte de luz branca passando pelo filtro representado na Fig.4.21 num interferômetro de Michelson produziram-se franjas de interferência. Os máximos e os mínimos de intensidade das franjas sucessivas foram medidos e graficados na Fig.4.22, junto com a visibilidade daí calculada. As abscissas foram calculadas a partir do valor médio (547.5nm) para o comprimento da luz utilizada, sabendo que cada franja corresponde a uma diferença de caminho óptico de 547.5nm. A visibilidade graficada na Fig.4.22 tem uma largura a meia altura estimada em $22.3 \mu m$. Os dados da Fig.(4.22) foram ajustados com uma gaussiana da forma

$$\Gamma(\tau c) \propto e^{-(\tau c)^2 / (2T_o^2 c^2)} \quad (4.63)$$

que corresponde à envolvente da expressão de $\Gamma(\tau)$ para pulsos gaussianos na sec.4.3.2. Os parâmetros ajustados resultaram ser

$$1/(2T_o^2 c^2) = 0.00395 \mu m^{-2} \quad T_o c = 11.25 \mu m$$

Os valores para $T_o c$ calculados a partir do espectro da luz na Eq.(4.62) e da visibilidade das franjas de interferência na Eq.(4.63) são bastante parecidos. Já o produto das respectivas larguras a meia altura

$$\Delta(\frac{1}{\lambda})\Delta(l) = 0.019 \mu m^{-1} 22.3 \mu m = 0.4 \quad (4.64)$$

está bastante longe do valor “1”, que deveria dar segundo a teoria, mas ainda está dentro da ordem de grandeza adequada. É interessante apontar que os modelos representados por uma sucessão pulsos retangulares (sec.4.3.1) e de pulsos amortecidos (sec.4.6.13) se ajustaram muito pior aos dados experimentais, do que para o caso do modelo gaussiano adotado aqui.

4.3.4 Espectroscopia por transformação de Fourier.

O espectro de potência normalmente se mede usando espetrómetros, que utilizam uma rede de difração para separar a potência da radiação luminosa sob análise, em faixas espectrais. Assim determina-se o quanto da potência corresponde a cada faixa espectral. A resolução do aparelho depende fundamentalmente do poder separador da rede.

O espectro pode ser também calculado a partir da medida de $\Re\{\Gamma(\tau)\}$ feita num interferômetro de Michelson, pela relação de transformação de Fourier que existe entre $S(\nu)$ e $\Gamma(\tau)$. Assim, podemos calcular $\Gamma(\tau)$ a partir do interferograma no interferômetro e de aí (via transformação de Fourier) o $S(\nu)$. Por causa da “relação de incerteza” (vide B.3) que existe entre as funções $S(\nu)$ e $\Gamma(\tau)$, a resolução espectral calculada da relação $S(\nu) = \text{TF}\{\Gamma(\tau)\}$ está determinada pela largura de $\Gamma(\tau)$ e por isso será melhor quanto maior seja a varredura do espelho no interferômetro de Michelson utilizado. De fato, se estamos lidando com uma luz cuja largura espectral é $\Delta\nu$, a envolvente do interferograma (ou seja a envolvente de $\Re\{\Gamma(\tau)\}$) terá uma largura $\Delta\tau \geq 1/\Delta\nu$. Isso representa um deslocamento espacial do espelho que permite uma variação de caminho óptico superior a

$$c\Delta\tau \geq c/\Delta\nu \quad (4.65)$$

Se o espelho do interferômetro não permite deslocamentos dessa amplitude, não poderemos medir corretamente a largura do interferograma e não poderemos calcular $\Delta\nu$. Quanto mais fina seja a linha espectral ($\Delta\nu$) maior terá que ser a distância $c\Delta\tau$ definida na Eq.(4.65).

4.3.4.1 Exercícios

- Em função das relações em Eq.(4.13-4.14), posso calcular o espectro de uma radiação luminosa, a partir da $\Gamma(\tau)$ obtida com um interferômetro de Michelson. Qual deverá ser a varredura mínima do espelho de um interferômetro de Michelson para que ele possa permitir o cálculo de $S(\nu)$ com uma precisão de 0.1 \AA , para $\lambda \approx 500 \text{ nm}$?
Resposta: maior que 25mm.
- O interferômetro de Michelson de nosso laboratório de ensino permite mover um dos espelhos uma distância máxima de 5mm. Isso vai determinar a resolução do aparelho na hora de querer calcular o espectro de alguma luz ou da luz transmitida por algum material. Nessas condições, qual seria mínima separação entre duas linhas vizinhas e/ou a largura mínima de uma linha que se poderia detectar com nosso aparelho?

4.4 Sinal Analítico e Transformada de Fourier

O conceito de “sinal analítico” não deve ser confundido com o de “função analítica” que matematicamente significa uma função que é localmente dada por uma série de potências convergentes.

Em Óptica raramente utilizamos diretamente a expressão real do campo elétrico da onda eletromagnética, mas utilizamos em geral sua representação complexa, chamada de “sinal analítico”. Assim, em lugar da função temporal real

$$f_R(t) = \cos(2\pi\nu_0 t + \phi) \quad (4.66)$$

utilizamos a representação exponencial

$$f(t) = e^{i(2\pi\nu_0 t + \phi)} \quad (4.67)$$

cuja parte real representa $f_R(t)$. Isto se faz pelas vantagens que a representação complexa tem do ponto de vista operacional. Mas o que interessa em última instância é sempre a parte real do sinal analítico. Vamos analisar a questão um pouco mais detalhadamente.

O sinal analítico ou representação analítica de uma função real, facilita muitas das operações matemáticas sobre essa função. A ideia básica é que as freqüências negativas da Transformada de Fourier (TF) de uma função real, são superfluas (podem ser descartadas sem perda de informação), devido à simetria de sua TF.

Seja a função real $f_R(t)$ e sua transformada de Fourier $F_R(\nu)$

$$f_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (4.68)$$

$$F_R(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (4.69)$$

onde

$$f_R(t) = \int_{-\infty}^0 F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu + \int_0^{+\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (4.70)$$

Por causa do caráter real de $f_R(t)$, podemos escrever

$$F_R^*(\nu) = F_R(-\nu) \quad (4.71)$$

e então resulta que

$$\int_{-\infty}^0 F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{+\infty}^0 F_R(-\nu') e^{-i2\pi\nu' t} d(-\nu') = \int_0^{+\infty} F_R^*(-\nu') e^{-i2\pi\nu' t} d(\nu') \quad \nu' = -\nu \quad (4.72)$$

pelo que podemos reescrever a Eq.(4.70) assim

$$f_R(t) = \int_0^{+\infty} [F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} + F_R^*(\nu) e^{-i2\pi\nu t}] d\nu = 2\Re \left\{ \int_0^{+\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right\} \quad (4.73)$$

O sinal analítico $f(t)$ associado à função real $f_R(t)$ é definido como

$$f(t) \equiv 2 \int_0^{\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (4.74)$$

resultando assim

$$\Re \{f(t)\} = f_R(t) = 2\Re \left\{ \int_0^{\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right\} \quad (4.75)$$

$$\Im \{f(t)\} = f_I(t) = 2\Im \left\{ \int_0^{\infty} F_R(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right\} \quad (4.76)$$

onde

$$f(t) = f_R(t) + i f_I(t) \quad (4.77)$$

sendo que $f_I(t)$ é a chamada Transformada de Hilbert. Da definição do sinal analítico na Eq.(4.74) podemos escrever que

$$\text{TF}\{f(t)\} = F(\nu) = 2F_R(\nu)U(\nu) = \begin{cases} 2F_R(\nu) & \nu > 0 \\ F_R(0) & \nu = 0 \\ 0 & \nu < 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

onde $U(\nu)$ é a função “degrau” ou de Heaviside (vide sec.A.2). Da Eq.(4.77) resulta

$$F(\nu) = F_R(\nu) + iF_I(\nu) = 2F_R(\nu)U(\nu) \quad (4.79)$$

de onde concluimos que

$$iF_I(\nu) = 2F_R(\nu)U(\nu) - F_R(\nu) = \begin{cases} F_R(\nu) & \nu > 0 \\ 0 & \nu = 0 \\ -F_R(\nu) & \nu < 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

Para calcular o sinal analítico $f(t)$ associado à função real $f_R(t)$, procedemos assim:

$$\begin{aligned} F(\nu) &= 2F_R(\nu)U(\nu) \quad \text{onde } F_R(\nu) = \text{TF}\{f_R(t)\} \\ f(t) &= \text{TF}^{-1}\{F(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 2F_R(\nu)U(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = 2 \text{TF}^{-1}\{F_R(\nu)\} * \text{TF}^{-1}\{U(\nu)\} \end{aligned} \quad (4.81)$$

A TF de $U(\nu)$ (vide sec.(B.2.5)) vale

$$\text{TF}^{-1}\{U(\nu)\} = \frac{i}{2\pi t} \quad (4.83)$$

que substituída na expressão acima para $f(t)$ resulta

$$f(t) = 2 \text{TF}^{-1}\{F_R(\nu)\} * \text{TF}^{-1}\{U(\nu)\} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{f_R(\xi)}{2\pi(t-\xi)} d\xi \quad (4.84)$$

que permite calcular $f(t)$ à partir de $f_R(t)$. Por outro lado, se definimos

$$F_R(\nu) \equiv a(\nu) e^{i\phi(\nu)} \quad a(\nu) \text{ e } \phi(\nu) \text{ reais} \quad (4.85)$$

podemos escrever, segundo Eq.(4.73),

$$f_R(t) = \int_0^{+\infty} 2a(\nu) \cos(2\pi\nu t + \phi(\nu)) d\nu \quad (4.86)$$

com

$$f_I(t) = \int_0^{+\infty} 2a(\nu) \sin(2\pi\nu t + \phi(\nu)) d\nu \quad (4.87)$$

$$f(t) = \int_0^{+\infty} 2a(\nu) e^{i2\pi\nu t + \phi(\nu)} d\nu \quad (4.88)$$

4.4.1 Exemplo: onda senoidal

Seja a onda real

$$f_R(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \quad \nu_0 > 0 \quad (4.89)$$

Para calcular seu sinal analítico seguindo o raciocínio na Eq.(4.88), basta escrever

$$f(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} \quad (4.90)$$

cuja TF será

$$\text{TF}\{e^{i2\pi\nu_0 t}\} = \delta(\nu - \nu_0) \quad (4.91)$$

que também podemos calcular da Eq.(4.78) como

$$F(\nu) = 2F_R(\nu)U(\nu) = 2 \left(\frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0) \right) U(\nu) = \delta(\nu - \nu_0) \quad (4.92)$$

4.4.2 Exemplo: pulso amortecido

Seja o pulso dado pela expressão real

$$g_R(t) = \begin{cases} A e^{-at} \cos \omega_0 t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

cuja Transformada de Fourier é

$$G_R(\nu) = \int_0^{+\infty} A e^{-at - i\nu t} \cos \omega_0 t \, dt = A \frac{a + i\nu}{(a + i\nu)^2 + \omega_0^2} \quad (4.94)$$

A função em questão pode ser escrita também assim

$$g_R(t) = \begin{cases} A e^{-at} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] / 2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.95)$$

cuja Transformada de Fourier resulta ser

$$G_R(\nu) = A \frac{1}{a + i\nu} * \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2} = \frac{A}{2(a + i(\omega - \omega_0))} + \frac{A}{2(a + i(\omega + \omega_0))} \quad (4.96)$$

que é igual à expressão na Eq.(4.94). Se usamos o sinal analítico correspondente

$$g(t) = \begin{cases} A e^{-at} e^{i\omega_0 t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{onde } \omega_0 = 2\pi\nu_0 \quad (4.97)$$

sua Transformada de Fourier, calculada diretamente como $G(\nu) = \text{TF}\{g(t)\}$, com $\omega = 2\pi\nu$, será

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{A}{a + i(\omega - \omega_0)} & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.98)$$

e que equivale ao cálculo feito pela expressão na Eq.(4.78)

$$G(\omega) = 2G_R(\omega)U(\omega) = 2 \left(\frac{A/2}{a + i(\omega - \omega_0)} + \frac{A/2}{a + i(\omega + \omega_0)} \right) U(\omega) = \frac{A}{a + i(\omega - \omega_0)} \quad \omega > 0 \quad (4.99)$$

4.5 Interferência e reflexões múltiplas em filmes e lâminas

Este assunto é bastante diferente dos outros tópicos aqui tratados e só está incluído devido a seu grande interesse prático. Supondo um raio incidindo com um ângulo θ sobre duas interfaces perfeitamente paralelas, que limitam um meio de índice de refração n , a intensidade da luz transmitida pode ser calculada [7] como:

$$I_T = I_o \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1+F \sin^2(\Delta/2)} \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \Delta = \delta_r + 4\pi n d \cos \theta' / \lambda \quad (4.100)$$

onde R e T são a refletância e a transmitância respectivamente (em intensidade) de cada uma das interfaces, d a distância entre as duas interfaces, θ' o valor de θ dentro do meio entre as duas interfaces, λ o comprimento de onda da luz (no vácuo), e δ_r a eventual mudança de fase provocada pela reflexão em cada uma das interfaces. Quando $R \approx 1$, a luz transmitida apresenta picos muito estreitos, o que permite separar facilmente comprimentos de onda muito próximos. O instrumento com estas características chama-se Interferômetro de Fabry-Perot e ele tem usualmente uma capacidade de resolução espectral muito grande. Quando $R \ll 1$, $F \ll 1$ e a Eq.(4.100) pode-se aproximar a

$$I_T \approx I_o \frac{T^2}{(1-R)^2} (1 - F \sin^2(\Delta/2)) \quad (4.101)$$

que representa uma função senoidal de modulação muito pequena.

Pode-se observar esse tipo de comportamento ao fazer espectrofotometria de transmissão num filme ou lâmina finos, cuja espessura óptica (nd) seja menor que o comprimento de coerência da luz utilizada. A Eq.(4.101) pode ser utilizada para analisar esse espectro de transmissão e calcular a espessura e/ou o índice de refração do filme ou lâmina. Já sabemos que a coerência é maior quanto menor a largura espectral. Esta última depende da largura da fenda do monocromador utilizado no espectrofotômetro, pelo que o comportamento descrito pela Eq.(4.101) poderá ser observado (dentro de certos limites) ao reduzir suficientemente a largura da fenda do monocromador (vide problema 4.6.15).

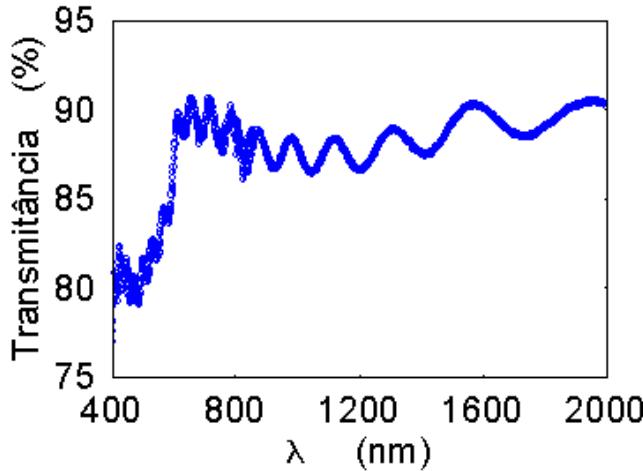


Figura 4.23: Transmittância (%) de um filme fino de fotorresina sobre um substrato de vidro, medido com o espectrofotômetro do Laboratório de Ensino de Óptica-IFGW/UNICAMP (Dados pertencentes e fornecidos pela Profa. Lucila Cescato).

A Fig.4.23 mostra o espectro de transmissão de um filme fino de fotorresina sobre um substrato de vidro. O substrato de vidro tem alguns milímetros de espessura pelo que sua espessura é maior que o comprimento de coerência da luz utilizada. O filme é suficientemente fino para permitir observar as interferências múltiplas descritas pelas Eq.(4.100)-Eq.(4.101). Na Fig.4.24 foi graficado o inverso da Transmittância (base 1 e não 100) (eixo da esquerda) enquanto que no eixo da direita foi graficado (quadrados) o número de ordem dos extremos (máximos e mínimos) sucessivos, começando arbitrariamente no número de ordem de interferência N=1. Da Eq.(4.100) deduzimos que (supondo incidência normal onde $\cos \theta' = 1$)

$$4nd\frac{1}{\lambda} = N \quad \text{número de ordem} \quad (4.102)$$

sendo que do ajuste linear na Fig.4.24 e do fato que $x=1/\lambda$ calculamos a espessura óptica do filme $nd=4100$ nm. Sabendo que esses filmes têm um índice de refração da ordem de 1.6, podemos estimar a espessura geométrica $d \approx 2563$ nm. É interessante notar o excelente ajuste dos dados (quadrados) na figura com uma linha reta, o que significa que a dispersão cromática do índice de refração, se existe, é menor que a precisão das medidas, pelo menos na faixapectral analisada.

4.5.1 Lâminas

Uma situação de interesse prático aparece no caso de nd ser bastante maior que o comprimento de coerência da luz, ou também, no caso em que as duas interfaces sejam pouco paralelas de forma que o período das franjas de interferência resultantes não possam ser espacialmente resolvidas pelo foto-detector. Supondo ainda que o material apresente um coeficiente de absorção α em intensidade, a luz transmitida, a refletida e a absorvida podem ser escritas, respectivamente, como

$$I_T = I_o \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha d}}{1 - R^2 e^{-2\alpha d}} \quad (4.103)$$

$$I_R = I_o \left[R + \frac{(1-R)^2 R e^{-2\alpha d}}{1 - R^2 e^{-2\alpha d}} \right] \quad (4.104)$$

$$I_A = I_o \frac{(1-R)(1 - e^{-\alpha d})}{1 - R e^{-\alpha d}} \quad (4.105)$$

Como exercício, verifique que $I_T + I_R + I_A = I_o$.

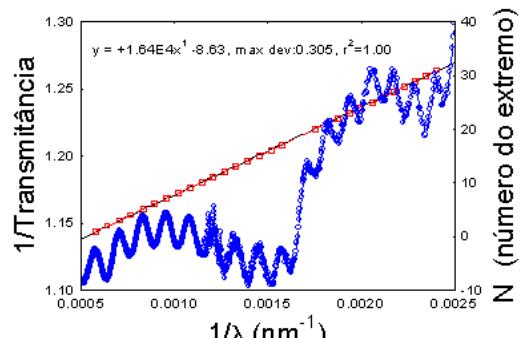


Figura 4.24: Inversa da Transmittância (base 1 e não 100) no eixo da esquerda, e número de ordem dos extremos sucessivos na Transmittância (quadrados) no eixo da direita, ambos vs. $1/\lambda$.

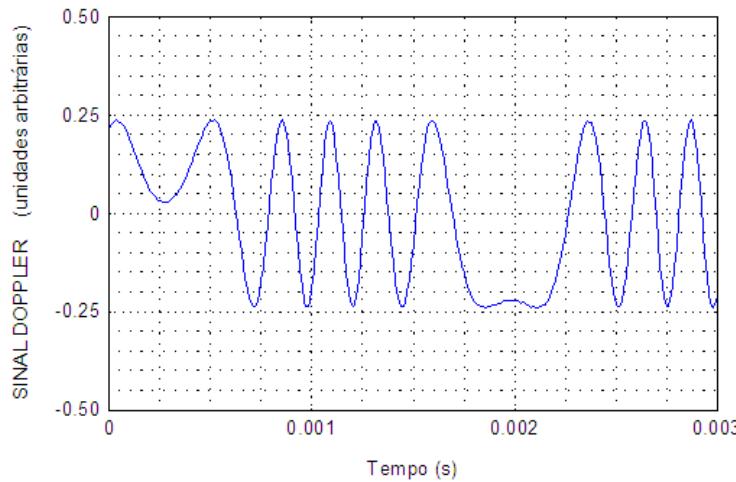


Figura 4.25: Sinal Doppler

4.6 Problemas

4.6.1 Fendas de Young

Seja um experimento de Fendas de Young onde a distância entre as fendas (supostas infinitamente estreitas) é de 1mm. Ilumino as fendas com uma luz de 590nm, cujo grau de coerência complexo é da forma:

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \Lambda\left(\frac{\tau c}{100\mu m}\right)$$

onde ω corresponde à luz de 590nm e c é a velocidade da luz no vácuo. Observando as franjas de interferência que se formam numa tela a 1 metro de distância, calcule:

1. O período da franjas.
Resposta: 0.59 mm
2. A visibilidade das franjas na região central (ordem de interferência próximo de zero).
Resposta: 1
3. A visibilidade das franjas a 5 cm da franja central.
Resposta: 0.5
4. Quantas franjas vou poder observar ao todo, na tela?
Resposta: 339

4.6.2 Velocimetria Doppler

Num interferômetro de Michelson, um dos espelhos está fixo e o outro se move com uma velocidade constante de 10mm/s. Se uso uma luz de $\lambda=670\text{nm}$ e observo o sinal de interferência na saída com um fotodetector:

1. Qual será a frequência do sinal elétrico do fotodetector
2. Se a largura espectral desse laser é de $\Delta\lambda \approx 0.01\text{nm}$, quantas franjas de interferência podem passar como máximo por esse fotodetector?

4.6.3 Medida de vibrações por efeito Doppler

A figura 4.25 mostra o sinal Doppler num experimento de medida de vibrações mecânicas por efeito Doppler com laser de $\lambda=633\text{ nm}$ visto na tela do osciloscópio. Calcule:

1. A velocidade máxima do alvo
RESP.: $v_M = 1.41\text{mm}$
2. A freqüência de oscilação do alvo
RESP.: 290 Hz
3. A amplitude de oscilação
RESP.: $0.774\mu\text{m}$

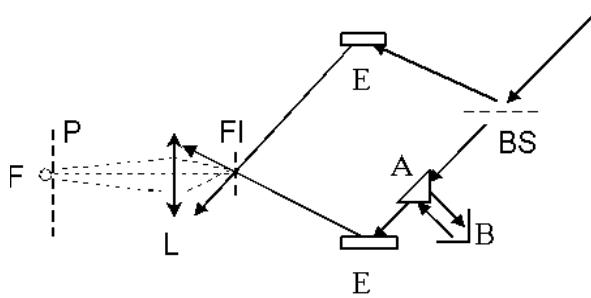


Figura 4.26: Esquema de um experimento de interferência

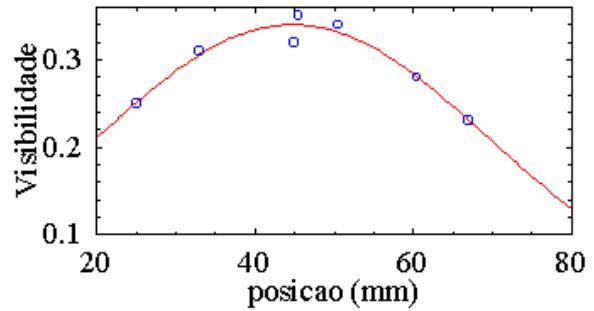


Figura 4.27: Visibilidade das franjas de interferência no experimento da Fig.6.3 em função da posição do prisma retrorefletor **B** (do trabalho de tese de Mestrado de Ivan de Oliveira).

4.6.4 Interferência, coerência e visibilidade

Na Fig.4.26 se mostra um experimento onde um feixe laser ($\lambda = 514.5\text{nm}$) é dividido (com o “beamsplitter” BS) em dois, os quais (por meio dos espelhos E) interferem entre si formando um ângulo de 30° . Na região do espaço onde os feixes se superpõem, se formam franjas de interferência (plano FI). Um sistema de dois prismas (A e B) é utilizado para variar o comprimento (caminho óptico) de um dos feixes que interferem. Como o período espacial desse padrão de franjas é muito pequeno para ser observado ou ainda medido, usa-se uma lente para projetar esse padrão ampliado, sobre um foto-detectador (F no plano P), o qual é usado para medir a visibilidade das franjas em função da posição do prisma **B**. O resultado aparece na Fig.4.27, onde os círculos indicam os dados experimentais, e a curva contínua utilizada para o ajuste desses dados é:

$$y = a e^{-(x - d)^2/b^2}$$

sendo que os valores $a = 0.34$, $b = 35.8\text{mm}$ e $d = 44.7\text{mm}$ resultam desse ajuste. Note que uma variação de uma unidade na posição de B, significa o dobro em termos de variação de caminho óptico por conta do percurso de ida e volta da luz nesse dispositivo.

1. Calcule a diferença de caminho óptico correspondente a um período espacial das franjas de luz no plano (FI) de interferência.

Resposta: 514.5 nm

2. A partir da fórmula acima, que descreve a visibilidade das franjas, formule uma expressão para $|\gamma(\tau)|$.

Resposta: $|\gamma(\tau)| = e^{-\tau^2/T_o^2} \quad T_o = 2b/c \approx 239\text{ps}$.

3. Note que a visibilidade no máximo é bastante menor que 1. Quais podem ser as causas?

4. Qual é a posição do prisma **B** onde os dois braços do interferômetro são iguais?

Resposta: $x = 44.7 \text{ mm}$

5. Qual é o comprimento de coerência dessa luz?

Resposta: $l_c = 2b\sqrt{\pi} \approx 127\text{mm}$, utilizando o critério indicado na sec.B.3 e lembrando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

6. Quantas franjas de interferência vou poder detectar movendo o prisma **B** de ambos lados do máximo, até o ponto onde a visibilidade cai para a metade do seu valor no máximo?

Resposta: 232047.

4.6.5 Comprimento de Coerência

O fabricante de um laser de emissão contínua, de Nd-YAG, com dobrador de freqüência ($\lambda = 532\text{nm}$) e 500mW de potência, alega que o comprimento de coerência é maior que 150m. Nesse caso, qual deve ser sua “pureza” espectral?

Resposta:

$$\Delta\lambda \approx 1.9 \times 10^{-6}\text{nm}$$

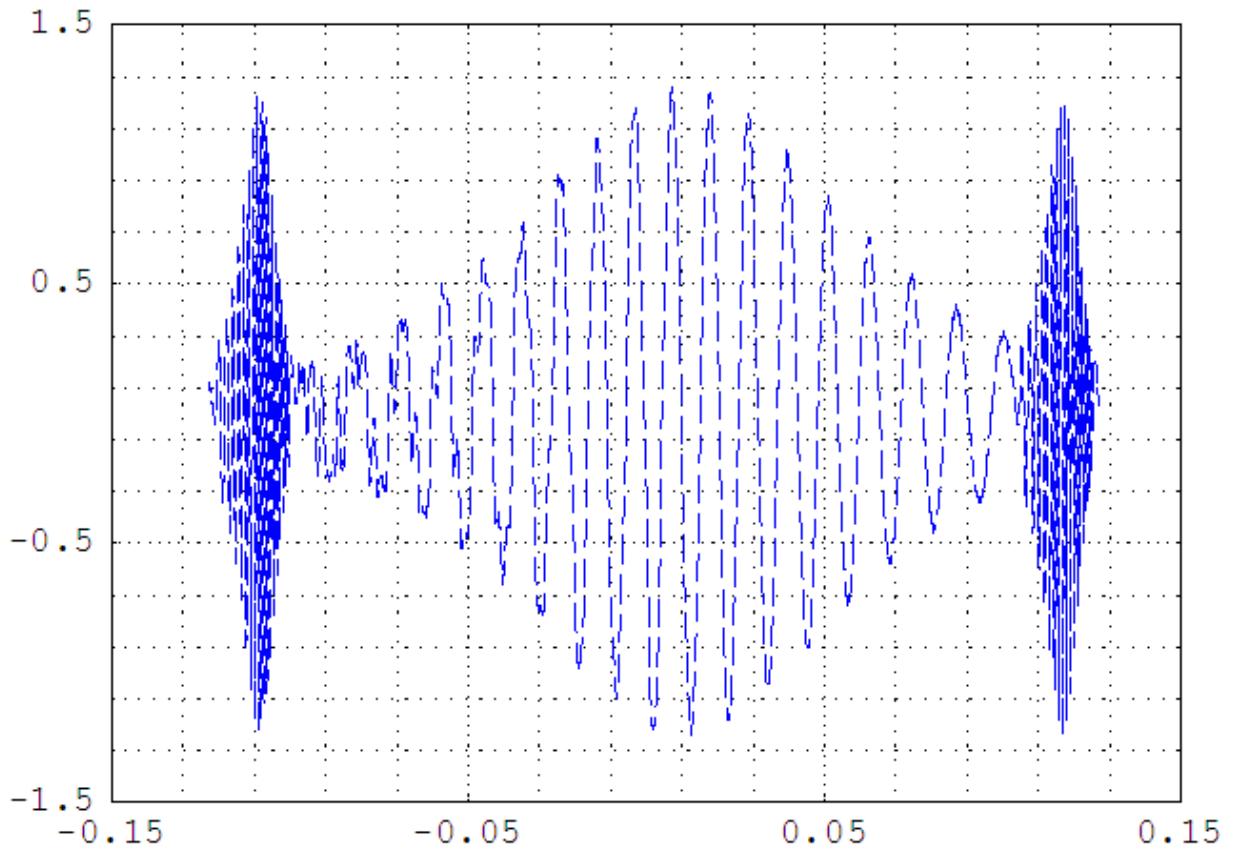


Figura 4.28: Franjas de interferência observadas com um LED de $\lambda = 520\text{nm}$ num interferômetro de Michelson ao mover um dos seus espelhos com um cristal piezoelectrónico acionado com uma tensão na forma de uma rampa.

4.6.6 Espectro de Potência

Prove que, em se tratando de uma função real, o seu espectro de potência deve ser simétrico, isto é: $S(\nu) = S(-\nu)$. Para isso leve em conta que:

1. $S(\nu)$ é a TF de $\Gamma(\tau)$
2. considere o resultado em 4.6.11

4.6.7 Luz branca no Interferómetro de Michelson

Num interferômetro de Michelson com luz “branca” observo uma franja de interferência central e 5 franjas de cada lado, ao deslocar um dos espelhos e utilizar um fotodetector para detectar essas franjas. Sabendo que o pico de sensibilidade desse detector ocorre para $\lambda=800\text{nm}$, calcule:

1. O comprimento de coerência da luz “branca” filtrada pelo fotodetector (**R:** 8800nm)
2. O comprimento de coerência dessa luz se ela fosse effetivamente branca e não apenas “branca”. (**R:** 0)
3. A largura de banda efetiva (em nanometros, por ex.) do fotodetector para a medida da luz. (**R:** 146nm ou 734nm–880nm)

4.6.8 Interferograma de um LED

A Fig.4.28 mostra o interferograma de um LED (em unidades arbitrárias) obtido no interferômetro de Michelson. Com as informações dessa figura, faça um gráfico da visibilidade e, supondo que seja uma distribuição gaussiana, estime a largura do espectro da luz desse LED.

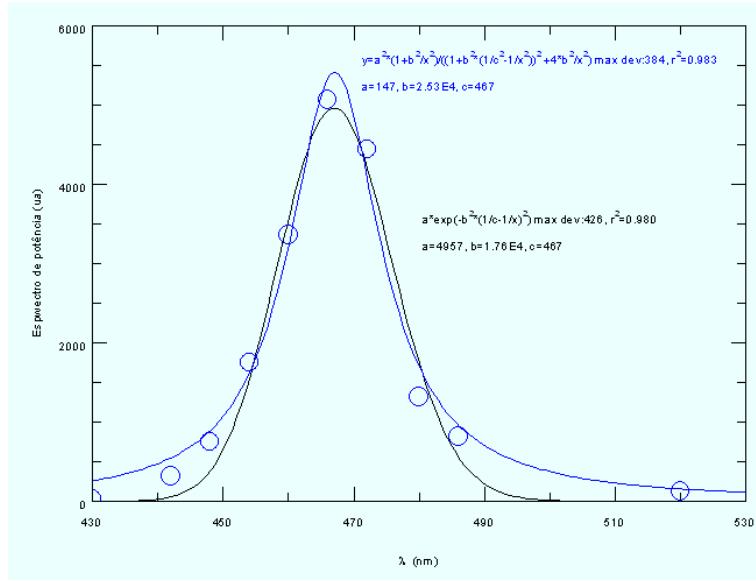


Figura 4.29: Espectro de um diodo e seu ajuste por uma gaussiana (curva preta) e pela Eq.(4.46) (curva azul), com os parâmetros correspondentes indicados na figura

4.6.9 Espectro de um LED

A Fig.4.29 mostra o espectro de um diodo violeta, que foi ajustado com uma gaussiana

$$y = a e^{-b^2(1/c - 1/x)^2} \quad (4.106)$$

resultando os valores $a = 4957$, $b = 1.76 \times 10^4 \text{ nm}$ e $c = 467 \text{ nm}^{-1}$. Também foi ajustada com uma curva como na Eq.(4.46) resultando $\sqrt{N|A|/|a|} = 147$, $c/|a| = 2.53 \times 10^4 \text{ nm}$ and $\lambda_0 = 467 \text{ nm}$. Fica obvio que esta última ajusta muito melhor. Com esses dados, encontre alguns parâmetros de interesse para essa luz.

4.6.10 Dubleto do sódio

Na luz emitida pela lâmpada de sódio existem duas linhas muito próximas ($\lambda_1=588.995 \text{ nm}$ e $\lambda_2=589.592 \text{ nm}$) e de intensidades similares [8].

- Descreva formalmente o espectro de potência dessa luz, supostamente formada apenas por esse dubleto, e supondo ainda que cada linha é infinitamente estreita.

Resposta:

$$S(\nu) = I [\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu - \nu_2)] \quad \nu_1 = c/\lambda_1 \quad \nu_2 = c/\lambda_2$$

- Calcule a parte real da função de auto-correlação.

Resposta:

$$\Gamma(\tau) = 2I \cos(2\pi\tau \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}) \cos(2\pi\tau \frac{\nu_1 - \nu_2}{2})$$

- Calcule o comprimento de coerência dessa luz.

Resposta: infinito.

- Supondo que uso essa luz num experimento de Michelson, calcule a expressão da intensidade na saída, com especial atenção ao termo de interferência.

Resposta:

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\Re\{\Gamma(\tau)\}$$

- O experimento de Michelson serviria para medir a separação das linhas do dubleto? Explique como faria.
- Na realidade ambas linhas não são infinitamente estreitas [8, 9] mas têm uma largura de aproximadamente 0.006nm: qual será o efeito dessa largura nas respostas para os 3 primeiros itens acima?

Resposta:

(a)

$$S(\nu) = \frac{I}{a_o} [\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu - \nu_2)] * e^{-\nu^2 \pi / a_o^2} \quad a_o = c\Delta\lambda/\lambda^2 \approx 5.17 \times 10^6 \text{ Hz}$$

(b)

$$\Gamma(\tau) = 2I \cos(2\pi\tau(\nu_1 + \nu_2)/2) \cos(2\pi\tau(\nu_1 - \nu_2)/2) e^{-\pi a_o^2 \tau^2}$$

(c) $c/a_o \approx 58\text{mm}$

4.6.11 Função de auto-correlação

Prove que

1. a função de auto-correlação $\Gamma(\tau)$ satisfaz em geral a seguinte propriedade:

$$\Gamma^*(-\tau) = \Gamma(\tau)$$

DICA: utilize apenas a definição de $\Gamma(\tau)$

2. para o caso de uma função $f(t)$ real, sua auto-correlação é simétrica, isto é $\Gamma(\tau) = \Gamma(-\tau)$

4.6.12 Espectro contínuo

Suponha uma luz que tenha um espectro contínuo e constante (entre $\lambda_1=500.0$ e $\lambda_2=600.0$ nm).

1. Represente matematicamente o seu espectro de potência.

Resposta:

$$S(\nu) = \frac{1}{a} \text{rect}((\nu - \nu_o)/a) \quad \nu_o = \frac{c(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1\lambda_2} \quad a = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2}$$

Veja a definição de “rect” em B.19.

2. Calcule a função de auto-correlação.

Resposta:

$$\Gamma(\tau) = \text{sinc}(a\tau) e^{i2\pi\nu_o\tau}$$

Veja definição da função “sinc” em B.19.

3. Calcule a visibilidade das franjas de interferência, quando observadas num interferômetro de Michelson, por exemplo.

Resposta:

$$\mathcal{V} = |\Gamma(\tau)/\Gamma(0)| = |\text{sinc}(a\tau)|$$

4. Calcule o comprimento de coerência dessa luz.

Resposta: $c/a \approx 3025$ nm

4.6.13 Espectro de pulsos amortecidos.

Seja uma sucessão de pulsos reais cujo sinal analítico tem a forma:

$$f(t) = A e^{-at - i\omega_o t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad a > 0 \quad (4.107)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad (4.108)$$

sendo $a^2 \ll \omega_o^2$. Considerando que \bar{N} é a taxa de emissão desses pulsos, calcule

1. o espectro de potência

Resposta:

$$S(\nu) = \frac{1}{4} \frac{\bar{N} |A|^2}{a^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_o)^2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{N} |A|^2}{a^2 + 4\pi^2(\nu + \nu_o)^2}$$

2. a potência dessa radiação

Resposta:

$$\frac{\bar{N} |A|^2}{4a}$$

3. a energia da cada pulso

Resposta:

$$\frac{|A|^2}{4a}$$

4. a função de auto-correlação

Resposta:

$$\Gamma(\tau) = \frac{\bar{N} |A|^2}{4a} e^{-|a\tau|} \cos(\omega_o \tau)$$

5. o termo de interferência tal como seria observado num interferômetro de Michelson, por exemplo, ao ser iluminado com essa luz.

Resposta:

$$2\Re\{\Gamma(\tau)\} = \frac{\bar{N} |A|^2}{2a} e^{-|a\tau|} \cos(\omega_o \tau)$$

4.6.14 Pulsos gaussianos

Seja uma onda luminosa quase-monocromática de freqüência angular ω_o , formada por pulsos gaussianos da forma:

$$f(t) = e^{-t^2/T_o^2} e^{i\omega_o t}$$

1. Calcule o espectro de potência dessa luz.

Resposta:

$$S(\nu) \propto \pi T_o^2 e^{-T_o^2 \frac{(\omega - \omega_o)^2}{2}}$$

2. Calcule a função de auto-correlação.

Resposta:

$$\Gamma(\tau) \propto T_o \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{2T_o^2}} e^{i\omega_o \tau}$$

3. Escreva a expressão matemática do termo de interferência da luz observada num interferômetro de Michelson ao ser iluminado com essa luz.

Resposta:

$$T_o \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\tau^2}{2T_o^2}} \cos(\omega_o \tau)$$

DICA:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

4.6.15 Filme fino e espectro de potência

Para que num experimento de espectroscopia por transmissão, possa ficar em evidência o padrão de interferência produzido pelo filme fino, é necessário que a luz produzida pelo monocromador do aparelho seja suficientemente “monocromática”, isto é, que tenha uma largura spectral suficientemente estreita. Isto se consegue, dentro de certos limites, diminuindo a largura da fenda no monocromador (ao custo de reduzir a intensidade da luz disponível e, consequentemente, aumentando o “ruído” na medida). Para o caso exemplificado na Fig.4.23, qual deve ser a largura espectral da luz de maneira que apareça o padrão de interferência do filme fino mas não o da lâmina de vidro?

Resposta:

$$1\text{nm} << \Delta\lambda << 250\text{nm}$$

4.6.16 Filme fino

Um filme fino (índice de refração de aproximadamente 1.5) depositado sobre uma lâmina transparente de vidro de ≈ 1 cm de espessura, é colocado num espectrofotômetro sob incidência normal, para medir o espectro de transmissão. O espectro resultante apresenta a modulação típica característica de interferência múltipla. Dentre o conjunto de máximos e mínimos de interferência que aparecem, observamos dois máximos sucesivos em $\lambda=520\text{nm}$ e em $\lambda= 530\text{nm}$. Com esses dados,

1. calcule a espessura geométrica do filme fino.
2. dê uma razão possível para explicar o fato que a lâmina de vidro não tem, aparentemente, nenhuma participação no padrão de franjas observado.

4.6.17 Lâmina de faces paralelas

Seja o caso de interferência numa lâmina transparente de faces paralelas representado na Fig.4.4.

- Mostre que para incidência quase normal, se verifica a Eq.4.3 reproduzida embaixo

$$D = \frac{\lambda n}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}$$

onde D é a espessura da lâmina, n é o índice de refração do vidro e λ é o comprimento de onda da luz (suposta coerente). Os ângulos α_1 e α_2 são os ângulo de incidência do feixe onde podem-se ver dois mínimos de interferência consecutivos.

OBS: $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ para $\theta \ll 1$

- Num experimento realizado em aula, foram obtidos os seguintes dados:

- a lâmina utilizada foi um porta objeto de microscópio com espessura aproximada de 1mm,
- iluminação com um laser de He-Ne de $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$,
- posição angular da lâmina para incidencia normal ($\alpha = 0$): $3^\circ 41' \pm 1'$,
- posição angular da lâmina para uma franja escura: $2^\circ 58'$,
- posição angular da lâmina para a franja escura seguinte: $1^\circ 48'$,
- índice de refração estimado para o vidro: 1.50 ± 0.005 .

Com os dados acima calcule a espessura da lâmina e estime a precisão dessa espessura.

Resposta: $D = 1.025 \text{ mm}$ e $\Delta D/D \approx 3\%$ devido basicamente aos erros de medida dos ângulos.

Capítulo 5

Difração e Óptica de Fourier

Estudaremos a difração da luz utilizando as ferramentas proporcionadas pelo formalismo da Transformação de Fourier, que simplifica consideravelmente a resolução dos problemas. Este formalismo introduz em câmbio algumas aproximações cuja validade deve ser discutida em cada caso. Primeiramente vamos analisar o formalismo clássico para o cálculo da difração, baseado na superposição de ondas, como é apresentado no textos usuais de Óptica [8], para depois estudar uma formulação mais rigorosa que leva à abordagem da Óptica de Fourier. A teoria escalar da difração será desenvolvida detalhadamente à partir do teorema de Green até a formulação mais completa, de Rayleigh-Sommerfeld.

A parte final deste capítulo trata da transformação de Fourier pelas lentes e do processamento de imagens, sempre nos limites da Teoria Escalar e do ponto de vista da Óptica de Fourier.

O primeiro registro do fenômeno da difração apareceu num trabalho de Leonardo da Vinci (1452-1519), mas a descrição rigorosa só apareceu num livro (1665) de Grimaldi. Na época dominava amplamente a teoria copuscular que não podia explicar a difração. O primeiro a propor uma teoria ondulatoria foi Huygens, em 1678, que aparentemente desconhecia o trabalho de Grimaldi. Em 1818 Fresnel publicou um trabalho mostrando que a difração poderia ser explicada com a construção de Huygens para a propagação da luz, junto com o princípio de interferência das ondas. Em 1882 Kirchhoff colocou o assunto sobre bases matemáticas mais sólidas e desde então o assunto foi evoluindo permanentemente.

5.1 Formalismo clássico

Nesta primeira parte resolveremos problemas clássicos de difração utilizando, sem maiores preocupações formais, o princípio de superposição de ondas formulado por Huygens.

5.1.1 Princípio de Huygens-Fresnel

Huygen formulou uma teoria para a propagação da luz sob a perspectiva ondulatória. A formulação, chamada de Huygens-Fresnel está esquematicamente ilustrada na Fig.5.1. Maiores detalhes podem ser encontrados, por ex. na ref.[6]. O ponto fundamental é que a propagação da luz é vista como uma sucessão de ondas esféricas secundárias sendo geradas em cada ponto da frente de onda primária, e isso pode ser aplicado ao estudo da difração.

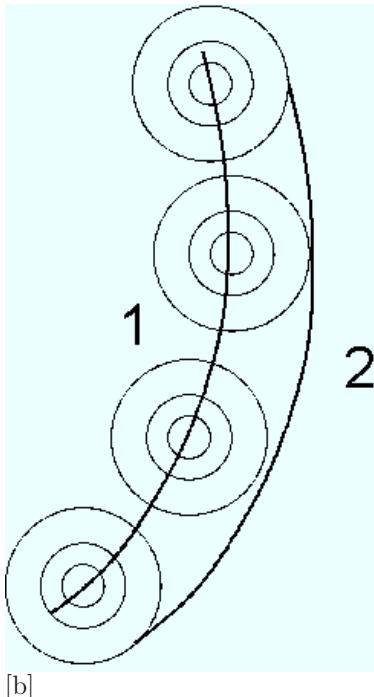
5.1.2 Difração por uma fenda

Antes de nos aprofundar num formalismo matemático mais complexo vamos estudar a difração com a abordagem ondulatória mais simples. Vamos supor uma onda luminosa plana de amplitude E_0 incidindo perpendicularmente no plano da fenda como ilustrado na Fig.5.2. Queremos calcular a amplitude da onda que chega ao ponto \mathbf{P} no anteparo, vindas da fenda e isso representa a difração da luz pela fenda, vista no ponto \mathbf{P} no anteparo. Para isso vamos decompor a fenda em pequenos segmentos de comprimento a (o comprimento da fenda) e de largura dx , suficientemente pequena para poder supor que a amplitude é uniforme em cada segmento. Calculamos a contribuição de cada um desses elementos da fenda, sobre o ponto \mathbf{P} , e somamos todos. Calculemos primeiro a amplitude dE_x que chega ao ponto \mathbf{P} no anteparo, vinda do segmento na posição x medida a partir do centro da fenda:

$$dE_x = \frac{E_0 a dx}{ab r} \sin(kr - \omega t + k\Delta) \quad (5.1)$$

$$\text{onde } \Delta \equiv x \sin \theta \text{ e } k \equiv 2\pi/\lambda \quad (5.2)$$

$$\text{para } r \gg b \quad (5.3)$$



[b]

Figura 5.1: Teoria de huygens para a propagação da luz

onde Δ é a diferença de caminho em relação ao centro da fenda. A expressão simétrica à mesma distância x mas para acima é

$$dE_{x-} = \frac{E_0 dx}{b r} \sin(kr - \omega t - k\Delta) \quad (5.4)$$

e a soma dos dois fica

$$dE = dE_x + dE_{x-} = \frac{E_0 dx}{b r} 2 \sin(kr - \omega t) \cos(k\Delta) \quad (5.5)$$

$$\text{porque } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (5.6)$$

Para calcular a contribuição da fenda toda, sobre o ponto \mathbf{P} , integramos de 0 até $b/2$ assim

$$E = \int_{x=0}^{x=b/2} dE = \frac{2E_0}{b r} \sin(kr - \omega t) \int_0^{b/2} \cos(kx \sin \theta) dx \quad (5.7)$$

$$= \frac{2E_0}{b r} \sin(kr - \omega) \left[\frac{\sin(kx \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_0^{b/2} = \frac{2E_0}{b r} \sin(kr - \omega) \frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k \sin \theta} \quad (5.8)$$

$$E = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega) \frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \quad (5.9)$$

Para calcularmos a intensidade correspondente a essa amplitude, devemos calcular a média temporal do módulo quadrado dessa amplitude assim

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle = \left(\frac{E_0}{r} \right)^2 \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 \langle \sin^2(kr - \omega t) \rangle \quad (5.10)$$

sabendo que $\langle \sin^2(kr - \omega t) \rangle = 1/2$ concluimos que

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 \quad I(0) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r^2} \quad (5.11)$$

Podemos escrever o resultado acima de forma simplificada chamando $\Phi \equiv kb \sin \theta$, que representa a diferença de fase dos dois raios saindo dos extremos da fenda, e substituindo na fórmula acima

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \Phi/2}{\Phi/2} \right)^2 \quad (5.12)$$

Segundo Huygens, cada ponto de uma frente de onda pode ser considerado, por sua vez, como um centro gerador de uma onda esférica (secundária) centrada nele. A frente de onda principal num tempo posterior está determinada pela envolvente, num dado instante, da todas essas ondas secundárias. As amplitudes e fases dessas ondas secundárias teriam que ter determinadas propriedades matemáticas para descrever corretamente o fenômeno e fazer com que, por exemplo, a onda se propague para frente e não para trás.

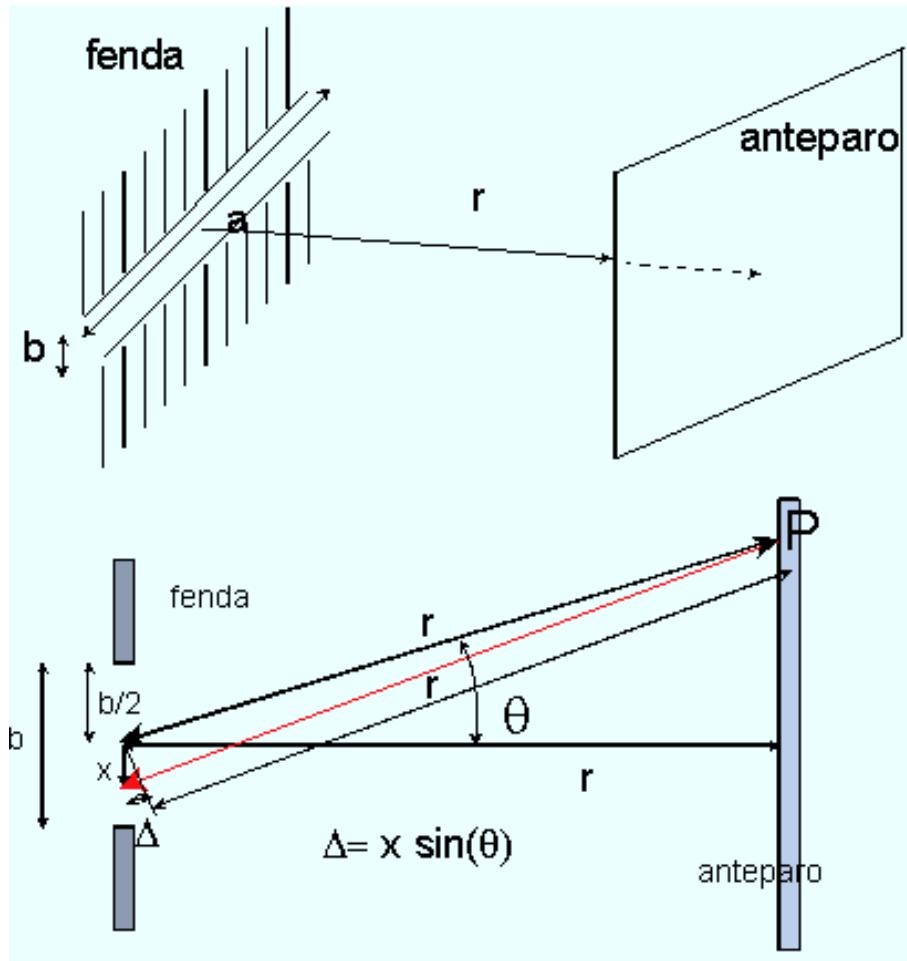


Figura 5.2: Difração por uma fenda de largura b e comprimento infinito, observado num anteparo a uma distância muito grande.

$$\text{lembrando que } \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\sin \Phi/2}{\Phi/2} = 1 \quad (5.13)$$

5.1.3 Fenda dupla

Para o caso das duas fendas ilustradas na Fig.5.3 o procedimento é similar excepto que x é medida apartir do centro de simetria das duas fendas e a integração deve estar de acordo com este novo esquema. Partindo da Eq.(5.7)

$$E = \frac{2E_0}{b r} \sin(kr - \omega t) \int_{x=L/2-b/2}^{x=L/2+b/2} \cos(kx \sin \theta) dx \quad (5.14)$$

$$= \frac{2E_0}{b r} \sin(kr - \omega t) \left[\frac{\sin(kx \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_{L/2-b/2}^{L/2+b/2} \quad (5.15)$$

$$= \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t) \frac{\sin(k(L/2 + b/2) \sin \theta) - \sin(k(L/2 - b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \quad (5.16)$$

$$E = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t) 2 \cos(k(L/2) \sin \theta) \frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \quad (5.17)$$

Com o mesmo raciocínio desenvolvido para a fenda única, calculamos agora a intensidade total como

$$I(\theta) = 4I(0) \cos^2(k(L/2) \sin \theta) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 \quad (5.18)$$

sabendo que $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ que substituimos acima, resulta

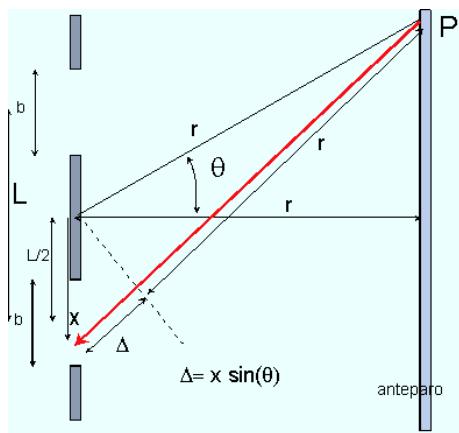


Figura 5.3: Difração por duas fendas de largura b e comprimento infinito, separadas de uma distância L e observada num anteparo a uma distância muito grande.

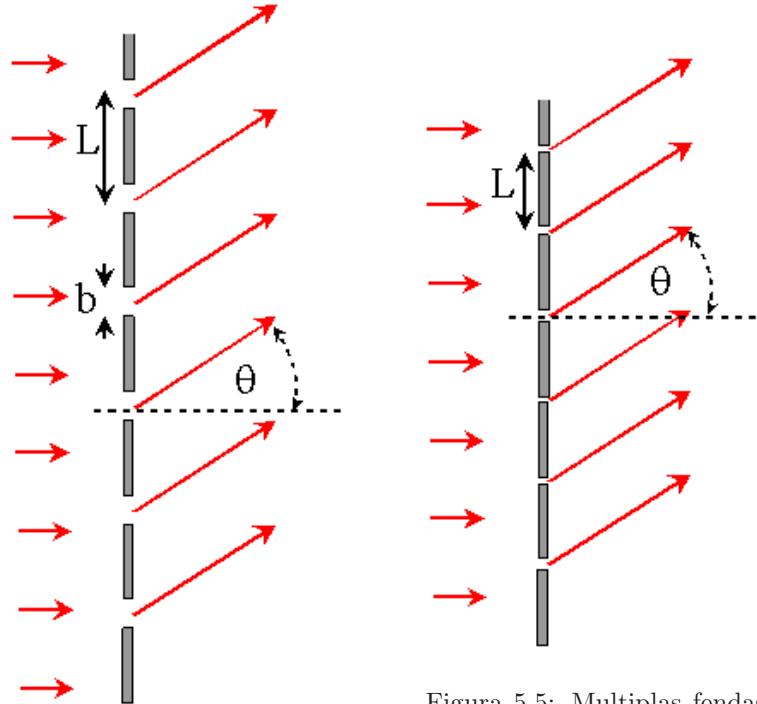


Figura 5.5: Multiplas fendas de largura infinitamente fina: Pente de Dirac

Figura 5.4: Multiplas fendas com largura finita: rede de difração

$$I(\theta) = 2I(0) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 [1 + \cos(kL \sin \theta)] \quad (5.19)$$

$$I(\theta) = 2I(0) \left(\frac{\sin \Phi/2}{\Phi/2} \right)^2 [1 + \cos(kL \sin \theta)] \quad \text{onde } \Phi \equiv kb \sin \theta \quad (5.20)$$

Note que o termo entre parenteses retos representa a difração por duas fendas infinitamente finas (Experimento das Fendas de Young) separadas de uma distância L enquanto que o primeiro termo representa a difração por uma fenda larga (largura b). Assim o resultado pode ser interpretado como sendo a difração de duas fendas finas, modulada pela difração da largura real de cada uma delas.

5.1.3.1 Fenda dupla: outra forma

Podemos calcular a difração de uma fenda dupla escrevendo a amplitude complexa a difratada no plano de observação de uma das fendas e adicionando a outra, com uma defasagem δ devido ao seu deslocamento longitudinal L no plano difratante assim:

$$A = a + a e^{i\delta} \quad \delta \equiv kL \sin \theta \quad (5.21)$$

e calculando a intensidade na forma usual

$$|A|^2 = A \cdot A^* \quad (5.22)$$

$$= |a|^2 (1 + e^{i\delta})(1 + e^{-i\delta}) \quad (5.23)$$

$$= 2|a|^2 (1 + \cos \delta) \quad (5.24)$$

Substituindo a pela sua expressão em Eq.(5.11)

$$|a|^2 = I(0) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2$$

resulta:

$$I = 2I(0) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 (1 + \cos kL \sin \theta) \quad (5.25)$$

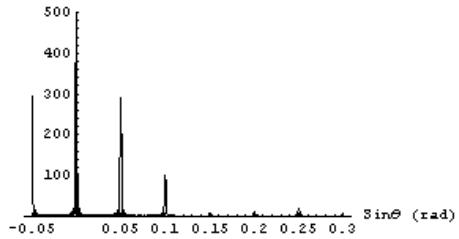


Figura 5.6: Espectro de difração de uma conjunto de 20 fendas retangulares de largura $3\mu\text{m}$ com espaçamento de $10\mu\text{m}$ entre elas.

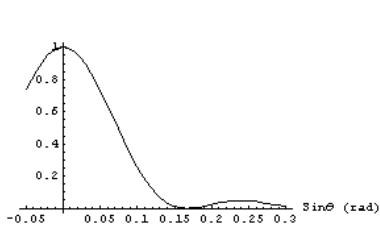


Figura 5.7: Envelope de modulação das ordens de difração referente a rede representada na Fig.5.6

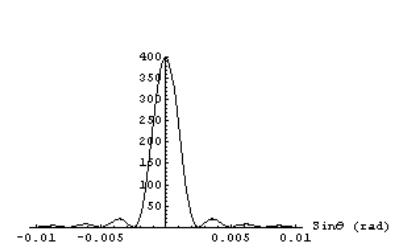


Figura 5.8: Largura das ordens de difração da rede da Fig.5.6

5.1.4 Multiplas fendas: Rede de difração

Seja o caso de uma sucessão de muitas fendas de largura finita como representado na Fig.5.4, em cujo caso a expressão na Eq.(5.21) pode ser generalizada assim

$$A e^{i\theta} = a(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}) \quad (5.26)$$

$$= a \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \quad \delta \equiv 2\pi L \sin \theta / \lambda = kL \sin \theta \quad k \equiv 2\pi / \lambda \quad (5.27)$$

com a intensidade

$$\begin{aligned} I &\propto |A e^{i\theta}|^2 = A^2 = a^2 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} \\ I &\propto a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} \end{aligned}$$

e sabendo que

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\alpha/2)$$

a expressão acima fica assim:

$$I \propto a^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{\sin^2(Nk(L/2) \sin \theta)}{\sin^2(k(L/2) \sin \theta)}$$

Substituindo o valor de α para uma unica fenda:

$$I \propto I(0) \left(\frac{\sin(k(b/2) \sin \theta)}{k(b/2) \sin \theta} \right)^2 \frac{\sin^2(Nk(L/2) \sin \theta)}{\sin^2(k(L/2) \sin \theta)} \quad (5.28)$$

onde os termos em vermelho e em azul representam respectivamente a contribuição da estrutura de uma fenda e da estrutura periódica.

Vamos analizar mais detidamente o caso da difração de uma rede com $N = 20$, $L = 10\mu\text{m}$, $b = 3\mu\text{m}$ e $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ cujo espectro de difração angular está representado na Fig.5.6. Em função da Eq.(5.28) temos que o espaçamento (angular) entre as ordens pode ser calculado em função do denominador do termo azul (último termo à direita)

$$\Delta(\sin \theta) = \lambda/L = 0.05\mu\text{m} \quad (5.29)$$

como indicado na Fig.5.6. A intensidade de cada ordem (mais intensa no centro para $\theta = 0$) está modulada, por causa da largura finita de cada fenda, e ela pode ser calculada em função do termo vermelho (segundo termo à direita) na Eq.(5.28) que representa um envelope cujo primeiro mínimo (angular) vale

$$\Delta \sin \theta = \lambda/b = 0.167\mu\text{m} \quad (5.30)$$

como representado na Fig.5.7. Cada um dos ordens de difração tem uma largura finita, devido ao tamanho finito da rede ($N=20$ fendas), o que pode ser calculado em função do numerador do termo azul (último termo à direita) na Eq.(5.28)

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{NL} = 0.05\mu\text{m} \quad (5.31)$$

como ilustrado na Fig.5.8.

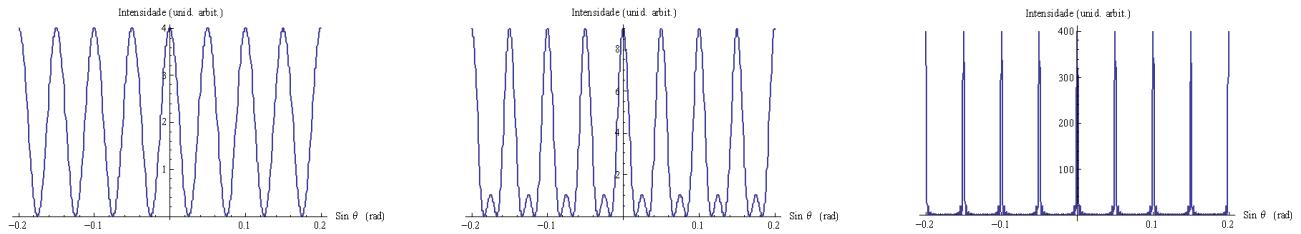
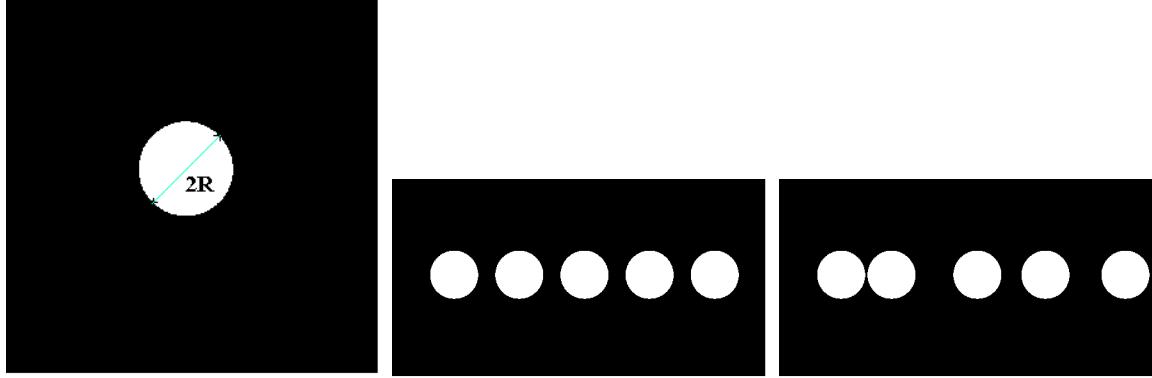


Figura 5.9: Difração de uma rede com período $L = 10\mu\text{m}$, $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ e fendas infinitamente estreitas com $N = 2$ (esquerda), $N = 3$ (centro) e $N = 20$ (direita)



5.1.5 Pente de Dirac

Para o caso em que a largura das fendas seja infinitamente fina, a Eq.(5.28) fica assim

$$I(\sin \theta) = I(0) \frac{\sin^2(Nk(L/2) \sin \theta)}{\sin^2(k(L/2) \sin \theta)} \quad (5.32)$$

A Fig.5.9 mostra como as diferentes ordens de difração vão ficando mais estreitas a medida que o número de fendas aumenta de 2 (estrutura senoidal perfeita, como no caso da interferência nas fendas de Young), aumentando para 3 e finalmente para 20 fendas. A medida que o número de fendas aumenta, a estrutura de difração vai se parecendo cada vez mais com um pente de Dirac (vide secs.A.1 e B.2.6).

$$I(\theta) = I(0) \text{III} \left(\frac{L \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (5.33)$$

$$\text{III} \left(\frac{L \sin \theta}{\lambda} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi N L \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi L \sin \theta}{\lambda}} \quad (5.34)$$

Como nos casos anteriores, a posição e largura (angulares) das ordens de difração resultam ser respectivamente

$$\Delta \sin \theta = \lambda / L \quad (5.35)$$

$$\Delta \sin \theta = \frac{\lambda}{NL} \quad (5.36)$$

mas a intensidade da cada ordem resulta ser

$$I(\theta) = I(0) \lim_{N \rightarrow \infty} N \quad (5.37)$$

e a potência de cada ordem será, na aproximação de uma figura triangular,

$$I(0) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{NL} N = I(0) \lambda / L \quad (5.38)$$

que resulta ser um valor finito.

5.1.6 Orificios circulares

Como é a difração por um orifício circular? E a de um número muito grande de orifícios iguais e regularmente alinhados, com período L ? E a de um número muito grande de orifícios iguais mais aleatoriamente alinhados? Compare com as fórmulas de difração para uma rede:

$$A e^{i\theta} = a(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta})$$

$$I \propto a^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = a^2 \frac{\sin^2(\pi NL \sin \theta / \lambda)}{\sin^2(\pi L \sin \theta / \lambda)}$$

5.2 Teoria escalar

Nesta seção faremos uma abordagem matemática mais geral do problema da difração escalar. Para isso não levaremos em conta a natureza vetorial da luz, para o que teremos que supor que os contornos da abertura de difração não modificam a luz na abertura. Isso pode ser aceito se as dimensões da abertura são grandes comparadas com o comprimento de onda da luz.

Seja a expressão da onda

$$u(x, t) = U(P) \cos(2\pi\nu t + \phi(P)) \quad (5.39)$$

$$= \Re\{\mathcal{U}(P) e^{-i2\pi\nu t}\} \quad \mathcal{U}(P) = U(P) e^{-i\phi(P)} \quad (5.40)$$

que deve verificar a equação da onda pelo que deve ser

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(P, t) = 0 \quad (5.41)$$

Em se tratando de uma onda harmônica, a equação acima simplifica-se assim (vide Eq.(2.59)):

$$(\nabla^2 + k^2) \mathcal{U}(P) = 0 \quad (5.42)$$

5.2.1 Teorema de Green

Começaremos com uma abordagem geral do problema, demonstrando o teorema de Green para a difração, ponto de partida para uma formulação matemática rigorosa. Este teorema basicamente diz que, se conhecemos a amplitude (complexa) da onda e sua derivada, numa superfície fechada, posso calcular o valor dessa onda num ponto qualquer dentro do volume encerrado por essa superfície. Essa formulação é muito geral e pouco útil para o cálculo prático da difração e por isso precisaremos elaborar ela um pouco mais até chegarmos a uma formulação de interesse prático. Esse será o objetivo desta seção.

5.2.1.1 Teorema de Gauss

Começaremos com o Teorema de Gauss que se formula assim

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (5.43)$$

onde a superfície S envolve completamente o volume V como indicado na Fig.5.10. Se definimos

$$\vec{A} = \phi \nabla \psi \quad (5.44)$$

e calculamos a divergência

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \quad (5.45)$$

e integramos no volume

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, dv = \int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \, dv \quad (5.46)$$

Utilizando o Teorema de Gauss, podemos substituir o termo da esquerda na Eq.(5.46) por uma integral de superfície para ficar assim

$$\oint_S \phi \nabla \psi \cdot d\vec{s} = \int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \, dv \quad (5.47)$$

Substituindo ϕ pelo ψ , e viceversa, na Eq. acima e sustraindo uma da outra fica

$$\oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{s} = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dv \quad (5.48)$$

Podemos também escrever

$$\nabla \phi \cdot d\vec{s} = \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (5.49)$$

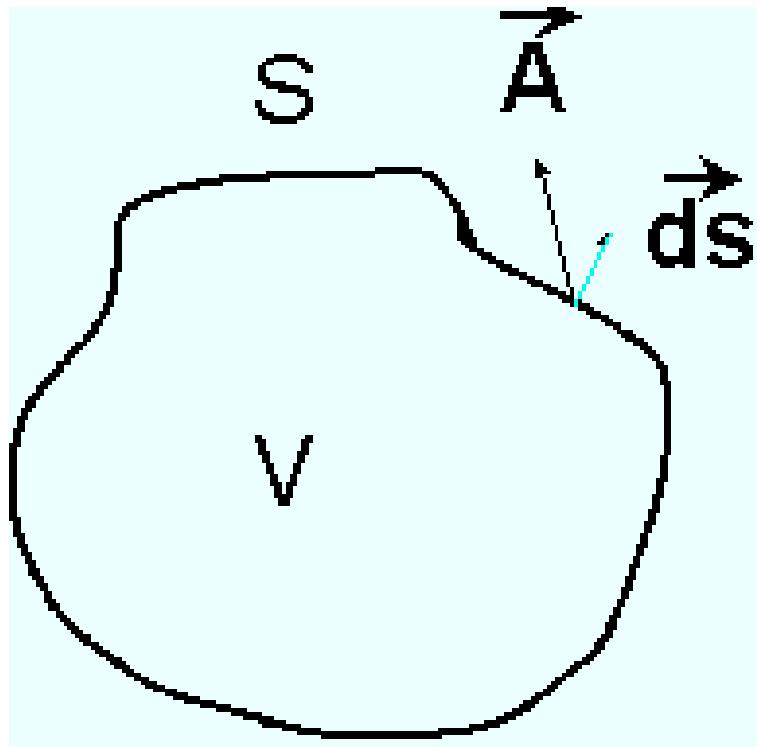


Figura 5.10: Teorema de Gauss

onde n é a normal à superfície (paralela à $d\vec{s}$), dirigida de dentro para fora, e que substituída na Eq.(5.48) resulta

$$\oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv \quad (5.50)$$

É importante lembrar que

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (5.51)$$

representa a derivada ao longo da normal à superfície nesse ponto.

5.2.1.2 Teorema de Green

Sejam duas funções escalares complexas $\mathcal{U}(P)$ e $\mathcal{G}(P)$ que podemos substituir respectivamente no lugar de ϕ e ψ na Eq.(5.50)

$$\oint_S \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds = \int_V (\mathcal{G} \nabla^2 \mathcal{U} - \mathcal{U} \nabla^2 \mathcal{G}) dv \quad (5.52)$$

onde a superfície S encerra o volume V e \vec{n} é o vetor unitário normal à superfície S no ponto em questão, como ilustrado na Fig.5.10.

5.2.2 Formulação de Kirchhof

O problema da difração, na formulação de Kirchhof resume-se assim: Trata-se de calcular o valor da função \mathcal{U} no ponto P_0 em se conhecendo o valor dessa função

$$\mathcal{U}(P_1)$$

e de sua derivada

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}(P)}{\partial n} \right]_{P_1}$$

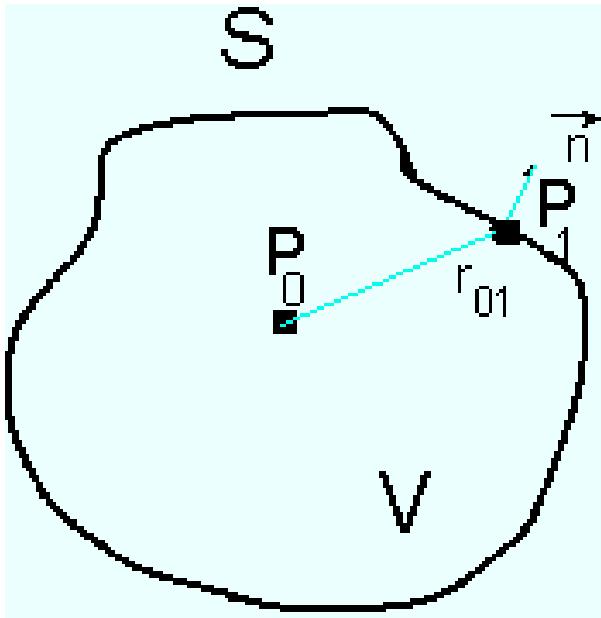


Figura 5.11: Formulação de Kirchhoff

sobre uma superfície que encerra o volume onde se encontra o ponto P_0 em questão como representado na Fig.5.11:
Escolho uma função auxiliar de Green da forma

$$\mathcal{G}(P_1) \equiv \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (5.55)$$

Ambas \mathcal{U} e \mathcal{G} são ondas harmônicas, a primeira por definição, e a segunda pela sua formulação em Eq.(5.55). Então elas devem verificar a equação da onda na formulação de Helmholtz na Eq.(2.59)

$$(\nabla^2 + k^2)\mathcal{U} = 0 \quad (5.56)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\mathcal{G} = 0 \quad (5.57)$$

que substituídas na Eq.5.52 permite escrevê-la assim

$$\oint_S \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds = \int_V (\mathcal{G} k^2 \mathcal{U} - \mathcal{U} k^2 \mathcal{G}) dv = 0$$

ou seja que $\oint_S \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds = 0$ (5.58)

Agora vamos excluir o ponto P_0 do volume V , o que fazemos envolvendo ele numa esfera de raio $\epsilon \ll 1$. O volume em questão está agora limitado pela superfície externa S e a interna (da pequena esfera de raio ϵ) S_ϵ , como indicado na Fig.5.12. A Eq.(5.58) fica agora reformulada assim

$$\oint_{S'=S+S_\epsilon} \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds' = 0 \quad (5.59)$$

Ou seja que

$$-\oint_{S_\epsilon} \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds_\epsilon = \oint_S \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds \quad (5.60)$$

onde a função auxiliar de Green e sua derivada normal valem

$$\mathcal{G}(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} = \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01})(ik - 1/r_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (5.62)$$

$$\text{onde } \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) = -1 \text{ para } P_1 \in S_\epsilon \quad (5.63)$$

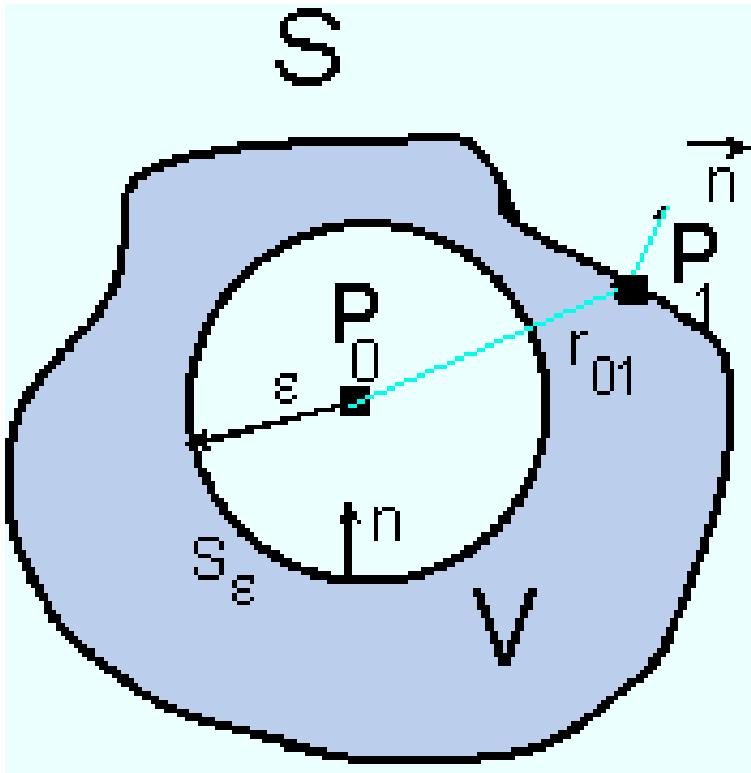


Figura 5.12: Construção de Kirchhof

Substituindo as expressões acima na Eq.(5.60) e considerando o limite da expressão do membro da direita temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left(\frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} (1/\epsilon - ik) \right) = -4\pi \mathcal{U}(P_0) \quad (5.64)$$

$$\text{com } \mathcal{U} \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \text{ continuas em } P_0 \quad (5.65)$$

Substituindo Eq.(5.64) na Eq.(5.60) podemos rescrevê-la assim

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U}(ik - 1/r_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) \right) ds \quad (5.66)$$

5.2.2.1 Formulação de Kirchhof

Vamos agora adaptar a formulação matemática da Eq.(5.66) ao problema específico da difração, representada na Fig.5.13

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1 + S_2} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U}(ik - 1/r_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) \right) ds \quad (5.67)$$

Analisando a integral sobre S_2 onde $r_{01} = R$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_2} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U}(ik - 1/R) \frac{e^{ikR}}{R} \right) ds = \int_{\Omega} \mathcal{G}R \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - ik\mathcal{U} \right) R d\omega = 0 \quad (5.68)$$

$$\text{Se se verifica } \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - ik\mathcal{U} \right) = 0 \quad (5.69)$$

A Eq.(5.69) representa a condição de radiação de Sommerfeld e é fácil verificar que ela vale para uma onda esférica. Mas, como qualquer onda pode ser formada por soma de ondas esféricas, concluímos que a condição na Eq.(5.69) vale para qualquer onda. Levando em conta o resultado da Eq.(5.68) a formulação final para a Eq.(5.67) fica assim

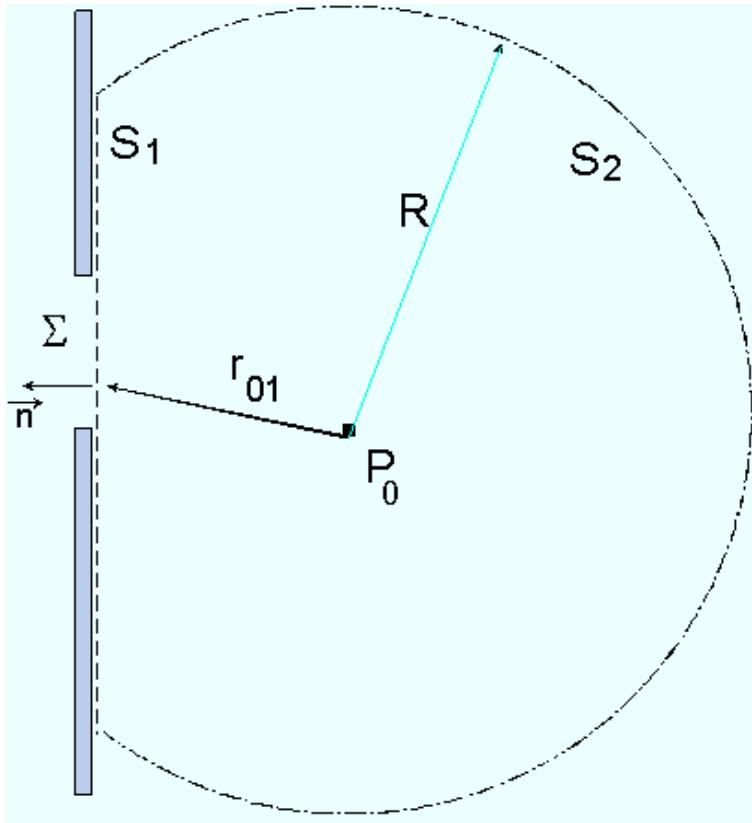


Figura 5.13: Formulação de Kirchhoff

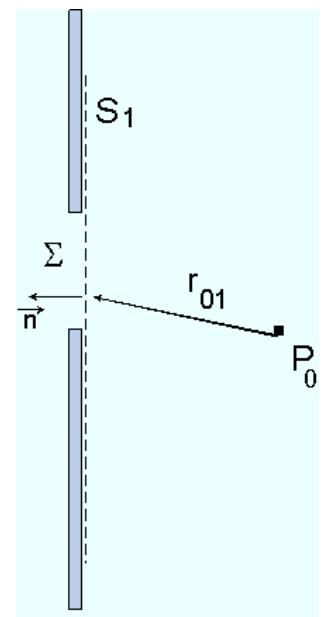


Figura 5.14: Difração de Kirchhoff

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right) ds_1 \quad (5.70)$$

sendo \mathcal{U} e $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n}$ não perturbados em Σ (5.71)

e $\mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0$ para $S_1 \ni \Sigma$ (5.72)

como ilustrado na Fig.5.14

5.2.3 Formulação de Rayleigh-Sommerfeld

Existe um problema formal com a formulação de Kirchhoff: se \mathcal{U} e sua derivada $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n}$ são simultaneamente zero num intervalo qualquer, e elas são ambas contínuas e deriváveis no espaço todo, elas devem continuar nas mesmas condições (ambas nulas) no espaço todo, o que não nos convém. Para resolver este impasse matemático, a formulação de Rayleigh-Sommerfeld utiliza uma outra função auxiliar de Green

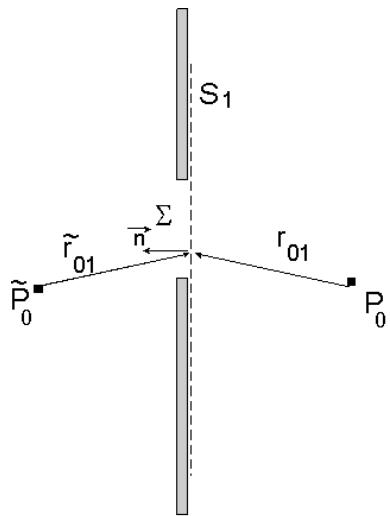
$$\mathcal{G}(P_1) \equiv \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}} \quad r_{01} = \tilde{r}_{01} \quad (5.73)$$

em lugar da Eq.(5.55) e que corresponde ao esquema da Fig.5.15 onde \tilde{P}_0 é a imagem especular de P_0 sobre o plano S_1 . Considerando que agora

$$\mathcal{G}(P_1) = 0 \text{ sobre o plano de difração } S_1$$

e que também resulta que

$$\frac{\partial \mathcal{G}(S_1)}{\partial n} = 2 \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) (\imath k - 1/r_{01}) \frac{e^{\imath kr_{01}}}{r_{01}} \approx 2 \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) (\imath k) \frac{e^{\imath kr_{01}}}{r_{01}}$$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} & \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} && \text{não perturbados em } \Sigma \\
 \mathcal{U} & = 0 \text{ para } S_1 \ni \Sigma \\
 \mathcal{G}(S_1) & = 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{G}(S_1)}{\partial n} & = 2 \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) (ik - 1/r_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}
 \end{aligned}$$

Figura 5.15: Difração de Rayleigh-Sommerfeld

para $k \gg 1/r_{01}$ que substituindo na Eq.5.70 resulta numa expressão simplificada de Rayleigh-Sommerfeld

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} \mathcal{U}(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) \, ds_1 \quad (5.74)$$

onde Σ é a abertura de difração.

5.3 Principio de Babinet: aberturas complementárias

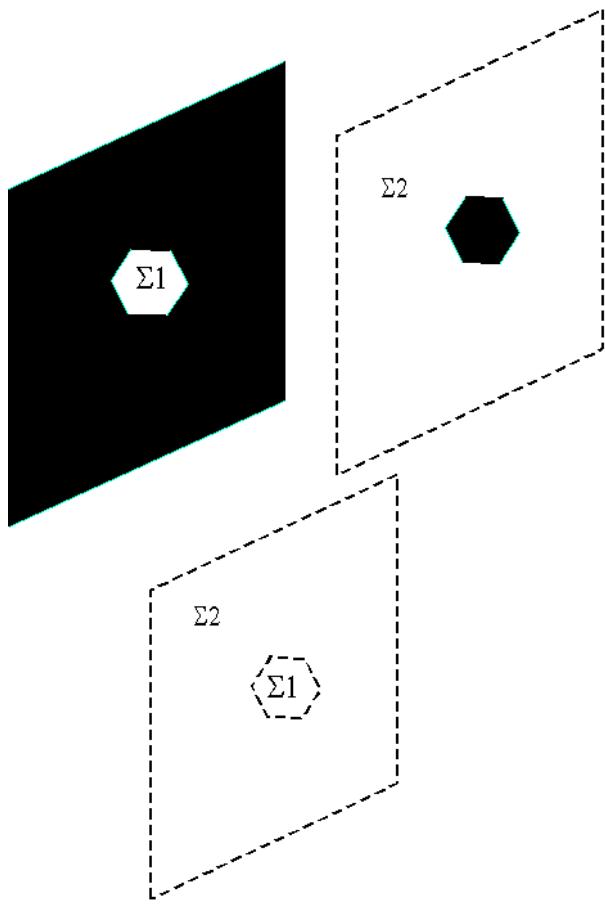


Figura 5.16: Aberturas complementárias

A Fig.5.16 mostra duas aberturas complementárias (parte superior) onde uma delas (à esquerda) é um furo hexagonal num anteparo opaco e a outra (à direita) é, ao contrário, um anteparo opaco hexagonal num fundo transparente. As duas aberturas estão juntas na figura de baixo: um furo hexagonal sobre um fundo transparente. Seja a formulação de Rayleigh-Sommerfeld aplicada para a difração de uma onda plana de amplitude unitária para esta última abertura composta por $\Sigma_1 + \Sigma_2$

$$U(P_o) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) dP_1$$

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Mas a abertura Σ é totalmente transparente e por isso

$$U(P_0)_{\Sigma} = 1 = U(P_0)_{\Sigma_1} + U(P_0)_{\Sigma_2} \quad (5.75)$$

Finalmente podemos provar que as difrações de ambas aberturas complementares são iguais e opostas a menos de uma constante (1)

$$U(P_o)_{\Sigma_1} = 1 - U(P_o)_{\Sigma_2}$$

que no campo do espectro de ondas planas vale $TF\{1\} = \delta(f_x, f_y)$. Então, a difração de ambas aberturas serão iguais e em contra-fase, em todo o espaço exceto para P_0 em $f_x = f_y = 0$.

5.4 Sistemas lineares

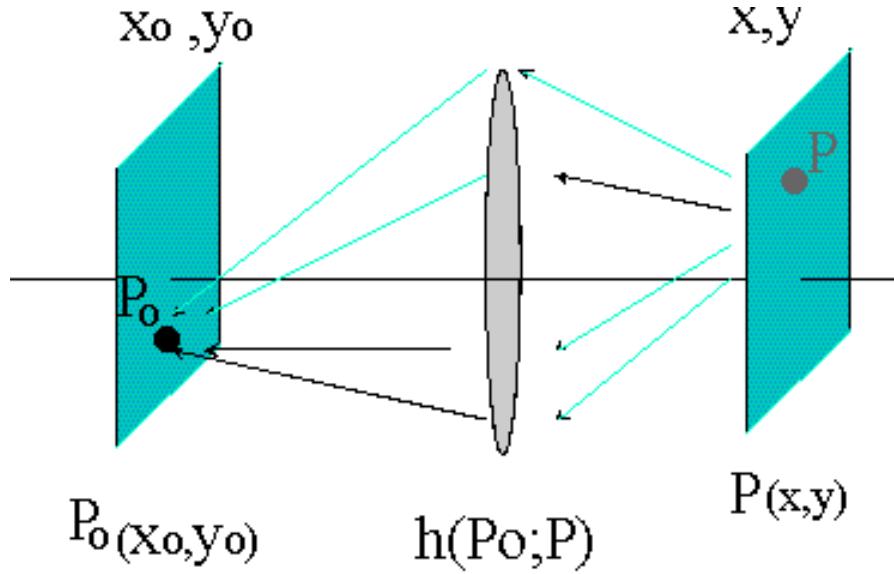


Figura 5.17: Sistema linear representado por uma lente, não necessariamente perfeita, que transforma uma mancha de luz no plano de entrada numa outra no plano de saída.

Assim como uma função transforma um número em outro, um sistema (que chamaremos \mathcal{S}) transforma uma função em outra. No caso, \mathcal{S} transforma $U(x)$ em $U_o(x_o)$, o que pode se escrever simbolicamente assim:

$$U_o(x_o) = \mathcal{S}\{U(x)\} \quad (5.76)$$

Um exemplo de sistema em Óptica, pode ser o caso de uma lente que trasforma uma mancha luminosa no plano “objeto” numa outra mancha luminosa no plano “imagem” como esquematizado na Fig.5.17. O sistema chama-se “linear” se verifica:

$$U_o(x_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)h(x_o; x)dx \quad (5.77)$$

onde $h(x_o; x)$ é a chamada “resposta impulsional”.

5.4.1 Sistema linear invariante

O Sistema Linear

$$U_o(x_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)h(x_o; x)dx \quad (5.78)$$

diz-se ser “invariante” se sua resposta impulsional pode ser escrita assim:

$$h(x_o; x) \Rightarrow h(x_o - x) \quad (5.79)$$

em cujo caso podemos escrever

$$U_o(x_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)h(x_o - x)dx \equiv U(x_o) * h(x_o) \quad (5.80)$$

que representa o chamado “produto de convolução” (não confundir com a “correlação” ou “produto de correlação”, que se refere à processos estocásticos), indicado pelo símbolo “*” entre as funções $U(x_o)$ e $h(x_o)$, e assim definido genericamente no Eq.(5.80). Isso significa que a “resposta impulsional” não depende do ponto em questão mas da diferença. No caso

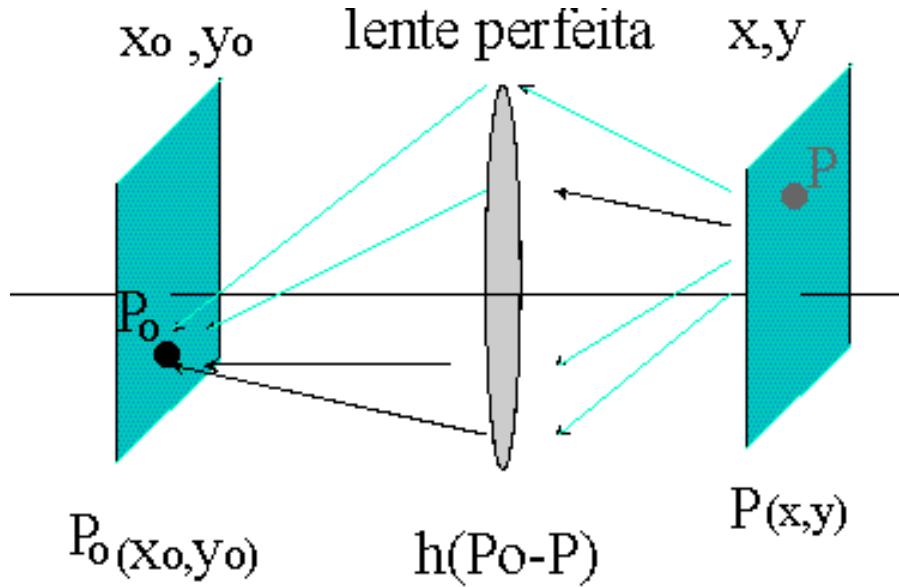


Figura 5.18: Sistema linear invariante] representado por uma lente perfeita

de um sinal temporal, significa que a resposta do sistema será a mesma em qualquer momento (tempo). No caso de um sistema óptico, significa que a “mancha-imagem” será a mesma (terá a mesma forma) para qualquer ponto do plano objeto, o que seria o caso de uma lente perfeita, como o caso ilustrado na Fig.5.18. O produto de convolução na Eq.5.80 pode ser transformado vantajosamente num produto simples no domínio da Transformada de Fourier

$$U_o(x_o) = U(x_o) * h(x_o) \quad (5.81)$$

$$\text{TF}\{U_o\} = \text{TF}\{U\}\text{TF}\{h\} \quad (5.82)$$

$$H(f_x) \equiv \text{TF}\{h(x)\} \quad (5.83)$$

onde \$H(f_x)\$ é chamada de “função de transferência”. A operação no domínio de Fourier facilita muito os cálculos como se mostra no esquema operacional a seguir:

$$\text{dados iniciais: } \quad U(x) \quad H(f_x) \quad (5.84)$$

$$U(x) \Rightarrow \text{TF}\{U\} \quad (5.85)$$

$$\text{TF}\{U\}H(f_x) = \text{TF}\{U_o(x_o)\} \quad (5.86)$$

Solução:

$$\text{TF}^{-1}\{\text{TF}\{U_o(x_o)\}\} = U_o(x_o) \quad (5.87)$$

5.4.2 Espectro angular de ondas planas

Mostraremos que é sempre possível escrever qualquer onda em termos de uma soma infinita de ondas planas. Seja uma onda cuja amplitude complexa no plano \$(x, y, 0)\$ é \$\mathcal{U}(x, y, 0)\$ e cuja transformada de Fourier é

$$A_0(f_x, f_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(x, y, 0) e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy \quad (5.88)$$

Nesse caso a TF inversa é

$$\mathcal{U}(x, y, 0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A_0(f_x, f_y) e^{i2\pi(xf_x + yf_y)} df_x df_y \quad (5.89)$$

Se compararmos a Eq.(5.89) com a expressão de uma onda plana de amplitude unitária, excluído o termo temporal em \$i\omega t\$,

$$B(x, y, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \quad \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \quad (5.90)$$

onde α , β e γ são os cosenos direcionais do vetor propagação \vec{k} dessa onda plana, fica evidente que $A_0(f_x, f_y) \, df_x \, df_y$ pode ser interpretada como a amplitude da onda plana cujos cosenos direcionais são $\alpha = \lambda f_x$ e $\beta = \lambda f_y$. Neste caso o coseno direcional γ não aparece explicitamente pois não precisa. A Eq.(5.89) representa então a onda $\mathcal{U}(x, y, 0)$ escrita na forma de uma soma infinita de ondas planas. Os termos f_x e f_y são chamados de *frequências espaciais*. As Eqs.(5.88) e (5.89) podem ser também escritas assim

$$A_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(x, y, 0) e^{-i2\pi(x\frac{\alpha}{\lambda} + y\frac{\beta}{\lambda})} \, dx \, dy \quad (5.91)$$

$$\mathcal{U}(x, y, 0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{i2\pi(x\frac{\alpha}{\lambda} + y\frac{\beta}{\lambda})} \, d\frac{\alpha}{\lambda} \, d\frac{\beta}{\lambda} \quad (5.92)$$

5.4.2.1 Propagação

Vamos estudar a propagação de uma onda $\mathcal{U}(x, y, z)$ à luz do formalismo de espectro angular de ondas planas. Se formulamos as expressões nas Eqs.(5.91) e (5.92), para uma posição $z \neq 0$, resulta

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(x, y, z) e^{-i2\pi(x\alpha/\lambda + y\beta/\lambda)} \, dx \, dy \quad (5.93)$$

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{i2\pi(x\frac{\alpha}{\lambda} + y\frac{\beta}{\lambda})} \, d\frac{\alpha}{\lambda} \, d\frac{\beta}{\lambda} \quad (5.94)$$

onde \mathcal{U} verifica a equação da onda

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} = 0 \quad (5.95)$$

e substituimos a expressão em Eq.(5.94) na Eq.(5.95), resulta

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (2\pi/\lambda)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A = 0 \quad (5.96)$$

cuja solução é

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z} \quad (5.97)$$

Fica claro que para

- $\alpha^2 + \beta^2 < 1$

o efeito da propagação numa distância z é apenas uma variação nas fases relativas entre as diferentes componentes angulares.

- $\alpha^2 + \beta^2 > 1$

deve ser

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\mu z} \quad \mu \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} \quad (5.98)$$

que representam ondas evanescentes.

5.4.2.1.1 Propagação: filtro linear invariante A Eq.(5.97) indica que podemos definir uma função de transferência para a propagação, assim

$$H(f_x, f_y) = \frac{A(f_x, f_y, z)}{A_0(f_x, f_y)} = e^{i2\pi\sqrt{1/\lambda^2 - f_x^2 - f_y^2} z} \quad \text{para } f_x^2 + f_y^2 < 1/\lambda^2 \quad (5.99)$$

$$= 0 \quad \text{para } f_x^2 + f_y^2 \geq 1/\lambda^2 \quad (5.100)$$

$$\text{sendo} \quad f_x \equiv \alpha/\lambda \quad f_y \equiv \beta/\lambda \quad (5.101)$$

o que caracteriza a propagação como um filtro (ou sistema) linear invariante.

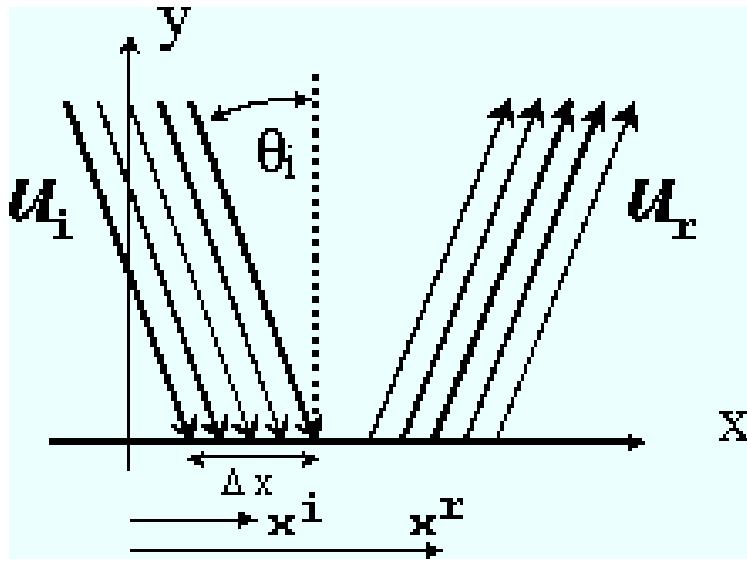


Figura 5.19: Reflexão total e efeito Goos-Hänchen

5.4.2.1.2 Exemplo: Efeito Goos-Hänchen na reflexão total Estudaremos este fenômeno como ilustração do uso do espectro angular de ondas planas. O estudo do deslocamento de um raio de luz na reflexão total na proximidade do ângulo crítico já foi objeto de algumas publicações [10]. Alguns autores tratam o problema de uma forma geral, seja utilizando critérios de conservação de energia, seja utilizando o método da fase estacionária. Outros utilizam uma abordagem particular e se interessam pelas transformações diretas sofridas pelo feixe na reflexão. Em geral a distribuição de amplitude complexa incidente sofre uma transformação em consequência da reflexão. Essa transformação é regida pelas Equações de Fresnel (vide sec.3.4.1) mas elas foram formuladas apenas para onda harmónicas planas e por isso, se queremos estudar a reflexão de um feixe, ele tem que ser decomposto em soma de ondas (harmónicas) planas. Seja um feixe infinitamente largo na direção z e de largura Δx ao longo do eixo x , incidindo na interface $x - z$, para $y = 0$, com um ângulo θ_i , como ilustrado na Fig.5.19. Vamos considerar apenas o caso onde o campo elétrico da onda é perpendicular ao plano de incidência (polarização TE). Nessas condições, a amplitude complexa da luz incidente no plano $x - z$ para um valor qualquer de y , pode ser escrita como uma soma contínua de onda planas, segundo o formalismo da Eq.(5.89), considerando apenas a direção x , assim:

$$\mathcal{U}^i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f_x, y) e^{i2\pi x f_x} df_x \quad (5.102)$$

A largura angular do espectro em questão depende da largura do feixe (vide sec.???)

$$\Delta x \Delta f_x \approx 1 \quad (5.103)$$

Em nosso caso podemos escrever

$$\frac{\Delta f_x}{\bar{f}_x} = \frac{\Delta \alpha}{\sin \theta_i / \lambda} \approx \frac{\lambda}{\Delta x \sin \theta_i} \approx 10^{-3} \text{ para: } \Delta x \approx 1mm \quad \lambda \approx 0.5\mu m \quad \sin \theta_i \approx 1. \quad (5.104)$$

onde \bar{f}_x representa o valor médio. O resultado acima indica que a largura angular do feixe incidente é muito pequena, mesmo para um feixe relativamente estreito e por isso podemos definir uma direção incidente média

$$\bar{\alpha} = \sin \theta_i = \lambda \bar{f}_x \quad (5.105)$$

Após a reflexão podemos escrever, na interface $y = 0$

$$\mathcal{U}^r(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(f_x) A(f_x, 0) e^{i2\pi x f_x} df_x \quad (5.106)$$

onde $r(x)$ é o coeficiente (complexo) de reflexão de Fresnel. Como queremos calcular o deslocamento do feixe na direção x , podemos definir um “centro de gravidade” da luz incidente e refletida, respectivamente

$$x^i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\mathcal{U}^i(x, 0)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{U}^i(x, 0)|^2 dx} \quad (5.107)$$

$$x^r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\mathcal{U}^r(x, 0)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{U}^r(x, 0)|^2 dx} \quad (5.108)$$

Por se tratar de uma onda, $\mathcal{U}^i(x, y)$ deve verificar a equação da onda

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\mathcal{U}^i(x, y) &= (\nabla^2 + k^2) \int_{-\infty}^{\infty} A(f_x, y) e^{i2\pi x f_x} df_x = \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2)A(f_x, y) e^{i2\pi x f_x} df_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 A(f_x, y)}{\partial y^2} + (k^2 - 4\pi^2 f_x^2)A(f_x, y) \right) e^{i2\pi x f_x} df_x = 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

Uma solução para a Eq.(5.109) é

$$A(f_x, y) = A_1(f_x) e^{i\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} y} + A_2(f_x) e^{-i\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} y} \quad (5.110)$$

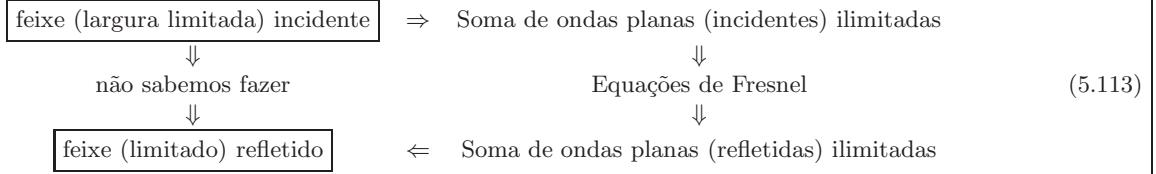
que substituída na Eq.(5.106) resulta em

$$\mathcal{U}^i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(f_x) e^{i\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} y} df_x + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(f_x) e^{-i\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} y} df_x \quad (5.111)$$

onde o primeiro termo representa ondas planas incidindo na interface $y = 0$ enquanto que o segundo termo representa ondas planas saindo dessa interface. Já que nós queremos representar apenas ondas incidindo, fazemos $A_2(f_x) = 0$, o que leva à expressão

$$\mathcal{U}^i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(f_x) e^{i\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} y} df_x \quad f_x = \sin \theta / \lambda \quad (5.112)$$

onde $\sqrt{k^2 - 4\pi^2 f_x^2} = k \cos \theta$. O tratamento do presente problema pode ser esquematizado assim:



Levando em conta as seguintes propriedades (verifique!!) da Transformada de Fourier:

- Se $A(f_x, y) = \text{TF}\{\mathcal{U}^i(x, y)\}$, então

$$\text{TF}\{x \mathcal{U}^i(x, y)\} = \frac{1}{-i2\pi} \frac{dA(f_x, y)}{df_x} \quad (5.114)$$

- Se $\text{TF}\{U(x)\} = A(f_x)$ e $\text{TF}\{G(x)\} = B(f_x)$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x) G^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} A(f_x) B^*(f_x) df_x \quad (5.115)$$

podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{U}^i(x, y) \mathcal{U}^i(x, y)^* dx = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA(f_x)}{df_x} A^*(f_x) df_x \quad (5.116)$$

Aplicando o resultado acima nas Eqs.(5.107) e (5.108) temos

$$x^i = \frac{i}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA(f_x)}{df_x} A^*(f_x) df_x}{\int_{-\infty}^{\infty} A(f_x) A^*(f_x) df_x} \quad (5.117)$$

$$x^r = \frac{i}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dA(f_x)r(f_x))}{df_x} A^*(f_x) r^*(f_x) df_x}{\int_{-\infty}^{\infty} A(f_x) A^*(f_x) r(f_x) r^*(f_x) df_x} \quad (5.118)$$

No caso da reflexão total temos $rr^* = 1$ e assim podemos escrever

$$x^r - x^i = \frac{i}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A(f_x) A^*(f_x) \frac{dr}{df_x} r^* df_x}{\int_{-\infty}^{\infty} A(f_x) A^*(f_x) df_x} \quad (5.119)$$

Em geral $A(f_x)$ varia muito rapidamente comparado com $r(f_x)$ e por isso podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} AA^* \frac{dr(f_x)}{df_x} r^* df_x \approx r^*(\bar{f}_x) \left[\frac{dr(f_x)}{df_x} \right]_{\bar{f}_x} \int_{-\infty}^{\infty} AA^* df_x \quad (5.120)$$

Substituindo a expressão acima na Eq.(5.119) obtemos

$$x^r - x^i = \frac{i}{2\pi} r^*(\bar{f}_x) \left[\frac{dr(f_x)}{df_x} \right]_{\bar{f}_x} \quad (5.121)$$

Na reflexão total temos

$$r = e^{i\psi(f_x)} \quad \frac{dr}{df_x} = i \frac{d\psi}{df_x} e^{i\psi(f_x)} \quad (5.122)$$

que substituídos na Eq.(5.121) resulta em

$$x^r - x^i = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\psi}{df_x} \quad (5.123)$$

Da Eq.(3.56) podemos concluir que:

$$\tan(\psi/2) = -\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} / \cos \theta_i \quad (5.124)$$

e com a definição $f_x \equiv \sin \theta_i / \lambda$ resulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial f_x} = -\frac{2\lambda \sin \theta_i}{\cos \theta_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} \quad (5.125)$$

que substituída na Eq.(5.123) fica assim

$$x^r - x^i = \frac{2 \sin \theta_i \lambda}{2\pi \cos \theta_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} \quad (5.126)$$

$$x^r - x^i = \infty \text{ para } \theta_i = \theta_c \quad (5.127)$$

Da Eq.(5.124) podemos concluir que, para o caso $\theta_i = \theta_c$, a diferença de fase ($\psi = 0$) é zero e o deslocamento Goos-Hänchen ($x^r - x^i = \infty$) é infinito. Na prática porém é extremadamente difícil atingir as condições para que esse deslocamento seja sequer da ordem de alguns μm . Por exemplo, se supomos a reflexão total na interface vidro-ar, onde o primeiro tenha um índice de refração $n = 1.5$, teríamos que incidir com um feixe ($\lambda = 633 \text{ nm}$) cujo ângulo de incidência não poderia se afastar mais do que 10^{-5} rad (ou seja $\approx 6 \times 10^{-4}$ graus) do valor exato do ângulo crítico de reflexão total para termos um deslocamento $x^r - x^i \geq 50 \mu\text{m}$!!

5.4.2.2 Difração e espectro angular de ondas planas

Seja uma onda $U_i(x, y)$ incidindo numa abertura $t(x, y)$ onde $U_t(x, y)$ representa a onda transmitida pela abertura, tudo no mesmo plano (x,y). Nesse caso

$$U_t(x, y) = U_i(x, y) t(x, y) \quad (5.128)$$

cujas transformadas de Fourier são

$$A_t(f_x, f_y) = A_i(f_x, f_y) * T(f_x, f_y) \quad (5.129)$$

onde

$$A_t = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x, y) e^{-2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy \quad (5.130)$$

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(x, y) e^{-2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy \quad (5.131)$$

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy \quad (5.132)$$

$$f_x \equiv \alpha/\lambda \quad f_y \equiv \beta/\lambda \quad (5.133)$$

A expressão na Eq.(5.129) é a formulação mais geral da difração, mas é pouco prática, exceto em casos particularmente simples, por envolver um produto de convolução. Dessa expressão porém concluímos que o efeito da abertura (na difração) é modificar o espectro angular de ondas planas da onda incidente.

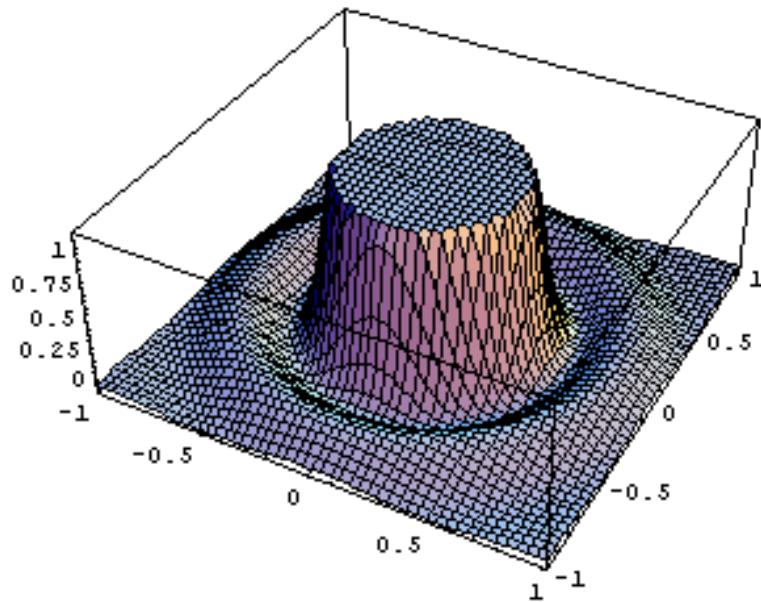


Figura 5.20: Vista de uma parte da função de Airy

5.4.2.2.1 Casos simples Vejamos dois casos muito simples, como o de uma onda plana incidindo normalmente numa abertura circular infinitamente pequena:

$$t(x, y) = \delta(x, y) \quad TF\{\delta(x, y)\} = 1(f_x, f_y) \quad (5.134)$$

resultando assim o espectro angular

$$A_t = TF\{1(x, y)\} * TF\{\delta(x, y)\} = 1(f_x, f_y) \quad (5.135)$$

Ou seja que a luz incidente formada por uma onda plana com $\alpha = \beta = 0$ transformou-se numa onda esférica com espectro angular constante en todo o espaço angular.

Seja agora o caso de uma onda plana incidindo normalmente numa abertura circular de raio R. Neste caso

$$t(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \quad (5.136)$$

$$U_i = 1(x, y) \quad (5.137)$$

$$A_t(f_x, f_y) = TF\{1(x, y)\} * TF\{t(x, y)\} = TF\{\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)\} \quad (5.138)$$

sendo que

$$TF\{\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)\} = 2\pi R^2 \frac{J_1(2\pi R\sqrt{f_x^2 + f_y^2})}{2\pi R\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad (5.139)$$

A função representada na Eq.(5.139) é chamada de função de Airy, tem a forma ilustrada na Fig.5.20, e apresenta zeros para os seguintes valores de $2R\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$: 1.22, 2.23, 3.24, etc.,

5.5 Difração e Teoria dos Sistemas Lineares

Nesta seção veremos que a difração na formulação de Rayleigh-Sommerfeld (vide sec.5.2.3) pode ser caracterizada como um filtro linear, mais fácil de calcular que a formulação geral na sec.5.4.2.2.

5.5.1 Formulação de Rayleigh-Sommerfeld

A expressão da Eq.(5.74)

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} \mathcal{U}(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) \, ds_1$$

pode ser escrita, sob o formalismo da teoria de sistemas, assim

$$\mathcal{U}(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(P_1) h(P_1, P_0) \, dP_1 \quad (5.140)$$

$$(5.141)$$

onde

$$h(P_1, P_0) \equiv \frac{e^{ikr_{01}}}{\lambda i r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) \text{ para } P_1 \in \Sigma \quad (5.142)$$

$$\equiv 0 \text{ para } P_1 \notin \Sigma \quad (5.143)$$

A formulação acima sinaliza que a difração pode ser tratada como um sistema linear, porém não invariante.

5.5.2 Aproximação de Fresnel

Na formulação de Rayleigh-Sommerfeld, para o caso do:

- o plano de observação estar a uma distância muito maior que as dimensões da abertura de difração e,
- o ponto de observação não muito longe do eixo central da abertura

o que significa que

$$\begin{aligned} x_1, y_1 \ll z & \text{ e por isso } \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \approx 1 \\ \Rightarrow h & \approx \frac{1}{i\lambda z} e^{ikr_{01}} \end{aligned}$$

podemos então escrever

$$h(P_1, P_0) = h(P_1 - P_0) \quad (5.144)$$

e o sistema fica sendo **invariante** e não apenas linear. Mas podemos simplificar ainda mais assim:

$$\begin{aligned} r_{01} &= \sqrt{z^2 + (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2} \\ r_{01} &\approx z + \frac{(x_o - x_1)^2}{2z} + \frac{(y_o - y_1)^2}{2z} \end{aligned} \quad (5.145)$$

Nesse caso a resposta impulsional na Eq.(5.142) fica assim

$$h \approx \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}[(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2]}$$

e a formulação da difração dita de Fresnel fica

$$\begin{aligned} U(x_o, y_o) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} \times \\ &\int \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_o x_1 + y_o y_1)} \, dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5.146)$$

que se pode simbolizar assim:

$$U(x_o, y_o) \propto \text{TF}\{U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)}\}_{\frac{x_o}{\lambda z}, \frac{y_o}{\lambda z}}$$

5.5.3 Aproximação de Fraunhofer

Trata-se de uma aproximação mais “forte” que a de Fresnel pois assume que:

$$e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} \approx 1$$

e a formulação integral da Eq.(5.146) fica assim:

$$U(x_o, y_o) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_o x_1 + y_o y_1)} dx_1 dy_1 \quad (5.147)$$

$$U(\lambda z f_x, \lambda z f_y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) e^{-i2\pi(x_1 f_x + y_1 f_y)} dx_1 dy_1 \quad (5.148)$$

ou de forma simbólica:

$$U(\lambda z f_x, \lambda z f_y) \propto \text{TF}\{U(x_1, y_1)\}_{f_x = \frac{x_o}{\lambda z}, f_y = \frac{y_o}{\lambda z}}$$

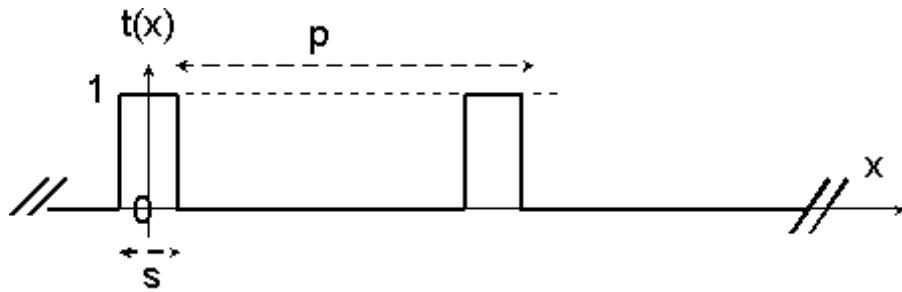


Figura 5.21: Rede de transmissão retangular

5.6 Exemplos

Nesta seção discutiremos alguns exemplos de estruturas difratantes e a forma de se calcular a difração nelas, dentro da aproximação de Fraunhofer, para ilustrar as técnicas utilizadas.

5.6.1 Difração por um orifício circular

Seja um orifício circular de raio $R = 50\mu\text{m}$, iluminado por uma luz de comprimento de onda $\lambda = 0.633\mu\text{m}$, uniforme, incidindo normalmente. Sua mancha de difração observada num anteparo à distância $L = 1\text{m}$, na aproximação de Fraunhofer, resulta numa estrutura conhecida como função de Airy (vide Fig.5.20). A expressão matemática do furo é

$$t(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \quad (5.149)$$

sua transformada de Fourier será (vide capt.B.2.3):

$$2\pi R^2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{2\pi R\rho} \quad \rho \equiv \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (5.150)$$

Sabendo que $J_1(\pi x) = 0$ para $x = 1.22, 2.233, 3.238, \dots$, podemos concluir que os dois primeiros anéis escuros na mancha de difração ocorrerão para

$$\rho = \frac{1.22}{2R} \quad \text{e} \quad \frac{2.233}{2R} \quad (5.151)$$

cujos raios no plano de observação valem

$$r = 1.22 \frac{\lambda L}{2R} = 7.72\text{mm} \quad \text{e} \quad 2.233 \frac{\lambda L}{2R} = 14.13\text{mm} \quad (5.152)$$

5.6.2 Difração por uma rede retangular de amplitude

A Fig.5.21 ilustra a transmitância de uma rede retangular de amplitude (rede de fendas) com período p e largura de fendas s . A expressão da transmitância é

$$t(x) = \text{rect}(x/s) * \text{III}(x/p) \quad (5.153)$$

Se imaginamos que a rede tem comprimento finito, digamos de 100 períodos, é necessário modificar a expressão acima assim

$$t(x) = \text{rect}(x/s) * [\text{III}(x/p) \text{rect}(x/L)] \quad L = 100p \quad (5.154)$$

A difração de uma luz uniforme de comprimento de onda λ nessa rede, na aproximação de Fraunhofer, pode ser calculada pela transformada de Fourier da transmitância

$$T(f) = TF\{t(x)\} \propto s \text{sinc}(sf) [p \text{ III}(pf) * L \text{sinc}(Lf)] \quad (5.155)$$

cuja intensidade vale

$$I(f) \propto |T(f)|^2 \propto s^2 p^2 L^2 \text{envelop}(f) [\text{III}(pf) * \text{sinc}^2(Lf)] \quad (5.156)$$

$$\text{envelop}(f) \equiv \text{sinc}^2(sf) \quad (5.157)$$

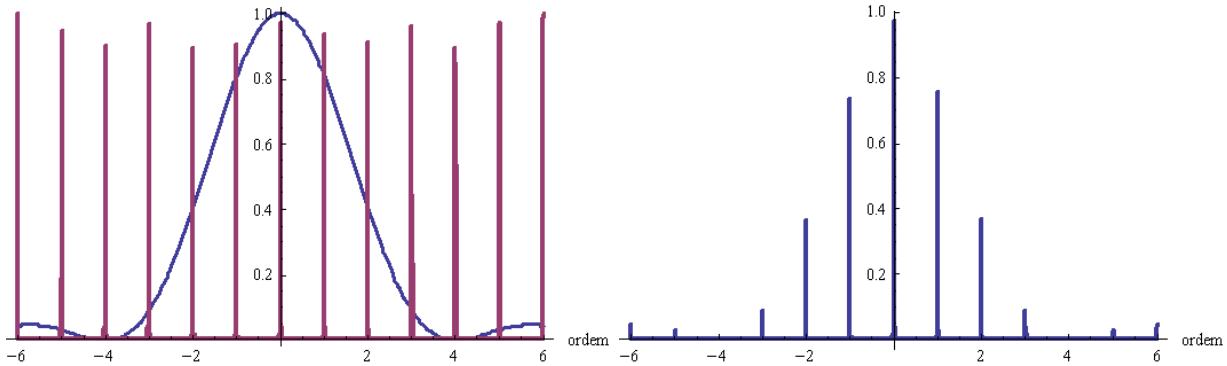


Figura 5.22: Representação matemática da intensidade da difração da luz da rede representada na Fig.5.21 para $s = 2.5\mu\text{m}$, $p = 10\mu\text{m}$, $N = 100$ e $\lambda = 0.633\mu\text{m}$. Na figura da esquerda mostra-se a rede (normalizada sobre N^2) e o envelope superpostos, enquanto que na figura da direita vemos a rede completa, normalizada sobre o valor da ordem central.

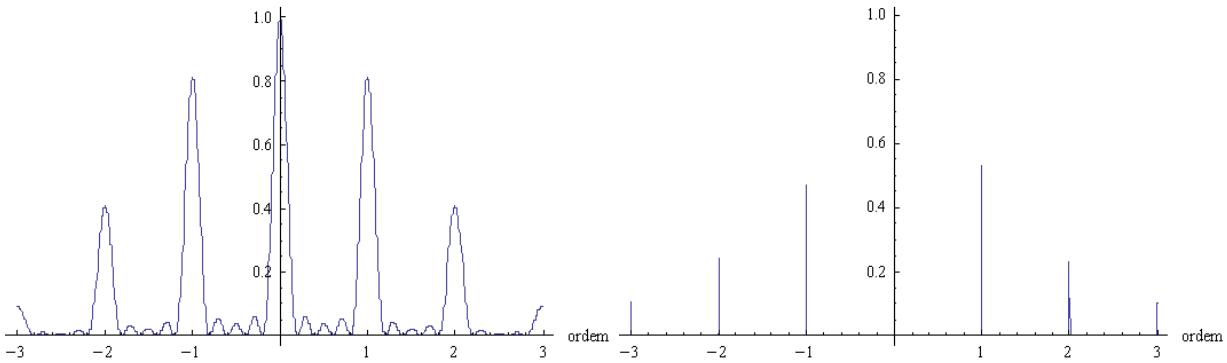


Figura 5.23: Padrão de difração representado na Fig.5.22 à direita, mas para $N = 5$ (esquerda) e $N = 500$ (direita), com ordens de difração com larguras de 0.2 e 0.002 (em frações de período), respectivamente.

Mas o termo periódico da direita pode ser escrito, utilizando a expressão na Eq.(5.28), assim

$$\text{III}(pf) * \text{sinc}^2(Lf) = \frac{\sin^2(N\pi p(\sin \theta)/\lambda)}{\sin^2(\pi p(\sin \theta)/\lambda)} \quad N = 100 \quad (5.158)$$

resultando então a formulação final

$$I(f) \propto \text{envelop}(f) \frac{\sin^2(100\pi p(\sin \theta)/\lambda)}{\sin^2(\pi p(\sin \theta)/\lambda)} \quad (5.159)$$

A expressão acima está representada na Fig.5.22, para valores particulares dos seus parâmetros. Note que, por causa do mínimo no envelope, não existem as ordens 4 e -4, o que pode ser alterado mudando a relação s/p . Como deveria ser a rede para anular as ordens 2 e -2 em lugar das 4 e -4, por exemplo? Note também que a largura das ordens de difração depende do tamanho da rede: se a rede for menor ou maior, o envelope (e a relação da intensidade entre as ordens de difração) não muda já que ele só depende do tamanho das fendas, mas a largura das ordens (a meia altura) fica maior ou menor respectivamente, como ilustrado na Fig.5.23.

5.6.3 Difração de uma rede de fase com modulação senoidal

Estudemos o caso de uma rede com transmitância complexa da forma

$$t(x) = e^{\frac{i}{2}m \sin(2\pi f_0 x)} \quad (5.160)$$

onde m representa a modulação em fase (“pico-a-pico”) da rede. Para calcular a difração da luz por essa rede, podemos usar a relação

$$e^{\frac{i}{2}m \sin(2\pi f_0 x)} = \cos\left(\frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x)\right) + i \sin\left(\frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 x)\right) \quad (5.161)$$

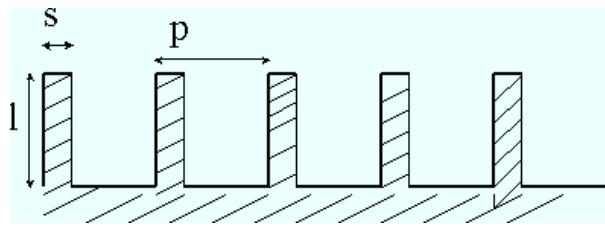


Figura 5.24: A figura mostra uma rede de difração de fase com perfil retangular, com período p e porções retangulares de largura s , altura l e índice de refração n do material da rede, ela estando no ar.

e a conhecida propriedade das funções de Bessel

$$\cos\left(\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x)\right) = J_0\left(\frac{m}{2}\right) + J_2\left(\frac{m}{2}\right)\cos(2\pi(2)f_0 x) + J_4\left(\frac{m}{2}\right)\cos(2\pi(4)f_0 x) + \dots \quad (5.162)$$

$$= J_0\left(\frac{m}{2}\right) + J_2\left(\frac{m}{2}\right)\frac{e^{i2\pi(2)f_0 x} + e^{-i2\pi(2)f_0 x}}{2} + J_4\left(\frac{m}{2}\right)\frac{e^{i2\pi(4)f_0 x} + e^{-i2\pi(4)f_0 x}}{2} + \dots \quad (5.163)$$

e similarmente para

$$\sin\left(\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x)\right) = 2J_1\left(\frac{m}{2}\right)\sin(2\pi f_0 x) + 2J_3\left(\frac{m}{2}\right)\sin(2\pi(3)f_0 x) + \dots \quad (5.164)$$

$$= 2J_1\left(\frac{m}{2}\right)\frac{e^{i2\pi f_0 x} - e^{-i2\pi f_0 x}}{2i} + 2J_3\left(\frac{m}{2}\right)\frac{e^{2\pi(3)f_0 x} - e^{-2\pi(3)f_0 x}}{2i} + \dots \quad (5.165)$$

Sabendo que se verifica

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (5.166)$$

podemos escrever

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) J_n\left(\frac{m}{2}\right) e^{i2\pi n f_0 x} \quad n : \text{inteiro} \quad (5.167)$$

Fazendo a TF teremos as ordens de difração para $f_x = \frac{\xi}{\lambda z}$:

$$TF\{t(x)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \delta(f_x - n f_0) \quad (5.168)$$

onde ξ é a coordenada correspondente à x , no plano de observação, com a propriedade interessante

$$I(f) \propto |TF\{t(x)\}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right)^2 = 1 \quad (5.169)$$

para quaisquer m , o que significa que a soma da intensidade de todas as ordens de difração vale o total da luz incidente, o que já era de se esperar por se tratar de uma rede puramente de fase, sem absorção da luz.

5.6.4 Difração por uma rede retangular, de fase

Vamos calcular a difração da luz numa rede de fase retangular como ilustrada na Fig.5.24. Primeiro precisamos formular matematicamente a expressão da transmitância complexa dessa rede, assim

$$t(x) = III\left(\frac{x}{p}\right) * \left[\text{rect}\left(\frac{x}{s}\right) e^{i2\pi\ell n/\lambda} + \left(\text{rect}\left(\frac{x}{p-s}\right) e^{i2\pi\ell/\lambda} \right) * \delta(x-p/2) \right] \quad (5.170)$$

Para calcular a difração de uma luz uniforme incidindo normalmente à rede, procedemos a calcular a TF de $t(x)$

$$\begin{aligned} T(f) = TF\{t(x)\} &= p III(p f) e^{i2\pi\ell/\lambda} \\ &\times \left[s \text{sinc}(sf) e^{i2\pi\ell(n-1)/\lambda} + (p-s) \text{sinc}(f(p-s)) e^{-i2\pi pf/2} \right] \end{aligned} \quad (5.171)$$

$$I(f) \propto |T(f)|^2 = p^2 III(p f) \text{Env}(f) \quad (5.172)$$

$$\begin{aligned} \text{Env}(f) &\equiv s^2 \text{sinc}^2(sf) + (p-s)^2 \text{sinc}^2((p-s)f) \\ &+ 2s(p-s) \text{sinc}(sf) \text{sinc}((p-s)f) \cos(2\pi(\frac{\ell(n-1)}{\lambda} - \frac{p}{2}f)) \end{aligned} \quad (5.173)$$

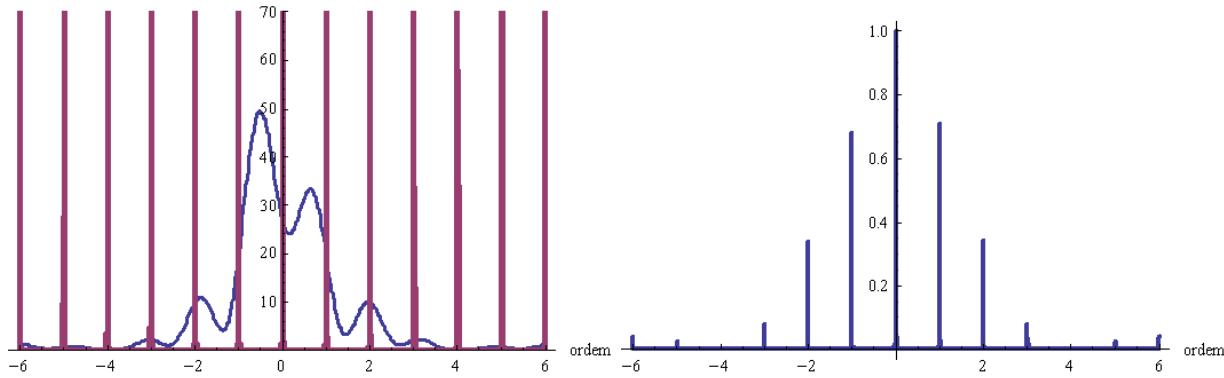


Figura 5.25: Difração por uma rede retangular de fase como ilustrada na Fig.5.24. Na figura da esquerda mostram-se o envelope e as ordens de difração, e na figura da direita vemos a intensidade difratada total, representada pela Eq.(5.172), normalizada sobre a intensidade da ordem central.

O envelope $\text{Env}(f)$ com a posição das ordens de difração e a rede resultante estão graficados na Fig.5.25 para o caso de $s = 2.5\mu\text{m}$, $p = 10\mu\text{m}$, $\ell = 0.9\lambda$, $N = 100$ e $\lambda = 0.633\mu\text{m}$. Note que, embora o envelope seja assimétrico, a intensidade das ordens simetricamente dispostas de um lado e do outro da ordem central, são perfeitamente (verifique!!) simétricas, o que parece razoável já que a rede propriamente dita é simétrica.

Neste caso, como no da rede de amplitude da Fig.5.21, a relação das intensidades das diferentes ordens está controlada pelo envelope. Esse envelope porém depende da natureza e geometria da rede e no caso de uma rede de fase, é possível encontrar as condições para anular a ordem central (quais são?), coisa impossível para o caso de uma rede de amplitude.

5.6.5 Difração por uma rede “blazed” por transmissão

A Fig.5.26 mostra uma rede de difração de fase com perfil do tipo “dente-de-serra”, período Δ e ângulo α de inclinação dos “dentes”. Essa rede é normalmente feita por gravação com uma ponta de diamante sobre um substrato que depois é metalizado. Nesse caso a rede é utilizada em reflexão. Para nosso problema podemos imaginar que os dentes são feitos de vidro com $n = 1.5$, por ex., rodeados por ar (com $n=1$) e por ser transparente podemos utilizá-la em transmissão. O primeiro passo é descrever a transmitância complexa dessa rede assim:

$$t(x) = [\text{III}(x/\Delta)\text{rect}(x/L)] * \left[\text{rect}\left(\frac{x - \Delta/2}{\Delta}\right) e^{i2\pi((n-1)x \tan \alpha + \Delta \tan \alpha)/\lambda} \right] \quad (5.174)$$

onde o pente de Dirac representa a periodicidade da rede e o tamanho da rede está determinada pela função $\text{rect}(x/L)$. Para calcular a difração na aproximação de Fraunhofer, temos que calcular a TF da transmitância

$$T(f) = e^{i2\pi\Delta \tan \alpha / \lambda} \Delta^2 L [\text{III}(\Delta f_x) * \text{sinc}(L f_x)] \left[(\text{sinc}(\Delta f_x) e^{i2\pi\Delta/2 f_x}) * \delta(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda) \right] \quad (5.175)$$

$$= \Delta^2 L \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(L(f_x - n/\Delta)) \right] \left[\text{sinc}(\Delta(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)) e^{i2\pi\Delta/2(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)} \right] \quad (5.176)$$

Supondo que $L \gg \Delta$, a intensidade será

$$\begin{aligned} I(f_x) &\propto |T(f_x)|^2 \\ &\propto \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(L(f_x - n/\Delta)) \right]^2 |\text{sinc}(\Delta(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)) e^{i2\pi\Delta/2(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)}|^2 \\ &\propto \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(L(f_x - n/\Delta)) \right]^2 \text{sinc}^2(\Delta(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)) \\ &\propto \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(L(f_x - n/\Delta)) \right] \text{sinc}^2(\Delta(f_x - (n-1) \tan \alpha / \lambda)) \end{aligned} \quad (5.177)$$

A fórmula acima significa que temos:

- uma sucessão infinita de linhas com forma de sinc^2 e espaçadas de $1/\Delta$ e de largura $1/L$

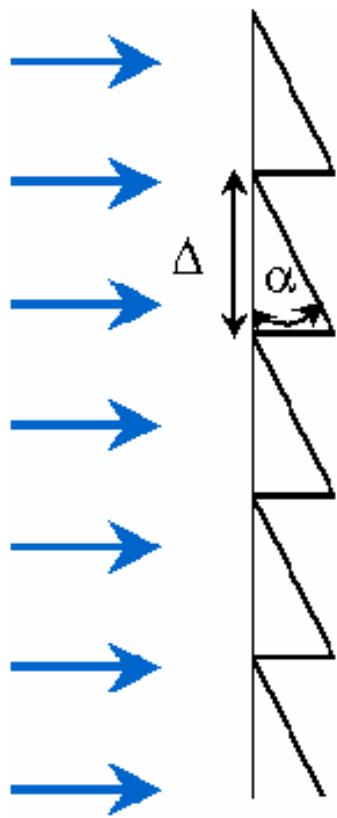


Figura 5.26: Rede “blazed” de transmissão de fase com “dentes” de vidro com índice de refração $n = 1.5$, no ar ($n=1$).

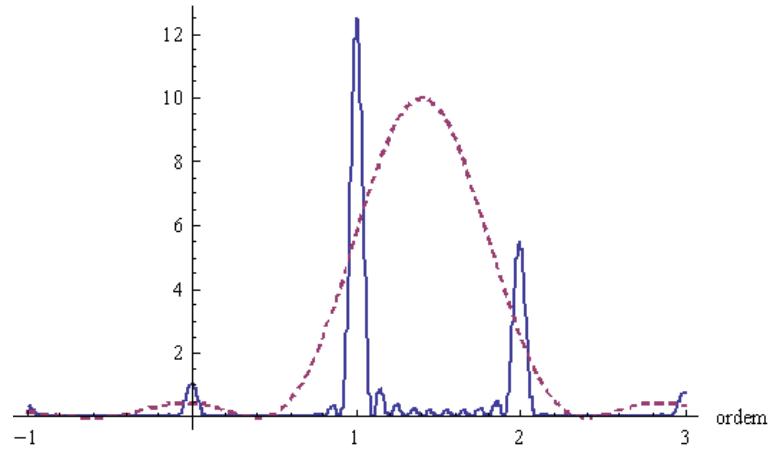


Figura 5.27: Espectro de uma rede “blazed” de fase com as ordens normalizadas sobre o valor da ordem “zero” (curva contínua) com a curva tracejada representando apenas o envelope. Neste caso $\Delta = 10\mu m$, $L = 100\mu m$ e $\lambda = 0.633\mu m$, para $\alpha = 0.175 \text{ rad}$

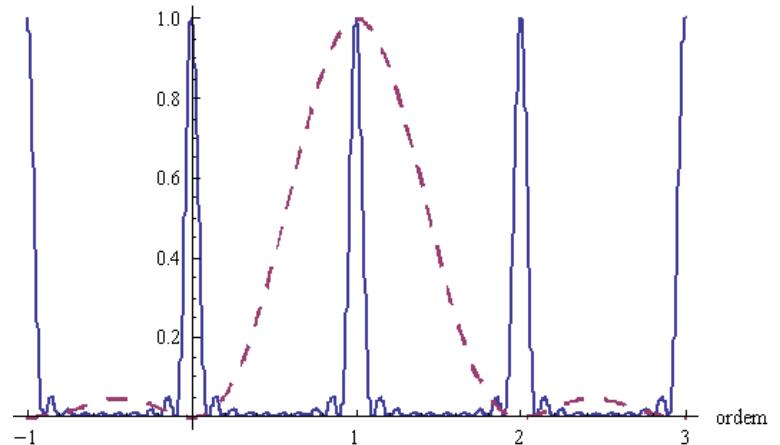


Figura 5.28: Linhas das ordens de difração (curva contínua) e envolvente (tracejada) de uma rede “blazed” nas mesmas condições que na Fig. 5.27 mas para $\alpha = 0.126 \text{ rad}$.

- essa sucessão de linhas está limitada por uma envolvente com forma de sinc^2 centrada em $f_x = (n - 1) \tan \alpha / \lambda$ e cuja largura é $1/\Delta$

como ilustrado na Fig.5.27 para $\alpha = 0.175$ rad.

Nas mesmas condições anteriores, quânto deve valer α para que toda (ou quase toda) a luz seja difratada numa direção apenas, por ex. na primeira orden (+1) de difração? Nesse caso a envolvente deve estar centrada em $f_x = 1/\Delta$ ou seja que

$$f_x = (n - 1) \tan \alpha / \lambda = 1/\Delta \quad (5.178)$$

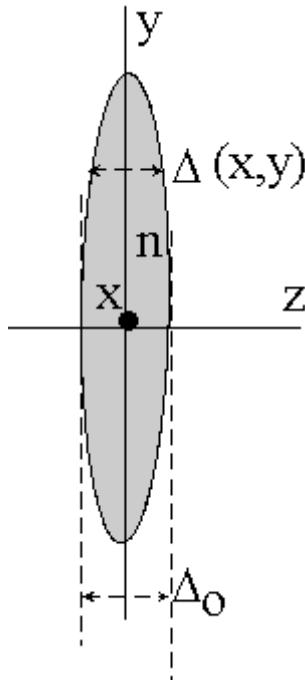
$$(n - 1) \tan \alpha = \lambda / \Delta = 0.633 / 10 = 0.0633 \quad (5.179)$$

$$\text{ou seja: } \alpha \approx 0.126 \text{ rad} \quad (5.180)$$

como ilustrado na Fig.5.28.

5.7 Transformação de Fourier pelas lentes

5.7.1 Lente fina: transformação de fase



Atraso de fase na onda:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_o - \Delta(x, y)]$$

lente fina:

$$t(x, y) = e^{ik\Delta_o} e^{ik(n-1)\Delta(x, y)}$$

$$U_t(x, y) = U_i(x, y)t(x, y)$$

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y)$$

Aproximação paraxial:

$$\Delta(x, y) \approx \Delta_o - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$t(x, y) = e^{ikn\Delta_o} e^{-i\frac{k}{2F}(x^2 + y^2)}$$

$$\text{definindo: } \frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Figura 5.29: Atraso de fase numa lente

5.7.1.1 Significação física

A Fig.5.30 descreve o efeito da lente (suposta infinitamente fina) sobre a onda incidente U_i que é transformada na onda transmitida U_t ao passar pela lente representada pela sua transmitância complexa $t(x, y)$

$$U_t(x, y) = U_i(x, y)t(x, y) \quad (5.181)$$

Supondo que a onda incidente seja uma onda plana

$$U_i = 1 \quad (5.182)$$

a onda transmitida depois da lente sera

$$U_t(x, y) = e^{ikn\Delta_o} e^{-i\frac{k}{2F}(x^2 + y^2)} \quad (5.183)$$

A expressão à direita representa a aproximação paraxial¹ de uma onda esférica, sendo que se F é positivo a onda será convergente e será divergente se F for negativo.

5.7.2 Objeto encostado na entrada da lente

A Fig.5.31 representa uma onda U_i encostada no plano de entrada da lente, sendo transmitida (U_t) por ela e depois vista como U_f no plano focal da lente, a uma distância F . Podemos imaginar que a onda incidente seja a de uma onda plana uniforme, de amplitude A , incidindo normalmente numa transparência complexa $t_o(x, y)$ (que representa a informação óptica a ser processada) de forma a poder escrever

$$U_i(x, y) = At_o(x, y) \quad (5.184)$$

¹Verifique a aproximação paraxial partindo de uma onda esférica $\frac{e^{ikr}}{r}$ onde $r \equiv \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$

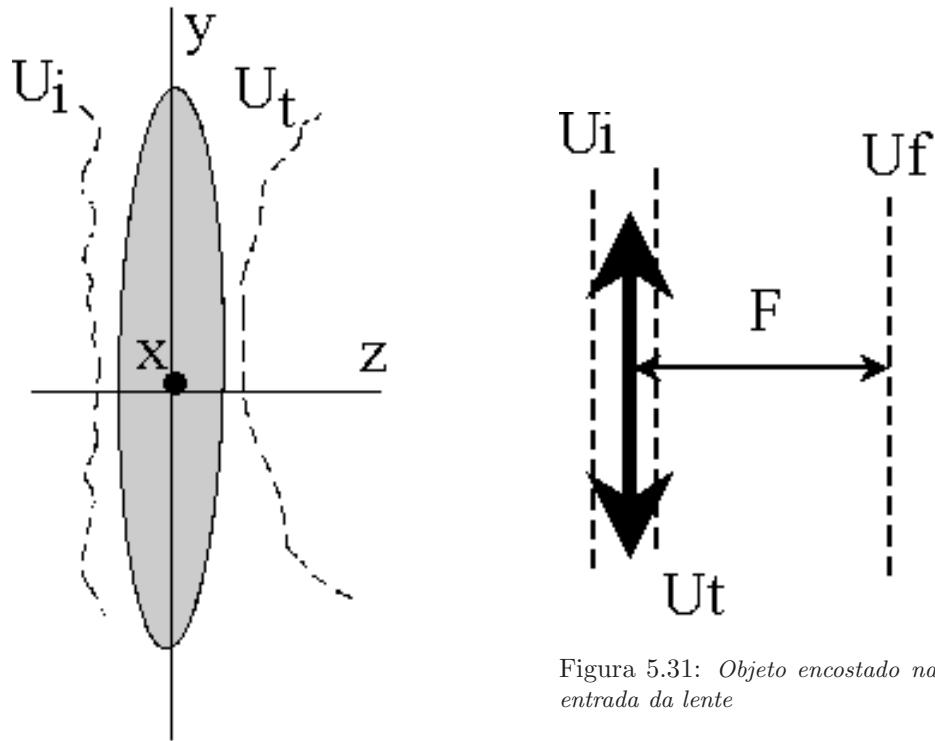


Figura 5.30: Significação física

Figura 5.31: Objeto encostado na entrada da lente

No plano da lente, imediatamente depois dela, temos:

$$\begin{aligned} U_t(x, y) &= At_o(x, y)t(x, y)P(x, y) \\ &= \left[At_o(x, y) e^{-i\frac{k}{2F}(x^2 + y^2)} \right] P(x, y) \end{aligned} \quad (5.185)$$

onde o termo constante de fase $e^{ikn\Delta_o}$ da lente foi omitido e a função

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 1 & x, y &\text{ dentro da lente} \\ &= 0 & x, y &\text{ fora} \end{aligned}$$

representa a pupila da lente. No plano focal da lente, na aproximação de Fresnel (Eq.(5.146)), podemos escrever:

$$\begin{aligned} U(x_F, y_F) &= U(\lambda F f_x, \lambda F f_y) = \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} \times \\ &\int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[At_o(x, y) e^{-i\frac{k}{2F}(x^2 + y^2)} P(x, y) \right] e^{i\frac{k}{2F}(x^2 + y^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_F x + y_F y)} dx dy \\ U(x_F, y_F) &= \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} F_t(f_x, f_y) \end{aligned} \quad (5.186)$$

onde o termo exponencial constante foi omitido, sendo

$$F_t(f_x, f_y) \equiv \text{TF}\{U_t(x, y)\} = \text{ATF}\{t_o(x, y)\} * \text{TF}\{P(x, y)\} \quad (5.187)$$

Mas se $P(x, y)$ é uma função “larga”, então

$$\text{TF}\{P(x, y)\} \approx \delta(f_x, f_y) \quad (5.188)$$

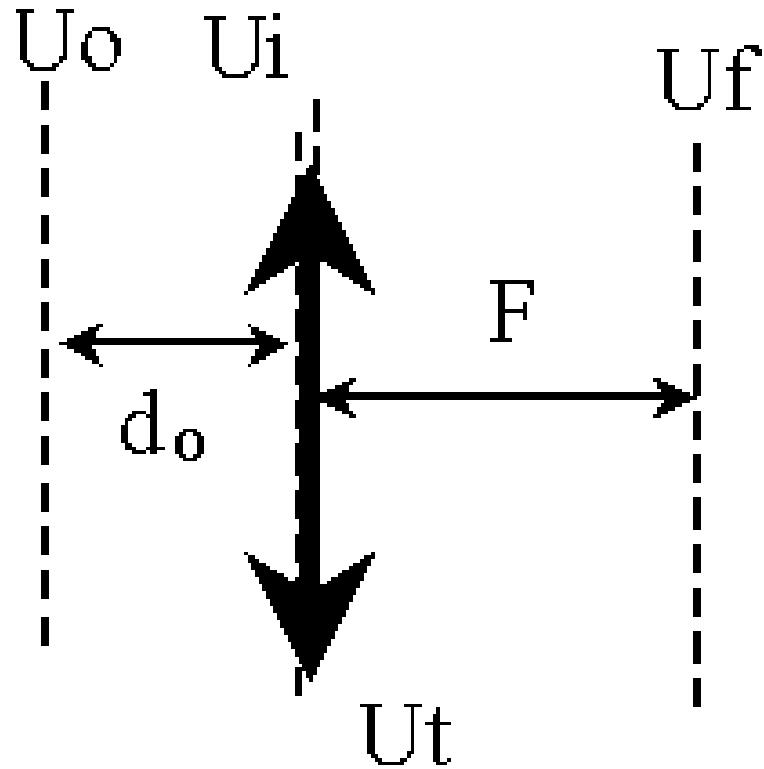


Figura 5.32: Objeto antes da lente

resultando assim

$$F_t(f_x, f_y) \approx ATF\{t_o(x, y)\} \equiv F_o(f_x, f_y) \quad (5.189)$$

e a intensidade vale então

$$I_F(\lambda F f_x, \lambda F f_y) = \frac{A^2}{\lambda^2 F^2} |TF\{t_o(x, y)P(x, y)\}|^2 \quad f_x = \frac{x_F}{\lambda F} \quad f_y = \frac{y_F}{\lambda F}$$

5.7.3 Objeto antes da lente

A Fig.5.32 representa uma onda $U_o(x_o, y_o) = At_o(x_o, y_o)$ produzida pela mesma transparência mas agora colocada a uma distância d_o antes da lente. Sua Transformada de Fourier no plano objeto será

$$F_o(f_x, f_y) = TF\{U_o(x_o, y_o)\} = ATF\{t_o(x_o, y_o)\} \quad (5.190)$$

e no plano de entrada da lente

$$F_i(f_x, f_y) = TF\{U_i(x, y)\} \quad (5.191)$$

Considerando a propagação (vide sec.5.4.2.1.1) de (x_0, y_0) até o plano de entrada da lente e a função de transferência $H(f_x, f_y)$, que caracteriza a propagação, podemos escrever

$$F_i(f_x, f_y) = F_o(f_x, f_y)H(f_x, f_y) \quad (5.192)$$

e aproximando H para as condições paraxiais

$$H = e^{i2\pi d_o \sqrt{1/\lambda^2 - \alpha^2/\lambda^2 - \beta^2/\lambda^2}} \approx e^{i2\pi d_o/\lambda} e^{-i\pi\lambda d_o(f_x^2 + f_y^2)} \quad (5.193)$$

calculamos a amplitude complexa no plano focal

$$U_F(x_F, y_F) = \frac{e^{i\frac{k}{2F}(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} F_i(f_x, f_y) \quad (5.194)$$

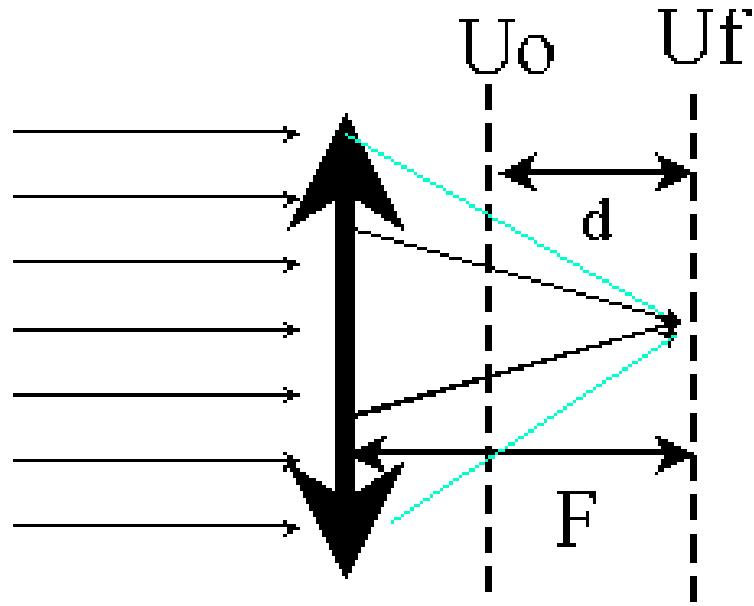


Figura 5.33: Objeto depois da lente

$$U_F(x_F, y_F) \approx \frac{e^{i\frac{k}{2F}(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} F_o(f_x, f_y) e^{i2\pi d_o/\lambda} e^{-i\pi\lambda d_o(f_x^2 + f_y^2)} \quad (5.195)$$

$$U_F(x_F, y_F) \approx e^{i2\pi d_o/\lambda^2} \frac{e^{i\frac{k}{2F}(1 - \frac{d_o}{F})(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} F_o(f_x, f_y) \quad (5.196)$$

$$U_F(x_F, y_F) = e^{i2\pi d_o/\lambda^2} \frac{e^{i\frac{k}{2F}(1 - \frac{d_o}{F})(x_F^2 + y_F^2)}}{i\lambda F} \times \\ A \int \int_{-\infty}^{+\infty} t_o(x_o, y_o) P(x_o + \frac{d_o}{F}x_F, y_o + \frac{d_o}{F}y_F) e^{-i2\pi(x_o \frac{x_F}{\lambda F} + y_o \frac{y_F}{\lambda F})} dx_o dy_o \quad (5.197)$$

Esse resultado representa a TF da transparência, limitada pela pupila da lente centrada no sistema de coordenadas no plano de observação e projetada (“vignetagem”) sobre a transparência em questão, além de um termo exponencial que depende do ponto de observação e que desaparece se considerarmos apenas a intensidade da difração e não sua amplitude complexa.

5.7.3.1 Objeto no plano focal anterior

Nesse caso podemos escrever $d_o = F$ que substituimos na Eq.(5.197) e esta fica assim

$$U_F(x_F, y_F) = A \int \int_{-\infty}^{+\infty} t_o(x_o, y_o) P(x_o + x_F, y_o + y_F) e^{-i2\pi(x_o \frac{x_F}{\lambda F} + y_o \frac{y_F}{\lambda F})} dx_o dy_o \quad (5.198)$$

que representa a verdadeira transformada de Fourier em amplitude e fase, com a “vignetagem” representada pela projeção da pupila da lente, lembrando que o fator $e^{i2\pi d_o/\lambda^2}$ foi eliminado por ser constante.

5.7.4 Objeto depois da lente

Neste caso, mesmo que a onda incidente na lente seja plana e de amplitude A , ao iluminar a transparência no plano (x_o, y_o) depois da lente, ela fica esférica convergente cuja aproximação paraxial nos permite escrever

$$P(x, y) \implies P(x_o \frac{F}{d}, y_o \frac{F}{d}) \quad (5.199)$$

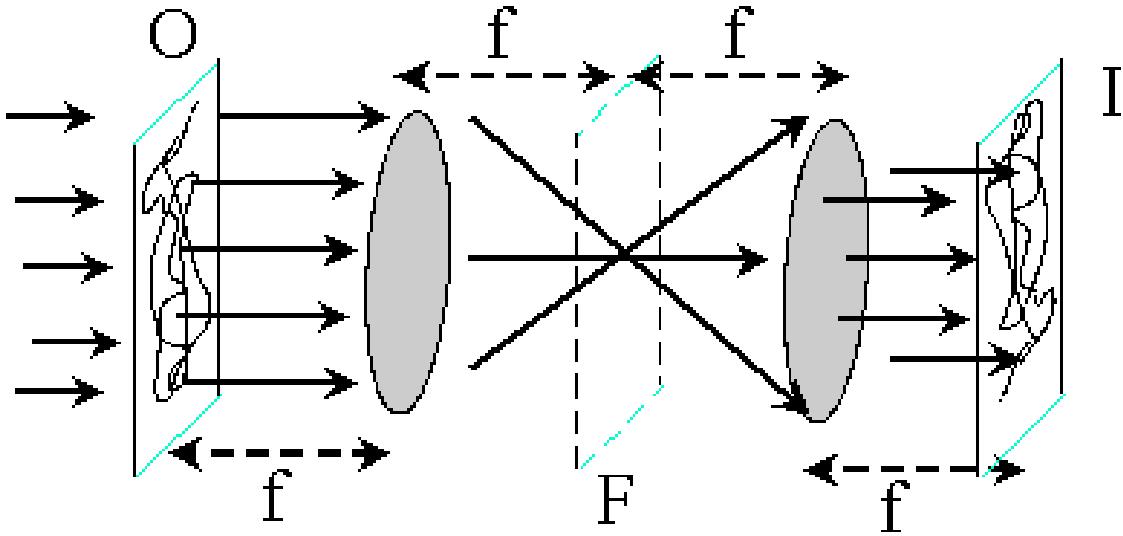


Figura 5.34: Dupla TF: O : plano objeto, F : plano de Fourier, I : plano imagem, f : distância focal

$$A \implies A \frac{F}{d} e^{-i \frac{k}{2d} (x_o^2 + y_o^2)} \quad (5.200)$$

$$(5.201)$$

e a onda U_o fica então assim

$$U_o(x_o, y_o) = \left[\frac{AF}{d} t_o(x_o, y_o) e^{-i \frac{k}{2d} (x_o^2 + y_o^2)} \right] \quad (5.202)$$

$$(5.203)$$

e na aproximação da difração de Fresnel resulta

$$U_F(x_F, y_F) = \frac{e^{i \frac{k}{2d} (x_F^2 + y_F^2)}}{i \lambda d} \times \quad (5.204)$$

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[U_o(x_o, y_o) e^{i \frac{k}{2d} (x_o^2 + y_o^2)} \right] P\left(x_o \frac{F}{d}, y_o \frac{F}{d}\right) e^{-i 2\pi (x_o \frac{x_F}{\lambda d} + y_o \frac{y_F}{\lambda d})} dx_o dy_o \quad (5.205)$$

e simplificando fica assim

$$U_F(x_F, y_F) = A \frac{F}{d} \frac{e^{i \frac{k}{2d} (x_F^2 + y_F^2)}}{i \lambda d} \times \quad (5.206)$$

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} t_o(x_o, y_o) P\left(x_o \frac{F}{d}, y_o \frac{F}{d}\right) e^{-i 2\pi (x_o \frac{x_F}{\lambda d} + y_o \frac{y_F}{\lambda d})} dx_o dy_o \quad (5.207)$$

que pode-se simbolizar como

$$U_F(\lambda df_x, \lambda df_y) = A \frac{F}{d} \frac{e^{i \frac{k}{2d} (x_F^2 + y_F^2)}}{i \lambda d} \left[\text{TF}\{t_o(x_o, y_o) P(x_o \frac{F}{d}, y_o \frac{F}{d})\} \right]_{f_x = \frac{x_F}{\lambda d}, f_y = \frac{y_F}{\lambda d}} \quad (5.208)$$

5.7.5 Dupla transformação de Fourier

A Fig.5.34 representa um esquema de dupla transformação de Fourier com o plano objeto no plano focal anterior da primeira lente sendo iluminado com luz paralela, a transformada de Fourier do objeto localizada no plano focal F e a

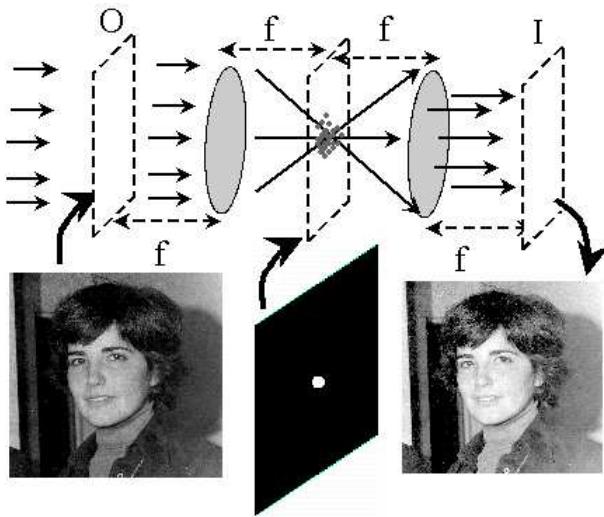


Figura 5.35: Um filtro no plano de Fourier permite passar apenas as freqüências espaciais mais baixas, resultando uma imagem “suavizada” ou seja com poucas linhas definidas.

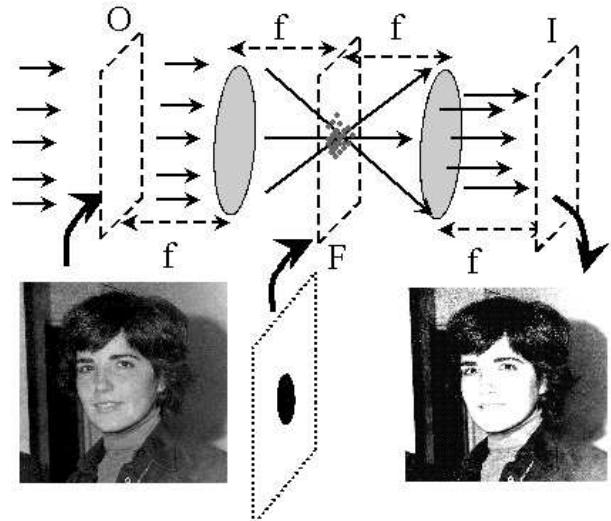


Figura 5.36: Um filtro no plano de Fourier bloqueia as freqüências espaciais baixas e deixa passar as maiores, resultando uma imagem com poucas nuances e contornos bem definidos.

transformada da transformada de Fourier no plano focal posterior da segunda lente e que representa a imagem (real e invertida) do objeto.

$$F = \text{TF}\{O\} \quad I(x, y) = \text{TF}\{F\} = \text{TF}\{\text{TF}\{O\}\} = O(-x, -y) \quad (5.209)$$

5.7.6 Processamento de imagens

Trata-se de modificar a imagem de um objeto por meio de manipulações de sua TF numa montagem de dupla TF. Um exemplo deste tipo de manipulação é o “suavizado” ou “endurecimento” de uma imagem; se eliminamos as altas freqüências espaciais (responsáveis pelas linhas de grande contraste) e ficamos apenas com as baixas, como ilustrado na Fig.5.35, ficaremos com uma imagem sem linhas definidas e com variações suaves. Por outro lado, se cortarmos as freqüências mais baixas e ficamos com as maiores, a imagem ficará com contornos muito definidos, isto é, mais “dura” como ilustrado na Fig.5.36.

Outro exemplo de processamento de imagens é a chamada multiplexação espacial, que é em tudo similar à que se faz no espaço temporal com sinais de radio e similares.

5.7.6.1 Multiplexing espacial

Podemos gravar imagens espacialmente moduladas ou codificadas, projetando simultaneamente o objeto junto com um retículo que ficará associado a esse objeto. Por exemplo, a Fig.5.37 mostra uma imagem $g_1(x, y)$ que foi gravada junto com uma rede retangular $\text{III}_1(x, y)$ resultando uma transmitância

$$t(x, y) = g_1(x, y) \text{III}_1(x, y) \quad (5.210)$$

cujo espectro de Fourier é

$$T(f_x, f_y) = G_1(f_x, f_y) * \text{III}_1(f_x, f_y) \quad (5.211)$$

onde

$$T(f_x, f_y) = \text{TF}\{t(x, y)\} \quad G_1(f_x, f_y) = \text{TF}\{g_1(x, y)\} \quad \text{III}_1(f_x, f_y) = \text{TF}\{\text{III}_1(x, y)\} \quad (5.212)$$

O espectro aparece ilustrado no plano “F” da Fig.5.37 e que representa espectros $G_1(f_x, f_y)$ repetidos, centrados nas deltas de Dirac que compõem o pente $\text{III}_1(f_x, f_y)$. Se deixamos passar (filtramos) apenas um desses espectros repetidos, obteremos a imagem de $g_1(x, y)$ sem a rede,

$$G_1 \text{III}_1 \Rightarrow \text{FILTRO} \Rightarrow g_1 \quad (5.213)$$

como representado na Fig.5.38. Podemos seguir gravando sucessivamente novas imagens com seus respectivos retículos

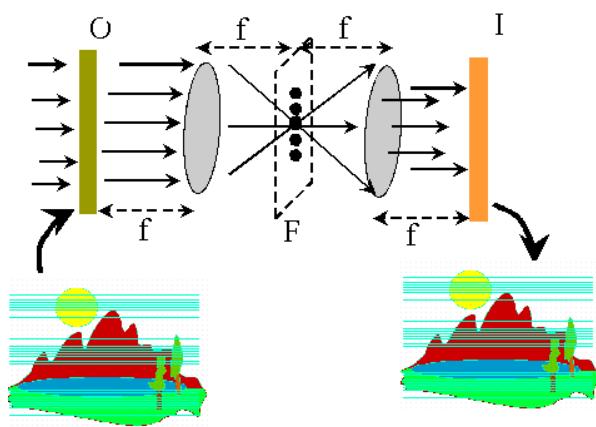


Figura 5.37: Imagem de uma foto modulada por uma rede, sem filtrar, produzida por uma montagem de dupla TF.

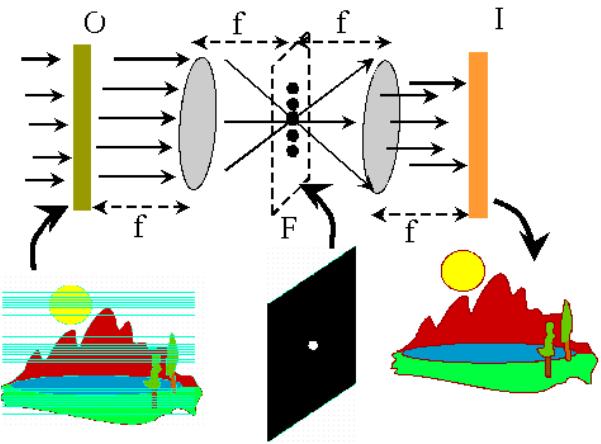


Figura 5.38: Imagem de uma foto modulada por uma rede, filtrada para deixar passar apenas uma das ordens no plano de Fourier.

(diferentes) resultando numa transmitância complexa da forma

$$t(x, y) = g_1(x, y) \text{III}_1(x, y) + g_2(x, y) \text{III}_2(x, y) + g_3(x, y) \text{III}_3(x, y) + \dots \quad (5.214)$$

e cujo espectro de Fourier está representado pela Eq.(5.215)

$$T(f_x, f_y) = G_1(f_x, f_y) * \text{III}_1(f_x, f_y) + G_2(f_x, f_y) * \text{III}_2(f_x, f_y) + G_3(f_x, f_y) * \text{III}_3(f_x, f_y) + \dots \quad (5.215)$$

A Fig.5.41 ilustra o caso de duas imagens com suas respectivas redes no plano objeto, sendo filtradas na ordem zero,

$$G_1 \text{III}_1 + G_2 \text{III}_2 \Rightarrow \text{FILTRO}_0 \Rightarrow g_1 + g_2 \quad (5.216)$$

em cujo caso no plano imagem aparecem as duas imagens $g_1(x, y)$ (casa) e $g_2(x, y)$ (paisagem) superpostas, sem as redes. A Fig.5.40 ilustra o caso em que o filtro deixa passar apenas uma das ordens horizontais (fora do zero) que está associada à rede que modula a imagem $g_1(x, y)$,

$$G_1 \text{III}_1 + G_2 \text{III}_2 \Rightarrow \text{FILTRO}_1 \Rightarrow g_1 \quad (5.217)$$

e por isso apenas essa imagem aparece no plano de saída. Caso similar ocorre com a Fig.?? que ilustra o caso em que o filtro seleciona uma das ordens verticais (fora de zero) que está associada à rede que modula a imagem $g_2(x, y)$,

$$G_1 \text{III}_1 + G_2 \text{III}_2 \Rightarrow \text{FILTRO}_2 \Rightarrow g_2 \quad (5.218)$$

e por isso apenas essa imagem $g_2(x, y)$ aparece na saída.

Podemos seguir gravando imagens sucessivamente, cada uma delas com sua própria rede, com a condição de que cada rede esteja differentemente orientada ou tenha mesma orientação mas período diferente, para poder filtrar (separar) os diferentes espectros.

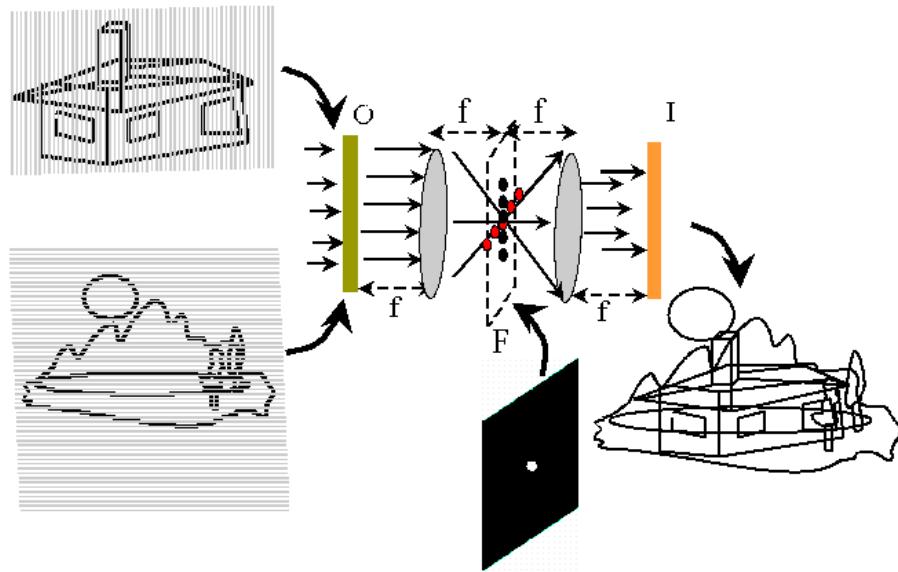


Figura 5.39: Duas imagens multiplexadas, com filtro no plano de Fourier que deixa passar apenas a ordem zero.

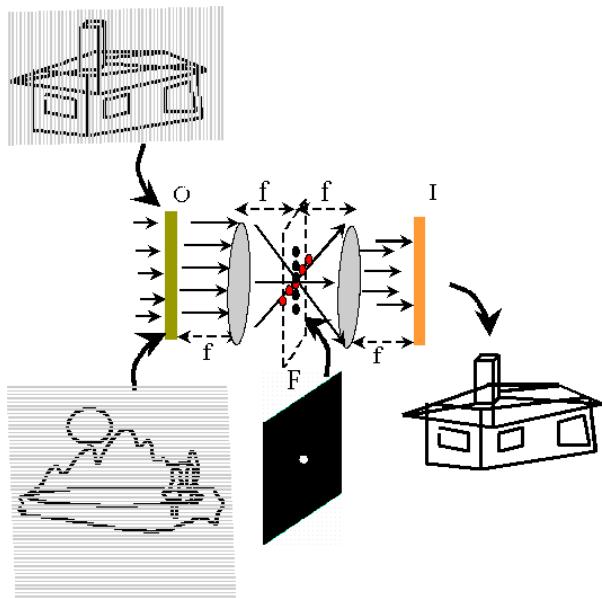


Figura 5.40: Duas imagens multiplexadas, com filtro no plano de Fourier que deixa passar apenas uma das ordens (não zero) horizontais.

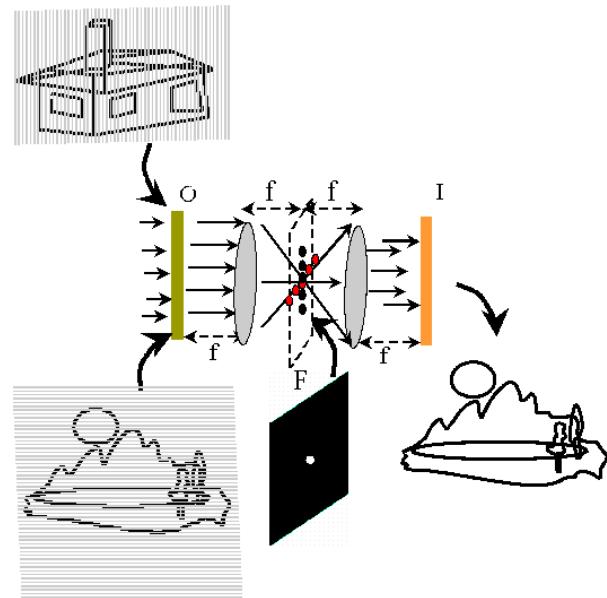


Figura 5.41: Duas imagens multiplexadas, com filtro no plano de Fourier que deixa passar apenas uma das ordens (não zero) verticais.

5.8 Problemas

5.8.1 Difração por um orificio circular

A mancha de luz (comprimento de onda λ) produzida pela difração num orifício circular de diâmetro D , na aproximação de Fraunhofer, observada num plano à distância L , é a conhecida “figura de Airy” formada por um conjunto de anéis concêntricos.

- Para o caso de um pequeno orifício com $D = 100\mu m$, $L = 1m$ e $\lambda = 0.633\mu m$, calcule o raio do primeiro anel escuro.
R: 7.7 mm
- Como será a mancha de difração para o caso de uma lâmina de vidro, perfeitamente transparente, sobre cuja superfície depositei uma micro-gota metálica de $100\mu m$ de diâmetro. Se existe alguma dimensão característica na figura de difração, calcule o seu valor.
R: mesma figura de Airy que para o caso anterior.
- Como ficaria essa mancha de difração se em lugar de uma, fosse um conglomerado dessas gotas, idênticas, discreta e aleatoriamente distribuídas sobre a lâmina.
R: mesma figura de Airy que para o caso anterior, com a intensidade multiplicada pelo número de gotas que efetivamente contribuem para a difração.

5.8.2 Fibra óptica monomodo

Uma fibra óptica monomodo (apenas um modo transversal se propaga nela) para luz de $\lambda = 600 nm$, tem um diâmetro efetivo de 3 a $3.4 \mu m$ e uma abertura numérica (determinada pelo ângulo de reflexo ao total da interfase “core-cladding”) $NA = \sin \theta \approx 0.16$, onde θ representa o maior ângulo de entrada da luz na fibra para que ela se propague. Quero acoplar nessa fibra, luz de um laser de $\lambda = 633 nm$ com distribuição gaussiana e^{-r^2/a^2} sendo $a = 0.25 mm$.

	f (mm)	D (mm)	NA
L-6X	40	8	0.1
L-15X	16	8	0.15
L-50X	5	3	0.30
L-65X	3.8	4	0.55

- Qual das objetivas de microscópio da lista ao lado será a melhor escolha para o acoplamento? Lembre que numa lente $NA \approx D/(2f)$ onde f é a distância focal e D é o diâmetro iluminado na pupila da lente, que nem sempre corresponde à propria pupila da lente.
RESPOSTA: a objetiva L-65X.
- Como melhorar o acoplamento?
RESPOSTA: Iluminando a pupila toda da lente

5.8.3 Difração por um arranjo ordenado de microfuros

Supondo que a Fig.17.2 esteja numa escala de 1:1,

- escreva a expressão matemática da estrutura difratante
RES.:

$$t(x, y) = \left[\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \otimes \text{III}(x/\Delta_x, y/\Delta_y) \right] \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{D}\right) \quad (5.219)$$

R raio dos furinhos, D raio da área iluminada, Δ_x e Δ_y espaçamentos dos furinhos nas coordenadas x e y respectivamente.

- calcule o espaçamento dos furinhos, nas duas coordenadas no plano da microestrutura difratante
RES.: A expressão da amplitude difratada será

$$T(f_x, f_y) = \Delta_x \Delta_y RD \left[\frac{J_1(\pi 2R \sqrt{f_x^2 + f_y^2})}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \text{III}(\Delta_x f_x, \Delta_y f_y) \right] \otimes \quad (5.220)$$

$$\left[\frac{J_1(\pi 2D \sqrt{f_x^2 + f_y^2})}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \right] \quad (5.221)$$

O espaçamento dos furinhos medidos no plano de difração foi de $\Delta\xi = 9mm$ e então

$$\Delta_x = \lambda z / \Delta\xi = 0.633 \times 10^{-6} / (9 \times 10^{-3}) \approx 70\mu m \quad (5.222)$$

- calcule o diâmetro ($2R$) médio dos furinhos na estrutura
O raio do primeiro anel escuro observado no plano de difração vale 6mm pelo que

$$2R\rho = 2R \frac{\Delta r}{\lambda z} = 1.22 \quad 2R = 1.22 \lambda z / \Delta r = 1.22 \frac{0.633 \times 10^{-6} \cdot 1}{6 \times 10^{-3}} \approx 129\mu m \quad (5.223)$$

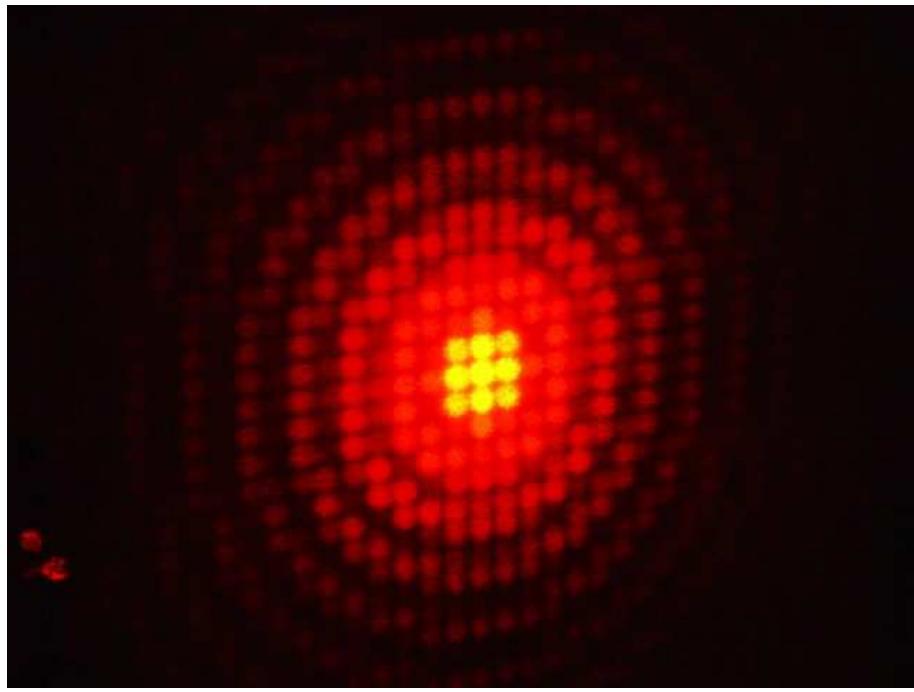


Figura 5.42: Difração de um arranjo ordenado de microfuros numa lâmina metálica, iluminada com um feixe laser ($\lambda = 633\text{nm}$) direto e observada numa tela 100cm de distância.

NOTA: Os primeiros mínimos da função de Bessel de ordem 1 são:

$$J_1(\pi x) = 0 \quad x = 1.22, 2.23, 3.24\dots \quad (5.224)$$

5.8.4 Microscópio

Um microscópio tem uma objetiva de 5mm de distância focal e uma abertura de 8mm de diâmetro no plano principal de saída. Qual é o objeto de menor tamanho que vou poder observar com ele, supondo que as lentes são perfeitas e que estou apenas limitado pela difração? Podemos supor que o objeto observado fica praticamente no plano focal da objetiva.

RESPOSTA: raio do objeto $\approx 0.4\mu\text{m}$.

5.8.5 Difração por uma rede de amplitude senoidalmente modulada

Na aproximação de Fraunhofer, calcule a luz difratada (intensidade), observada à distância L , por uma onda plana (comprimento de onda λ) de amplitude A , incidindo normalmente sobre uma rede de transmitância em amplitude $t(x)$.

- Para o caso da transmitância valer:

$$t(x) = 1 + 0.2 \cos(2\pi f_o x) \quad (5.225)$$

RESPOSTA:

Podemos escrever

$$\cos(2\pi f_o x) = \frac{e^{i2\pi f_o x} + e^{-i2\pi f_o x}}{2} \quad (5.226)$$

$$t(x) = 1 + 0.05 e^{i2\pi f_o x} + 0.05 e^{-i2\pi f_o x} \quad (5.227)$$

O espectro angular de onda planas correspondente à $At(x)$ é a amplitude da onda plana incidindo normalmente sobre a transmitância $t(x)$ é

$$T(f) = A\delta(f) + 0.05A\delta(f - f_o) + 0.05A\delta(f + f_o) \quad f \equiv \alpha/\lambda \quad (5.228)$$

onde α é o coseno diretor, do vetor propagação \vec{k} , na direção do eixo x . A Eq.(5.228) indica que ao passar pela rede de amplitude aparecem 3 ondas apenas, uma transmitida e duas com cosenos diretores α e $-\alpha$. As intensidades observadas no plano de difração terão então as intensidades relativas: A^2 para a central e $(0.05A)^2$ para cada uma das duas laterais.

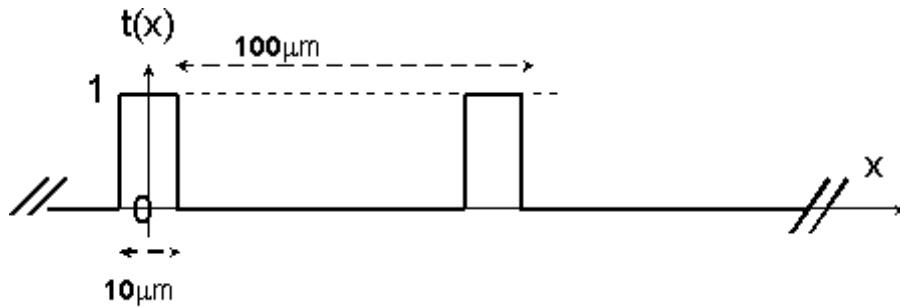


Figura 5.43: Rede de transmissão

2. O que muda para o caso da rede estar deslocada em x_o assim:

$$t(x) = 1 + \cos(2\pi f_o(x - x_o)) \quad (5.229)$$

RESPOSTA:

Nesse caso a intensidade não muda pois o novo espectro angular de onda planas fica agora assim:

$$T(f) = A\delta(f) + 0.05A\delta(f - f_o)e^{i2\pi fx_o} + 0.05A\delta(f + f_o)e^{-i2\pi fx_o} \quad (5.230)$$

e a exponencial desaparece ao se calcular o módulo para calcular a intensidade.

5.8.6 Transmitância retangular de amplitude: rede de fendas

Com um feixe laser ($\lambda = 500\text{nm}$) de $2R = 0.5\text{ mm}$ de diâmetro, ilumino perpendicularmente uma rede de difração em amplitude (somente a amplitude da onda é afetada mas não a fase) cujo período vale $\Delta = 100 \mu\text{m}$ e as fendas transparentes têm largura $D = 10 \mu\text{m}$, como ilustrado na Fig.5.43 onde "1" significa "transmissão total" e "0" significa "transmissão nula". Imediatamente depois da rede, e ao lado dela, coloco uma lente de 10cm de distância focal e observo a mancha de difração da rede numa tela colocada exatamente no plano focal da lente.

1. Escreva a expressão matemática da transmitância complexa dessa rede
RESPOSTA:

$$t(x) = \text{circ}(r/R) [\text{III}(x/\Delta) * \text{rect}(x/D)] \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.231)$$

2. De que depende a separação espacial das ordens de difração na tela? Calcule essa separação.

RESPOSTA:

Depende do período da rede, isto é de Δ

$$\text{TF}\{f(x)\} = \text{TF}\{\text{circ}(x/R)\} * [\Delta D \text{III}(f_x D) \cdot \text{sinc}(Df_x)] \quad (5.232)$$

A separação entre ordens de difração vale

$$\Delta f_x = 1 \quad f_x = \frac{\xi}{\lambda F} \quad (5.233)$$

$$\text{periodo: } \xi = \lambda F / \Delta = 0.510 / 100 = 0.05\text{cm} \quad (5.234)$$

3. A intensidade das ordens de difração observadas na tela não é constante e é maior para a ordem zero. Por que?
RESPOSTA:

Por causa da largura das fendas da rede. Quem determina a relação de intensidades das diferentes ordens é a função $\text{sinc}(f_x)$ na Eq.(5.232) que é máxima justamente para $f_x = 0$, a ordem central.

4. Calcule a relação matemática entre as intensidades da primeira ordem e a ordem zero de difração.
RESPOSTA:

$$I(0) \propto \text{sinc}(0) \quad I(1) \propto \text{sinc}(D/\Delta) \quad (5.235)$$

$$I(1)/I(0) = \left[\frac{\sin(\pi 10/100)}{\pi 10/100} \right]^2 \approx 0.67 \quad (5.236)$$

5. Por que o diâmetro das manchas luminosas das diferentes ordens de difração não são pontinhos infinitamente finos? Ou seja, de que depende o diâmetro desses "pontos"?

RESPOSTA:

Depende da área da rede iluminada. Em termos matemáticos depende da função $\text{TF}\{\text{circ}(r/R)\}$ na Eq.5.232.

6. Calcule o diâmetro das manchas luminosas das ordens de difração

RESPOSTA:

O raio das manchas das ordens de difração depende de

$$\text{TF}\{\text{circ}(r/R)\} = R \frac{J_1(2\pi R\rho)}{\rho} \quad (5.237)$$

cujo primeiro anel escuro tem um raio que se calcula do primeiro zero da função acima e que vale

$$2\pi R\rho = 2\pi R \frac{r_0}{\lambda F} = \pi 1.22 \quad r_0 = 1.22 \frac{\lambda F}{2R} = 1.22 \frac{0.5 \times 10}{2 \times 0.05} = 61 \mu\text{m} \quad (5.238)$$

5.8.7 Poder de resolução de uma rede de difração

As redes de difração são usadas frequentemente em espectrómetros e espectrofotómetro para separar linhas espetrais. Duas linhas espetrais próximas λ_1 e λ_2 podem ser separadas (conventionalmente) se a separação ($\Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|$) entre elas é igual ou maior que a largura dos picos da cada linha. Supondo que a largura dos picos seja devida exclusivamente à difração pela rede de difração utilizada, e definindo o "poder de resolução" R de uma rede como

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad \lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \quad (5.239)$$

prove que R pode ser calculado como

$$R = nN \quad (5.240)$$

onde n é a ordem de difração utilizada, da rede, e N é o número total de períodos (linhas gravadas) na rede.

5.8.8 Difração de Fresnel

Uma onda ($\lambda=633\text{nm}$) plana incide normalmente sobre uma lente convergente de diâmetro $D=10\text{cm}$ e distância focal $F=100\text{cm}$. Uma transparência formada por uma abertura retangular com dimensões $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ (eixos x e y respectivamente, perpendiculares à direção de propagação da luz) e contendo uma figura com transmitância:

$$t(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \frac{x}{\Delta}) \quad (5.241)$$

é colocada a meio caminho entre a lente e seu plano focal anterior. Na aproximação de Fresnel e para $\Delta=0.1\text{mm}$, calcule:

- o número de manchas distintamente visíveis no plano focal
- RESP.: 3
- a separação entre essas manchas
- RESP.: 6.4mm
- o tamanho dessas manchas
- RESP.: largura total de $126\mu\text{m}$

5.8.9 Espectro angular de ondas planas

Uma onda plana incide perpendicularmente numa chapa opaca com um furinho circular transparente de $10\mu\text{m}$ de diâmetro.

1. Calcule o espectro angular de ondas planas dessa onda antes de incidir na chapa

RESPOSTA:

Antes de incidir na chapa e difratar, a onda é

$$e^{ikz} \quad (5.242)$$

cujo espectro de ondas planas é

$$A(f_x, f_y) = e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{x\alpha}{\lambda} + \frac{y\beta}{\lambda})} dx dy \quad (5.243)$$

$$\propto \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (5.244)$$

2. Calcule o espectro angular de ondas planas da onda do outro lado do furinho.

RESPOSTA:

A amplitude complexa depois do furo fica assim

$$e^{ikz} \text{circ}(r/R) = e^{ikz} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) \quad (5.245)$$

e seu espectro de ondas planas fica assim

$$A(f_x, f_y) = e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) e^{-i\left(\frac{x\alpha}{\lambda} + \frac{y\beta}{\lambda}\right)} dx dy \quad (5.246)$$

$$\propto \text{TF}\left\{\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)\right\} = R \frac{J_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} 2R\pi/\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/\lambda} \quad (5.247)$$

3. Existe alguma direção (angular) na qual não se propaga onda plana alguma depois do furinho? Quanto vale essa direção?

RESPOSTA:

Sim, para a direção

$$J_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} 2R\pi/\lambda) = 0 \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} 2R/\lambda = 1.22 \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1.22 \frac{\lambda}{2R} \quad (5.248)$$

$$\text{DICA: } \text{TF}\{\text{circ}(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} \quad \text{TF}\{\text{circ}(Ar)\} = \frac{1}{|A|^2} \frac{J_1(2\pi r/A)}{r/A} \quad (5.249)$$

5.8.10 Aberturas complementares

- Represente a expressão matemática da transmitância
 - a) de um cabo esticado, de 100mm de comprimento por 0.01mm de largura.
RESPOSTA: $t(x) = (1 - \text{rect}(x/X))(1 - \text{rect}(y/Y)) \quad Y = 100\text{mm} \quad X = 0.01\text{mm}$.
 - b) de uma fenda transparente das mesmas dimensões
RESPOSTA: $t(x) = \text{rect}(x/X)\text{rect}(y/Y) \quad Y = 100\text{mm} \quad X = 0.01\text{mm}$.
 - Descreva a expressão matemática da mancha de difração de uma luz uniforme de $\lambda = 500$ nm passando
 - a) pelo cabo
RESPOSTA: $T(f) = (\delta(f_x) - \text{sinc}(Xf_x))(\delta(f_y) - \text{sinc}(Yf_y)) \quad f_x = \frac{\xi}{\lambda L} \quad f_y = \frac{\eta}{\lambda L}$
 $L=1\text{ m}$, ξ e η coordenadas no plano da parede.
 - b) pela fenda
RESPOSTA: $T(f) = \text{sinc}(Xf_x)\text{sinc}(Yf_y)$
- projetada na parede, a 1 metro dos objetos.

Capítulo 6

Holografia e Introdução à Teoria da Informação

6.1 Introdução

A Holografia [9, 11] é basicamente uma técnica que permite registrar tanto a amplitude quanto a fase de uma onda luminosa, e dessa forma todas as características da onda ficam gravadas. É bom lembrar que todos os foto-detectores (incluindo o olho humano) assim como as placas fotográficas, são detectores quadráticos, isto é, que detectam a média quadrática do módulo do vector de Poynting (ou seja a “intensidade”) que depende apenas da amplitude da onda luminosa. Ao registrar a luz nesses dispositivos então, a informação sobre a fase é definitivamente perdida. Como a holografia registra (e permite reconstruir) tanto a amplitude quanto a fase, todas as características da onda ficam preservadas e o observador percebe a onda como se estivesse em presença do próprio objeto que a emitiu.

A relação que existe entre a Holografia e a Teoria da informação, deve-se ao fato de que aquela proporciona a técnica mais eficiente de armazenar informações opticamente, na forma de múltiplos hologramas gravados no volume de um material fotossensível adequado.

neste capítulo estudaremos a teoria de amostragem de imagens e sinais, calcularemos a quantidade de informação contida em imagens e estudaremos a resposta finita de sistemas, tanto para sinais temporais como espaciais.

6.2 Holografia

Nesta seção descreveremos rapidamente o que é, como se produz e quais as propriedades fundamentais de um holograma.

6.2.1 Elementos matemáticos

Seja uma onda harmônica plana, com cossenos diretores α, β e γ representada na forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U_o e^{i2\pi(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y + \frac{\gamma}{\lambda}z) - i\omega t} \\ &= U(x, y) e^{i2\pi\frac{\gamma}{\lambda}z - i\omega t} \quad \text{fasor complexo: } U(x, y) = U_o e^{i2\pi(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

A onda supõe-se propagar-se ao longo do eixo z e o fasor complexo na Eq.(6.1) descreve apenas sua dependência espacial no plano $x - y$. Estamos interessados apenas nesse fasor, já que as dependências em z e t estão implícitas e por isso podem ser omitidas. A Fig.6.1 representa o vector propagação \vec{k} referente ao fasor complexo da Eq.(6.1), assim como para sua onda conjugada $\bar{U}(x, y)$.

Na Fig.6.2 está representada uma onda cilíndrica divergente, mostrando os vetores propagação e os correspondentes cossenos diretores em dois pontos no eixo x , assim como sua onda conjugada, que de fato representa uma onda cilíndrica convergente.

Para o caso mais geral de uma onda de forma qualquer (sempre harmônica), ela pode ser sempre representada pelo seu espectro angular de onda planas (vide sec.5.4.2) $A(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y)$:

$$U(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}$$

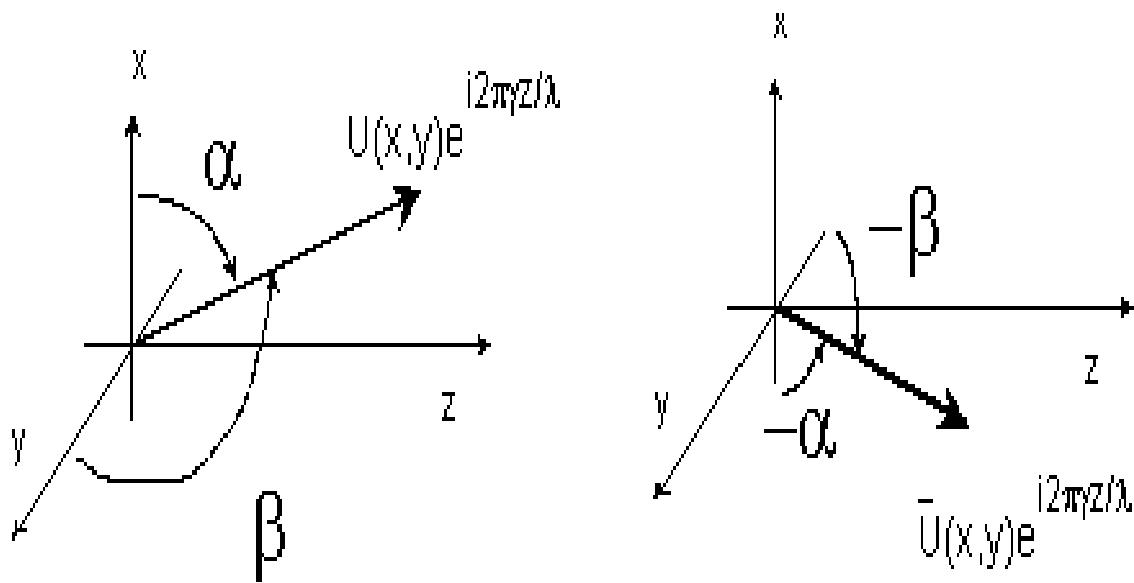


Figura 6.1: Representação gráfica do vetor propagação da onda plana cujo fasor complexo está descrito na Eq.(6.1) (à esquerda) e para o caso (à direita) do fasor complexo o conjugado daquela.

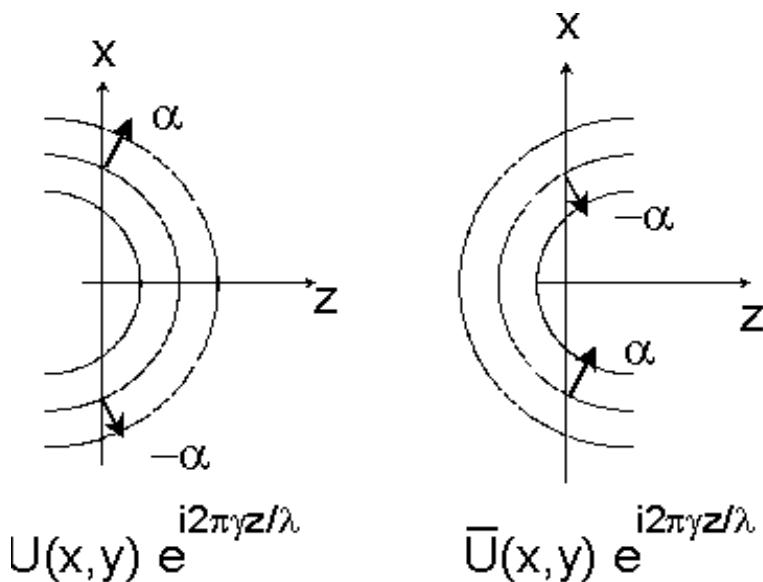


Figura 6.2: Onda cilíndrica com a forma $U(x,y) e^{i2\pi \frac{z}{\lambda}}$ (à esquerda) a onda com fasor conjugado $\bar{U}(x,y)$ (à direita), mostrando o vetor de propagação e o correspondente cosseno diretor para dois pontos sobre o eixo x.

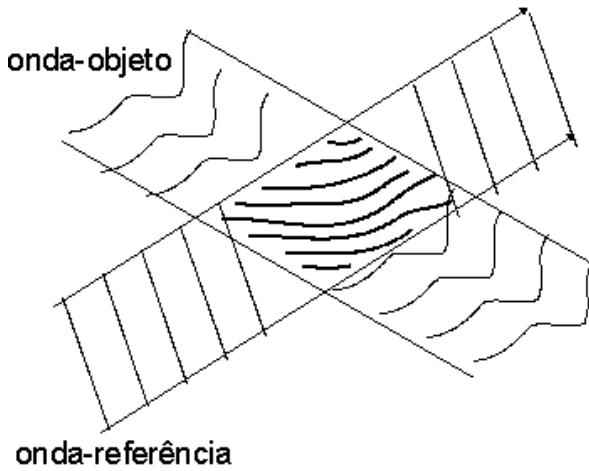


Figura 6.3: Franjas brilhantes e escuras produzidas pela interferência da luz

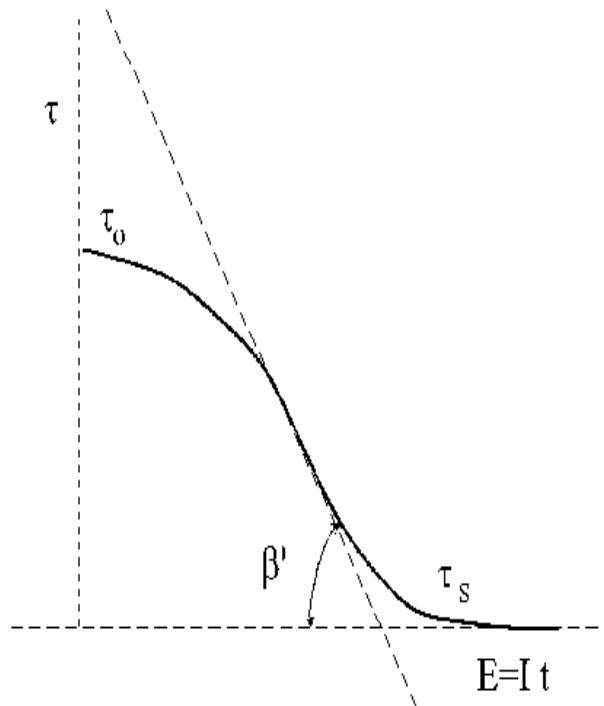


Figura 6.4: Curva característica da transmitância de uma placa fotográfica positiva, após revelada e fixada

e sua onda conjugada será então

$$\bar{U}(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right) e^{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}$$

6.2.1.1 Franjas de interferência

Sejam os fasores complexos da onda “objeto” e “referência” que escreveremos respectivamente assim

$$\begin{aligned} O(x, y) &= o(x, y) e^{i\phi_o(x, y)} & o(x, y) &\equiv |O(x, y)| \\ R(x, y) &= r(x, y) e^{i\phi_r(x, y)} & r(x, y) &\equiv |R(x, y)| \end{aligned}$$

No volume do espaço onde essas ondas se superpõem, elas interferem formando franjas brilhantes e escuras como esquematizado no desenho da Fig.6.3. A intensidade resultante será

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |O(x, y) + R(x, y)|^2 \\ &= |O|^2 + |R|^2 + O\bar{R} + \bar{O}R \\ &= |O|^2 + |R|^2 + 2o(x, y)r(x, y) \cos(\phi_o(x, y) - \phi_r(x, y)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

É interessante notar que o último termo na Eq.(6.3) contém todas as informações necessárias sobre as ondas: amplitudes ($o(x, y)$ e $r(x, y)$) e fases ($\phi_o(x, y)$ e $\phi_r(x, y)$). As primeiras determinam a modulação das franjas de interferência, enquanto que as segundas determinam o período e orientação dessas franjas. Ao gravar-se esse padrão de franjas numa placa fotográfica, todas as informações relevantes sobre as duas ondas ficam também registradas.

6.2.2 Material de Registro

O padrão de franjas acima referido pode ser gravado numa simples placa fotográfica, num cristal fotorrefrativo, num termoplástico, ou em qualquer outro material fotossensível que sofra qualquer modificação nas suas propriedades ópticas sob ação da luz. Esses materiais têm, em geral, respostas não lineares mas sob determinadas condições eles podem responder linearmente. Podemos estudar o caso mais simples: a placa fotográfica. Após exposta à luz, revelada e fixada,

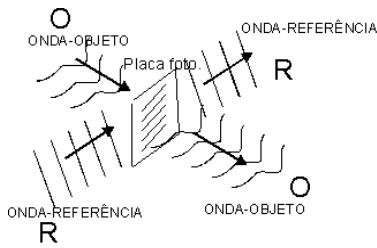


Figura 6.5: Gravação de um holograma numa placa fotográfica, fazendo a interferência da onda objeto $O(x, y)$ com uma onda de referência $R(x, y)$

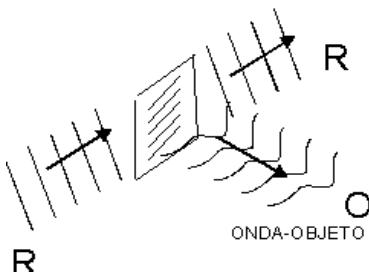


Figura 6.6: Holograma iluminado pela onda $B(x, y) = R$

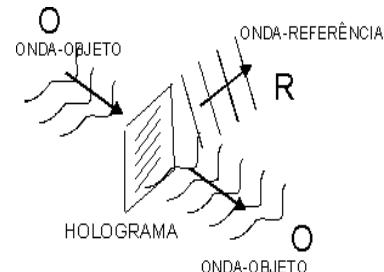


Figura 6.7: Holograma iluminado pela onda $B(x, y) = O$

sua transmitância (τ) depende não-linearmente da quantidade de energia luminosa ($I \times t$) recebida, que transforma os íons de prata em prata metálica, opaca. Sua transmitância é aproximadamente como representada na Fig.6.4 onde aparece um valor máximo τ_0 para a placa virgem e seu valor saturado $\tau_S \approx 0$. A porção linear da curva pode ser representada por

$$\tau_\ell(x, y) = \tau(0) - \beta' I \times t = \tau(0) - \beta I$$

Substituindo I acima pela sua expressão em Eq.(6.2), resulta

$$\tau_\ell(x, y) = \tau(0) - \beta(|O|^2 + |R|^2) - \beta O \bar{R} - \beta \bar{O} R \quad (6.4)$$

6.2.3 Registro e leitura de um holograma

Uma vez o padrão de interferência gravado na placa e esta fixada, sua transmitância complexa fica da forma descrita na Eq.(6.4). Se essa placa é recolocada na sua posição original e iluminada com uma luz de fasor complexo $B(x, y)$, a luz transmitida tem a forma

$$B(x, y)\tau(x, y) = (\tau_0 + \beta(|O|^2 + |R|^2)) B + \quad (6.5)$$

$$+ \beta \bar{O} R B + \quad (6.6)$$

$$+ \beta O \bar{R} B \quad (6.7)$$

Se a onda B é exatamente a onda de referência R ($B \equiv R$) utilizada na gravação do holograma, o termo em Eq.(6.7) fica da forma

$$\beta O \bar{R} R = \beta O |R|^2 \propto O \quad (6.8)$$

ou seja, que além da luz transmitida, aparece uma outra onda por trás da placa, que é proporcional à onda objeto O , como ilustrado na Fig.6.6. Por outro lado, se iluminamos o holograma com uma onda igual à onda objeto, como ilustrado na Fig.6.7, o termo na Eq.(6.6) fica assim

$$\beta O^* R O \propto R \quad (6.9)$$

o que representa a onda R .

Se iluminamos ainda o holograma com uma onda conjugada da referência (R^*), o termo em Eq.(6.7) fica agora assim

$$\beta \bar{O} R \bar{R} = \beta \bar{O} |R|^2 \propto \bar{O}$$

que representa a imagem real do objeto, como ilustrado na Fig.6.8.

6.2.4 Propriedades

Os hologramas têm propriedades particulares que os fazem interessantes como ferramentas para processamento de imagens e como meio de armazenamento de informações (memórias ópticas). Essas propriedades são a “associatividade”, a “distributividade” e a “perspectividade”, que detalharemos a seguir.

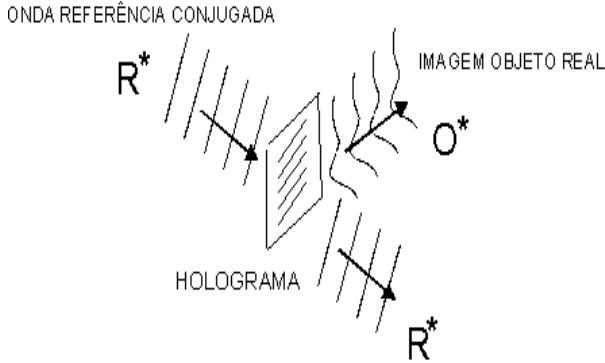


Figura 6.8: Reconstrução holográfica utilizando a onda referência conjugada R^*

6.2.4.1 Perspectividade

Trata-se apenas da possibilidade de observar o objeto reconstruído pelo holograma, desde diferentes ângulos, sempre limitado pelo tamanho da placa fotográfica contendo o holograma, que funciona de todo ponto de vista como se fosse uma “janela” de observação. De fato, ao observar a reconstrução holográfica de um objeto, estamos observando a própria frente de onda gerada pelo objeto e não apenas o objeto, como seria o caso de uma simples fotografia. Observar a frente de onda significa poder se colocar em diferentes ângulos de perspectiva para observar o objeto, exatamente como ocorreria na presença do próprio objeto.

6.2.4.2 Associatividade

As Fig.6.6 e Fig.6.7 ilustram a chamada associatividade característica dos hologramas: a presença de uma das ondas (seja R) “chama” ou fica associada à outra onda (no caso O) presentes durante a gravação, e vice-versa. Essas duas ondas R e S estão então mutuamente associadas por meio do holograma que elas geraram.

6.2.4.3 Distributividade

Essa propriedade está ilustrada na Fig. (6.9) onde se mostra que, diferentemente do que ocorre com uma fotografia convencional onde cada parte da fotografia comtem uma parte da informação do objeto, a informação do objeto está distribuída no holograma todo. Assim, se parte da fotografia é destruída, parte da informação sobre o objeto também será perdida. Não é o caso do holograma onde a destruição de uma parte dele não resulta em perda de informação sobre alguma parte do objeto pois a informação está distribuída no holograma todo. Apenas a qualidade ou resolução do holograma fica prejudicada proporcionalmente à percentagem da área do holograma destruído. Isso é devido ao fato que a largura da mancha de difração (que determina a resolução óptica) fica maior por força da relação de incerteza na Eq.(B.30) formulada no plano espacial. Também a perspectiva na observação do holograma fica reduzida por causa da diminuição do tamanho da “janela” de observação.

6.2.5 Não linearidade e ruído de intermodulação

Os materiais fotossensíveis não são em geral lineares [12] e por esse motivo a Eq.(6.4) é apenas uma aproximação. Numa primeira aproximação, a transmitância pode ser escrita assim:

$$\tau(x, y) = \tau_o - \beta I - \beta_2 I^2 \quad (6.10)$$

onde o segundo termo representa a não linearidade do material. A Eq.(6.4) deve então ser reescrita assim:

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \tau_o - \beta(|O|^2 + |R|^2 + O\bar{R} - \beta\bar{O}R) - \\ &+ \beta_2 ((|O|^2 + |R|^2)^2 + 2|S|^2|R|^2 + RR\bar{S}\bar{S} + SS\bar{R}\bar{R} + 2(|R|^2 + |O|^2)(R\bar{S} + S\bar{R})) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ao se reconstruir o holograma com a onda de referência R , o termo que representa a onda objeto reconstruída, em lugar da formulação da Eq.(6.8), fica então da forma:

$$\text{onda objeto reconstruída: } = (\beta + \beta_2(|R|^2 + |O|^2)) OR\bar{R} \quad (6.12)$$

$$= \beta|R|^2O + \beta_2(|R|^2 + |O|^2)O \quad (6.13)$$

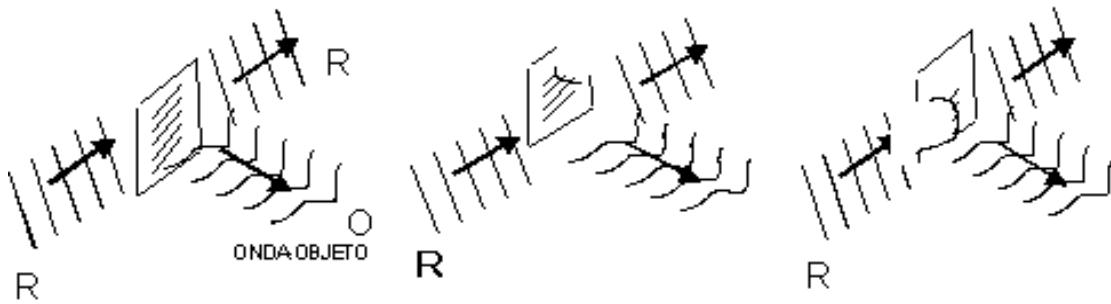


Figura 6.9: *DISTRIBUTIVIDADE:* A figura da esquerda mostra a reconstrução holográfica de um objeto. As figuras do meio e da direita mostram a reconstrução da mesma onda objeto, obtida por frações da placa holográfica, sem que nenhuma parte da onda objeto seja perdida. Apenas ocorrerá uma deterioração da qualidade da reconstrução.

onde o segundo termo à direita representa a deformação, na onda objeto reconstruída, devida à não linearidade do material de registro. Podemos definir um coeficiente

$$RSR_{\text{im}} = \frac{\beta}{\beta_2(1 + |O|^2/|R|^2)} \quad (6.14)$$

que representa a relação sinal-ruído de intermodulação apesar de não se tratar de um ruído pois não tem em absoluto o caráter aleatório dos ruidos. A intermodulação afeta muito negativamente o armazenamento de mais de uma imagem no mesmo material de registro, um processo chamado de “multiplexing espacial”, pois este defeito faz que cada imagem reconstruída carregue um “fantasma” das outras imagens.

6.2.6 Holografia dinâmica

A maioria dos problemas que limitam a utilização ampla das técnicas holográficas têm sua origem no material de registro que, sendo a placa fotográfica tradicional, faz o processo todo muito complicado e demorado. O uso de cristais fotorrefrativos no lugar das placas resolve quase todos os problemas nesta área.

6.2.6.1 Materiais fotorrefrativos

Os materiais fotorrefrativos são fotocondutores e eletro-ópticos [13, 14, 15] que sob influência da luz de comprimento de onda adequado, excitam portadores de carga a partir de centros fotoativos (doadores) no “band-gap” do material. Esses portadores se movem por difusão ou sob ação de um campo elétrico externamente aplicado, e são re-atrapados em centros ativos vacantes (armadilhas ou “traps”) em outras regiões do material. Se o material é iluminado com uma luz espacialmente modulada, elétrons (por exemplo) se acumulam nas regiões mais escuradas (onde a taxa de fotogeração é menor) a partir das regiões mais iluminadas. Esta redistribuição de cargas no volume do material produz um desbalanceamento local (acompanhando a modulação da luz) de carga elétrica e por esse motivo aparece uma modulação espacial de campo elétrico apartir da conhecida lei de Gauss

$$\nabla \cdot (\epsilon \epsilon_0 \vec{E}_{\text{SC}}) = \rho \quad \nabla = \vec{i} \partial / \partial x + \vec{j} \partial / \partial y + \vec{k} \partial / \partial z \quad (6.15)$$

onde ϵ é a constante dielétrica, ϵ_0 é a permitividade dielétrica do vácuo e ρ é a densidade volumétrica de carga. Pelo efeito eletro-óptico (conhecido também como efeito “Pockels”[16]) destes materiais, esse campo produz uma variação local de índice segundo a expressão

$$\Delta n = -n^3 r_{\text{eff}} E_{\text{SC}} / 2 \quad (6.16)$$



Figura 6.10: Cristais fotorrefrativos de $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ crescidos por J.C. Launay na Universidade de Bordeaux, França: dopado com Fe (à esquerda), dopado com Cr (embaixo) e não dopado (à direita)

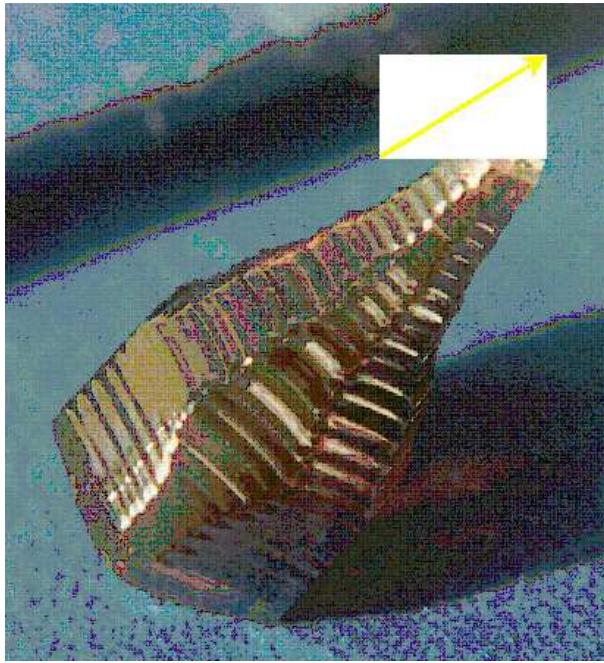


Figura 6.11: Cristal de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ bruto, crescido por J.F. Carvalho, no IFUFG, Goiânia-GO



Figura 6.12: Cristais de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ e $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ crescidos por J.F. Carvalho, no IFUFG, Goiânia-GO, em diversos estágios de preparação.

onde n é o índice médio e r_{eff} é o coeficiente eletro-óptico efetivo. Desta forma qualquer informação (modulação espacial) luminosa projetada sobre o cristal será convertida numa modulação volumétrica correspondente, de índice de refração como mostrado nas Figs.6.13 e 6.14 (extraídas de [14, 15]).

No caso particular do padrão de franjas luminosas produzidas pela interferência de uma onda-objeto e uma onda-referência, quando projetadas sobre o cristal, produzem nele um holograma em volume que pode ser lido usando a própria onda-referência. Assim duas ondas aparecem por trás do cristal: a transmitida e a difratada (que é de fato a reconstrução da onda-objeto). Os cristais fotorrefrativos são materiais de registro em tempo real e reversíveis, o que significa que durante a leitura o holograma vai sendo apagado pelo próprio feixe de leitura. Exceto para o LiNbO_3 e alguns outros cristais dessa família que podem armazenar a informação no escuro por muitos anos, na maioria dos outros a informação desaparece num tempo (microsegundos em GaAs , segundos em BaTiO_3 , minutos ou horas em $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$) que depende fundamentalmente da condutividade no escuro de cada material. Alguns cristais usuais e suas características qualitativas estão descritos na tabela 6.2.6.1.

Fig.6.2.6.1 - ALGUNS MATERIAIS USUAIS

cristal	eficiência de dif.	rapidez	faixa espectral
LiNbO_3	até 100%	muito lento	verde-vermelho
BaTiO_3	até 60-80%	médio	verde-vermelho
GaAs	menos de 1%	muito rápido	IV próximo
$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$	até 15%	rápido	verde-azul
$\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$	até 15%	rápido	verde-vermelho

6.2.6.2 Leitura de hologramas dinâmicos

Uma primeira alternativa para ler um holograma reversível sem apagá-lo seria utilizar um comprimento de onda fora da faixa de sensibilidade do material, mas isso é inconveniente por várias razões, a principal das quais seria a perda da qualidade de “adaptabilidade” do sistema de leitura (explicaremos isso mais adiante). A outra alternativa (a escolhida) é fazer a leitura durante o registro como proposto pela primeira vez por Huignard e colaboradores [17]. Um esquema simplificado [18] da montagem necessária para isso está na Fig.6.15. Um raio laser é dividido em dois, um formando o raio-referência que é direcionado sobre o cristal, e o outro, que ilumina o alvo para formar o raio-objeto. A luz retro-espelhada pelo alvo é projetada sobre o cristal para formar um holograma com o raio-referência. A onda-objeto reconstruída pelo feixe-referência a partir do holograma no cristal é projetada sobre o detector (no caso um arranjo de CCD) para ser observada num monitor de TV ou na tela de um computador. O holograma é assim gravado no volume do cristal e simultaneamente lido com o feixe-referência. Este difrata no holograma e a onda difratada é de fato

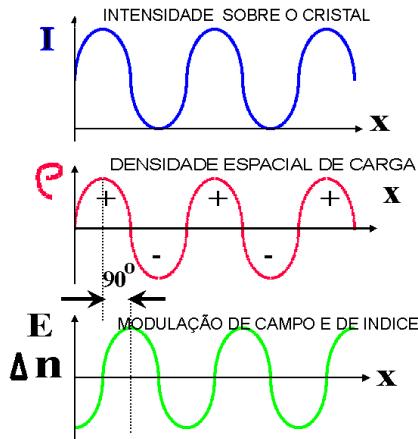


Figura 6.13: Gráficos representando as diferentes etapas do registro da luz em materiais fotorrefrativos.

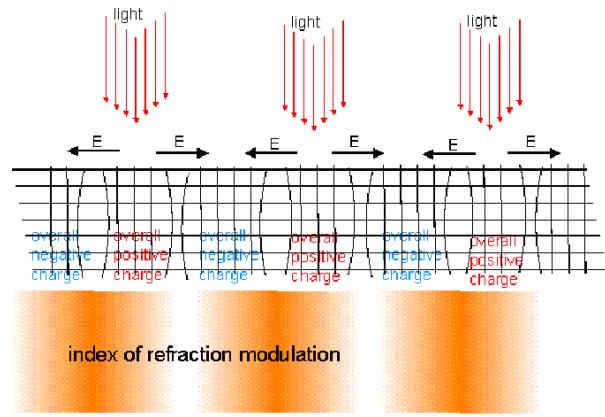


Figura 6.14: Registro de uma modulação espacial de intensidade de luz sob a forma de modulação de índice de refração no volume do cristal fotorrefrativo

a reconstrução holográfica do feixe-objeto, se propagando na mesma direção que o próprio feixe-objeto. O feixe objeto apenas transporta a imagem direta do alvo, enquanto que a sua reconstrução holográfica transporta também, como já discutido anteriormente, as informações sobre as vibrações. Considerando que a eficiência de difração no holograma pode ser menos de 1%, a imagem diretamente transmitida (que não carrega informação de interesse) pode ser muito maior que a luz difratada que transporta a informação desejada. Para cortar a primeira e deixar passar a segunda, utilizamos as propriedades de difração anisotrópica dos cristais de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO): em determinada configuração geométrica e para uma determinada polarização para a luz incidente (a ser escolhida com o polarizador P1), a luz transmitida e a difratada pelo holograma no cristal ficam linear mas ortogonalmente polarizadas [19, 20]. Nesse caso podemos escolher a luz que será cortada usando apenas um polarizador (P2). Em relação ao desempenho do sistema de medida, é necessário apontar os seguintes fatos:

- O tempo necessário para realizar (e poder ler) o registro em nossa montagem foi de 30s a 1min. Esse tempo está limitado pela potência total do feixe laser disponível (em nosso caso He-Ne de 35mW). Maior potência, menor tempo. Maior aproveitamento da luz retro-espelhada pelo alvo representa maior quantidade de luz efetivamente utilizada e consequentemente maior rapidez de registro. Hoje em dia existem lasers de estado sólido emitindo uma linha no 532nm (muito apropriada para o BTO) com potência na faixa de alguns watts, que podem ser utilizados no sistema. Por outro lado nem sempre é conveniente reduzir o tempo de registro pois ele deve ser muito maior que o período da vibração que está sendo estudada.
- A intensidade do feixe-objeto reconstruído apartir da difração do feixe-referência, que carrega a informação que nos interessa, depende não somente da intensidade total da luz disponível mas também da forma como essa luz é distribuída entre os feixes objeto e referência [20]
- A baixa intensidade do laser utilizado não afeta, em princípio, a qualidade da imagem formada, mas aumenta inconvenientemente o tempo de registro, fazendo mais lento o processo e deixando-o mais sensível às perturbações ambientais, o que de fato deteriora sua qualidade.
- O uso de um material reversível (BTO) para o registro, e a reconstrução da imagem a partir do próprio feixe-referência utilizado para gravar o holograma, é extremamente importante pelo fato que assim podem-se estudar as variações sobre o alvo em forma contínua e realizar ajustes na montagem sem necessidade de trocar (revelar e reposicionar exatamente) a placa fotográfica. Isso é o que se chama uma montagem “adaptativa” isto é, que se auto-ajusta às novas condições.

6.3 Aplicações da Holografia

As aplicações são muitas e em muitas áreas desde a Engenharia até as Artes, passando pela ciência dos materiais e a computação óptica.

6.3.1 Holografia para medida de vibrações e deformações

A holografia é particularmente interessante para se medir vibrações e deformações pois, por ser óptico, é um método remoto e não invasivo, e por ser holográfico ele é também muito sensível. Nos centraremos em duas técnicas que são simples de implementar: a “holografia interferométrica em média temporal” para a medida de vibrações, e a “holografia de dupla

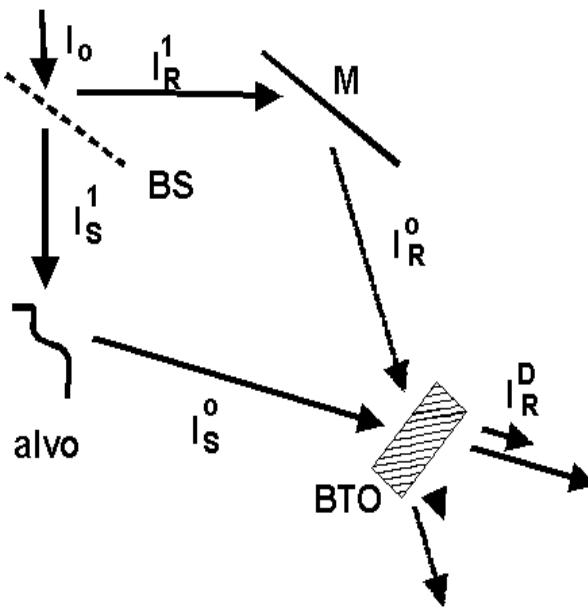


Figura 6.15: Montagem esquemática para a medida de vibrações e deformações por holografia interferométrica

exposição” para a medida de deformações. A descrição destas duas técnicas independe do tipo de material fotossensível (com revelação ou em tempo real) desde que tenha uma resposta mais ou menos linear. Os resultados descritos a seguir foram obtidos a partir de experimentos numa montagem como a descrita esquematicamente na Fig.6.15. Por razões práticas, forma utilizados cristais fotorrefrativos como material de registro (em tempo real).

6.3.1.1 Medida de vibrações

Existem várias possibilidades de usar holografia para medir vibrações, mas uma das mais interessantes é a chamada “holografia interferométrica em média temporal” [9, 21]. Neste caso, o registro do holograma do objeto vibrando é feito durante um tempo t grande comparado com o período $T = 2\pi/\Omega$ da vibração sob estudo. Nestas condições a fase da onda retro-espalhada pela superfície do objeto vibrando harmônicamente com amplitude $d(\vec{r})$ estará modulada por

$$\Delta\phi(\vec{r}) \sin \Omega t, \quad \text{onde} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = 4\pi \frac{d(\vec{r})}{\lambda} \quad (6.17)$$

na aproximação paraxial, isto é, para luz incidente e retro-espalhada com ângulo pequeno. Deixando implícita a dependência da fase em \vec{r} , podemos escrever a onda objeto como

$$\vec{\mathcal{O}}_{\Delta\phi} = \vec{\mathcal{O}} e^{-i\phi_o - i\Delta\phi \sin \Omega t} = \vec{\mathcal{O}} e^{-i\Delta\phi \sin \Omega t} \quad (6.18)$$

onde estão contidas as informações sobre a vibração da superfície, sendo que $\vec{\mathcal{O}}_{\Delta\phi}$ e $\vec{\mathcal{O}}$ representam os fasores da onda-objeto retro-espalhada, com e sem vibrações respectivamente. Substituindo a expressão em Eq.6.18 na Eq.6.8, calculando a média temporal e re-arranjando, encontramos uma expressão para o termo correspondente à onda-objeto reconstruída

$$\langle \vec{\mathcal{O}} e^{-i\Delta\phi \sin \Omega t} \cdot \vec{\mathcal{R}}^* \rangle \cdot \vec{\mathcal{R}} \propto \vec{\mathcal{O}} J_o(\Delta\phi) \quad (6.19)$$

$$\text{cuja irradiância é proporcional a} \quad |\vec{\mathcal{O}}|^2 J_o^2(\Delta\phi) \quad (6.20)$$

que representa a imagem do objeto modulada pelo quadrado da função de Bessel de ordem zero (J_o^2) onde o seu argumento ($\Delta\phi$) está relacionado com o valor local da amplitude de vibração do objeto naquele ponto através da Eq.6.17 [9]. Isso significa que superposta à imagem do objeto temos um padrão de franjas escuas (os pontos onde $\Delta\phi = 0$) e de franjas brilhantes (onde J_o é máximo). Temos assim uma descrição direta e em duas dimensões da distribuição de amplitudes de vibração na superfície do alvo, como ilustrado na Fig.6.16, onde as franjas escuas representam curvas de “iso-amplitude” de vibração que podem ser calculadas a partir da tabela indicada na Fig.6.16.

A tabela do lado na Fig.6.16 mostra os valores dos argumentos que resultam nos diferentes máximos e mínimos para a função de Bessel de ordem zero, e os correspondentes valores para as amplitudes de vibração. Na mesma tabela aparecem



d (nm)	ZERO		MAX radianos $J_o(x)^2$
	x	x	
0	—	0	1
120.9	2.4	—	—
191.4	—	3.8	0.16
277.05	5.5	—	—
352.6	—	7.0	0.09
435.7	8.65	—	—
511.3	—	10.15	0.062
594.4	11.8	—	—
670.0	—	13.3	0.048
750.6	14.9	—	—
831.2	—	16.5	0.038

Figura 6.16: Membrana de um alto-falante excitada por uma tensão de 3.0 kHz e analizada pela técnica de holografia interferométrica em média temporal. O fundo brilhante indica a região em repouso, a 1^a franja escura indica amplitude de vibração de 0.12μm, a segunda 0.28μm e a 3^a 0.44μm. A tabela ao lado indica as amplitudes de vibração que correspondem aos máximos (brilhante) e aos mínimos (escuro) de luz.

os valores dos máximos sucessivos de J_o^2 o que representa o contraste da franja brilhante correspondente. Assim podemos observar que a 2^a franja luminosa é aproximadamente 6 vezes e a 6^a franja brilhante é quase 26 vezes, menos contrastada que a 1^a.

A observação da Fig.6.16, independentemente dos cálculos, dá uma boa idéia sobre o comportamento do alvo, de uma forma muito rápida ainda que semi-quantitativa. Muitas vezes essa figura é suficiente para se tirarem conclusões importantes sobre o comportamento do objeto e sobre o que deve ser feito para alterá-lo em alguma direção. O cálculo quantitativo sobre essa figura feito manualmente na base da identificação dos zeros e máximos da função de Bessel, pode ter sua precisão muito aumentada se utilizarmos recursos computacionais para processar essa imagem de franjas de interferência.

6.3.1.2 Medida de deformações

A holografia de dupla exposição é, independentemente do material ou técnica utilizada para gravar o holograma, a técnica mais utilizada para se medir deformações. Consiste em gravar um holograma do alvo antes e outro depois da deformação, só revelando (se for necessário) no final. Ao iluminar esse holograma composto, com a onda-referência, duas ondas vão ser reconstruídas: a do objeto antes e a do objeto depois da deformação. Como ambas ondas são mutuamente coerentes, elas interferem e as franjas que aparecem mostram as diferenças correspondentes à deformação da superfície do alvo. Na Fig.6.17 pode-se ver um holograma deste tipo, mostrando a deformação de uma lâmina de vidro.

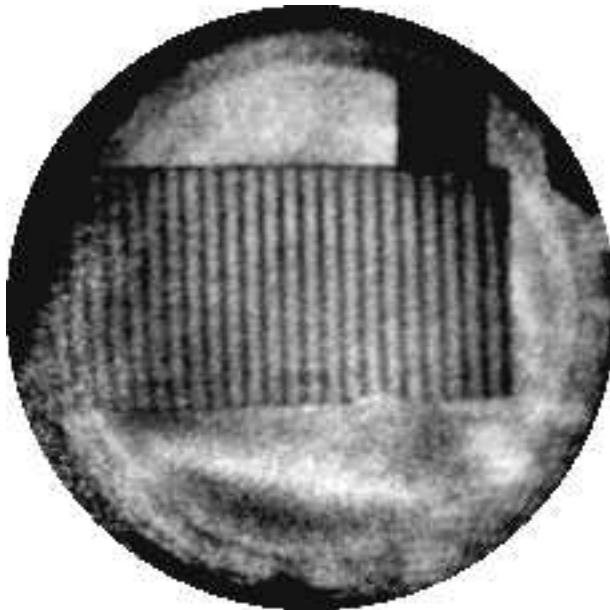


Figura 6.17: *Deformação de uma lâmina de metal medida no interferômetro usando a técnica de superposição de hologramas. A deformação foi estimada, com auxílio da tarefa de referência, em $1.47\mu\text{m}/\text{mm}$*

6.3.2 Computação Óptica

Dentre as varias possíveis aplicações da Holografia à computação óptica, uma das mais interessantes é que utiliza a associatividade dos hologramas (vide Sec.6.2.4) e que deu origem a um sistema puramente óptico baseado nas memórias associativas e que se parece muito com a forma aparentemente utilizada pelo cérebro humano para fazer associações. O esquema experimental está ilustrado na Fig.6.18: O dispositivo da figura é capaz de procurar uma imagem de arquivo a partir de uma amostra parcial e incompleta dessa imagem. O sistema está baseado na holografia e na conjugação de fase. No holograma podem ser armazenadas um grande número de imagens para formar o “arquivo de dados”. Cada imagem é armazenada utilizando um feixe referência incidindo com um ângulo diferente. Para reconstruir a imagem a partir de uma imagem incompleta na entrada, ela é projetada sobre o holograma que gera assim (por associatividade) uma reconstrução holográfica que se aproxima com a onda de referência associada, isto é, com a onda de referência utilizada na hora de armazenar a imagem completa no arquivo (holograma). Essa “quase” onda de referência se reflete num espelho de conjugação de fase e incide no holograma gerando uma imagem que está a meio caminho entre a imagem na entrada e a imagem completa armazenada. Essa imagem “melhorada” se reflete num outro espelho de conjugação de fase e, ao passar pelo holograma volta a reconstruir a onda de referência. O processo se repete e se o sistema está bem desenhado e a imagem de entrada tem as informações mínimas necessárias, o resultado final converge na saída da imagem armazenada que se parece mais com o sinal de entrada. O sistema foi testado com sucesso [22] e deu inicio a grande quantidade de experimentos nessa linha de trabalho.

6.4 Teoria da Informação

Nesta seção daremos uma visão da holografia do ponto de vista de sua capacidade para armazenar informações, quantificando-as e fazendo as generalizações possíveis. Tentaremos mostrar as semelhanças entre os sistemas eletrônicos e ópticos, do ponto de vista do armazenamento e transmissão de informações assim como em relação à “resposta” do sistema, seja ele óptico ou eletrônico.

6.4.1 Capacidade dos sistemas de registro

Do ponto de vista da holografia, armazenar informações em 3 dimensões é basicamente formar sistemas de franjas de interferência usando ondas planas da mesma freqüência temporal ν e diferentes direções. Outra possibilidade seria armazenar informações em forma digital por meio de “spots”. No que segue limitarémo-nos a um registro em 2 dimensões, o que pode ser facilmente estendido para o caso tridimensional. Queremos calcular a capacidade de armazenar informações e mostrar, que para este objetivo, os pontos de vista holográfico (análogo) e digital são equivalentes.

6.4.1.1 Abordagem digital

No caso de um sistema de iluminação coerente, a propagação da luz está representada por um “filtro” linear invariante cuja “função de transferência” foi descrita na sec.5.4.2.1.1 e foi representada assim:

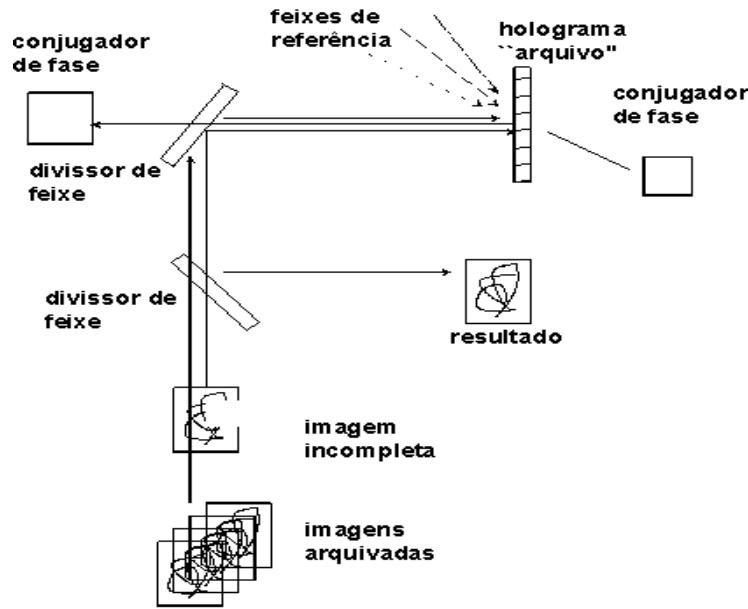
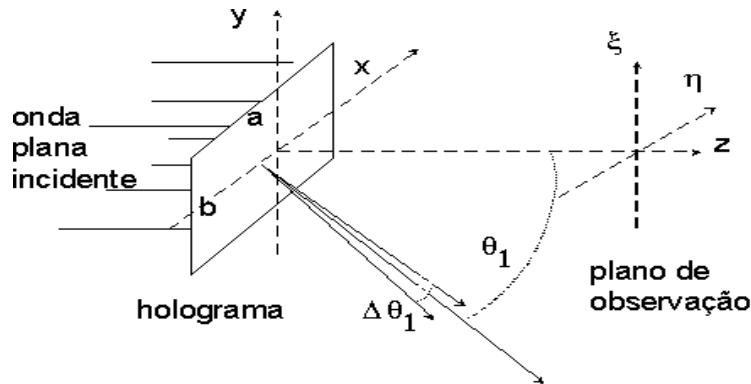


Figura 6.18:

Figura 6.19: Largura angular de um feixe difratado por uma abertura retangular de dimensões $a \times b$.

$$H(f_x, f_y) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}} \quad \text{para } \rho^2 = f_x^2 + f_y^2 \leq 1/\lambda^2$$

$$H(f_x, f_y) = 0 \quad \text{para } \rho^2 = f_x^2 + f_y^2 \geq 1/\lambda^2$$

Nesse caso a largura da função de transferência é $\Delta\rho \leq 1/\lambda$ e o menor tamanho possível para o feixe de luz será então

$$\Delta r \geq \lambda \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6.21)$$

onde r é a coordenada conjugada de Fourier em relação a ρ . Isso significa que o máximo número de informações ("spots") que posso registrar distintamente numa placa fotográfica de 1cm^2 , por exemplo, é

$$\text{Capacidade } C = \frac{1\text{cm}^2}{\lambda^2} = \frac{1}{(0.5\mu\text{m})^2} \approx 4 \times 10^8 \text{ ou seja } 4 \times 10^8 \text{ bits/cm}^2 \quad (6.22)$$

6.4.1.2 Abordagem analógica

Neste caso a informação na placa fotográfica, em lugar de estar representada por "spots", está representada por franjas de interferência de período Δ , formadas pela interferência de duas ondas planas interferindo com um ângulo fixo. Quando o holograma é "lido" incidindo-se uma onda plana como ilustrado na Fig.6.19, a luz é difratada pelos distintos sistemas

de franjas com distintos períodos. Para cada período Δ_1 corresponde uma onda difratada com um ângulo θ_1 . O número máximo possível de informações independentes que podem ser gravadas nessa placa depende do número de feixes com diferentes direções que podemos detectar, o que por sua vez depende da largura de cada feixe. A largura do feixe está determinada pela difração da abertura:

$$t(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (6.23)$$

$$T(f_x, f_y) = a b \text{sinc}(af_x)\text{sinc}(bf_y) \quad f_x = \frac{\eta}{\lambda z} \quad f_y = \frac{\xi}{\lambda z} \quad (6.24)$$

cujas larguras são

$$\Delta f_x \approx \frac{1}{a} \quad \Delta f_y \approx \frac{1}{b} \quad (6.25)$$

Em termos de ângulo sólido podemos escrever

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\xi \Delta\eta}{z^2} = \frac{\lambda^2}{ab} \quad (6.26)$$

A máxima quantidade de informação que posso armazenar, sempre para $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, será

$$C = \frac{\pi/2}{\Delta\Omega} = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{\lambda^2} \quad (6.27)$$

$$\text{ou seja} \quad \approx 6 \times 10^8 \text{bits/cm}^2 \quad (6.28)$$

que é quase igual que o calculado pelo procedimento digital.

A grande capacidade de armazenamento de informações em sistemas ópticos, denotada pelos valores obtidos, está obviamente na base do interesse da fotografia como meio de documentação. A capacidade de armazenamento em volume é obviamente muito maior, o que é fácil de calcular em termos digitais já que neste caso a Eq.(6.22) fica assim

$$C = \frac{1\text{cm}^3}{\lambda^3} \quad (6.29)$$

E em termos analógicos, de onde surge esse aumento de capacidade?

Muitos materiais já foram ou estão sendo desenvolvidos para permitir a gravação óptica, seja de forma permanente ou reversível. É preciso assinalar porém que as capacidades acima calculadas são valores limite, e que na prática existem outros fatores limitantes, como por exemplo a própria resolução e a linearidade de resposta do material. Existe uma diferença fundamental entre ambos sistemas (análogo e digital) no armazenamento da informação: no método digital, como no caso da fotografia, a destruição de uma área da placa acaba definitivamente com toda as informações específicas naquela área destruída, sem afetar em nada o resto. No método analógico, porém, por sua própria natureza holográfica, isso não ocorre já que a informação está deslocalizada; apenas há uma redução gradativa na qualidade na reconstrução das ondas, em decorrência do aumento da largura angular do feixe difratado, por conta da diminuição da “janela” de difração.

6.4.2 Conteúdo de informação de uma fotografia

Trata-se de avaliar a quantidade de informações contidas em uma fotografia, por exemplo. Primeiro vamos definir o que significa o termo “quantidade de informações”, e para isso vamos pensar no caso mais simples de uma função unidimensional $g(x)$, contínua em x , considerada no intervalo $x = \{0, L\}$, cuja Transformada de Fourier

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx \quad \Delta f \leq B \quad (6.30)$$

tem uma largura não superior a B . Pelo teorema de amostragem de Whittaker-Shannon [11], isso significa que eu posso substituir a função contínua $g(x)$, sem perda de informação, por amostras pontuais dessa função, tomadas a intervalos de $(\Delta x)_s$

$$(\Delta x)_s = \frac{1}{B} \quad (6.31)$$

Com essas amostras eu posso reconstruir exatamente a função contínua $g(x)$ original, o que significa que ambas são equivalentes do ponto de vista do seu conteúdo em termos de informação. Podemos utilizar esta amostragem então para estimar o número de informações contidas na função $g(x)$, calculando o número de amostras no intervalo $\{x = 0, x = L\}$ assim:

$$C = L/(\Delta x)_s = LB \quad (6.32)$$

Esse procedimento pode ser aplicado a uma fotografia ou a uma transparência em duas dimensões, com dimensões $a \times b$ e com respectivas larguras espectrais máximas B_a e B_b , em cujo caso o conteúdo máximo de informações independentes será

$$C = abB_aB_b \quad (6.33)$$

A expressão na Eq.(6.33) é geral e se aplica também para funções temporais onde ela é conhecida como parâmetro “time-bandwidth”

6.4.2.1 Exemplo

As duas fotografias na Fig.6.20 mostram imagens da mesma cena, com processamento diferente onde uma tem maior resolução que a outra. Calcule a maior frequência espacial (média) contida em cada uma das duas imagens, sabendo o tamanho ou número de informações independentes (659KB e 2.46MB respectivamente) de cada imagem e sabendo que as dimensões delas são 80.15cm x 60.11 cm, iguais para as duas.

Resp.: 11.7 cm^{-1} e 22.6 cm^{-1}

6.4.3 Resposta de um sistema

Trata da máxima “rapidez” (em termos de tempo ou de espaço) com que um sistema linear invariante pode responder.

Seja uma função $g(x)$ com espectro de Fourier $G(f)$ de largura limitada:

$$G(f) = 0 \text{ para } |f| \geq B/2 \quad (6.34)$$

Supondo que a função $g(x)$ é também limitada, isto é:

$$|g(x)| \leq M(g) \quad -\infty < x < +\infty \quad (6.35)$$

então, pelo teorema de Bernstein (vide Apêndice C) sobre derivada de funções de espectro finito, resulta que

$$\left| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right| \leq \pi \frac{B}{2} M(g) \quad (6.36)$$

O resultado acima é a formulação matemática de um conceito fácil de aceitar intuitivamente e que estabelece que se o espectro de uma função não inclui freqüências arbitrariamente grandes, ela não pode mudar arbitrariamente rápido. No que segue, aplicaremos estas conclusões para o estudo de um amplificador (função temporal) e de um sistema óptico.

6.4.3.1 Constante de tempo de um amplificador

A resposta de um amplificador é um sinal de espectro limitado, pelo que se aplica o teorema de Bernstein. Seja $s(t)$ um sinal “degrau” e seja $r(t)$ a resposta do amplificador, como ilustrado na Fig.6.21. A resposta passa do valor $r=0$ para $r=A$, mas não instantaneamente. Seja Δt a duração dessa transição ou “tempo de resposta” do amplificador. Em função do “Teorema do valor médio”¹ podemos escrever

$$r(\Delta t) - r(0) = r'(\theta \Delta t) \cdot \Delta t \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (6.37)$$

$$A = r'(\theta \Delta t) \cdot \Delta t \quad (6.38)$$

mas pelo teorema de Bernstein resulta

$$|r'(\theta \Delta t)| \leq \pi \frac{B}{2} A \quad (6.39)$$

$$|r'(\theta \Delta t)| \leq \pi \frac{B}{2} |r'(\theta \Delta t)| \Delta t \quad (6.40)$$

$$\boxed{\Delta t \geq \frac{2}{\pi B}} \quad (6.41)$$

O caso descrito representa a resposta de um sistema amortecido. Se em câmbio o sistema fosse do tipo “sub-amortecido” como ilustrado na Fig.6.22, então o tempo de resposta poderia ser menor pois

$$\boxed{\Delta t \geq \frac{A}{C} \frac{2}{\pi B} \quad 0 < \frac{A}{C} < 1} \quad (6.42)$$



Figura 6.20: Fotografia de igual tamanho, da mesma cena, onde a superior foi processada para suavizar e a inferior para acentuar o contraste (bordas). Os conteúdos de informação nas imagens superior e inferior são respectivamente 659KB e 2.46MB.

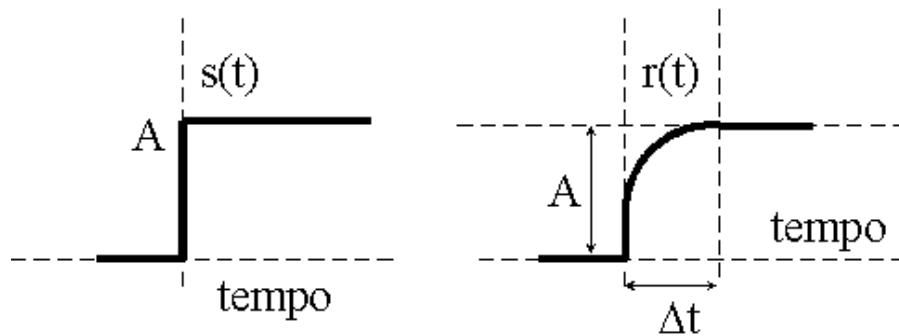


Figura 6.21: Sinal de entrada (esquerda) e resposta na saída de um amplificador “amortecido” (direita)

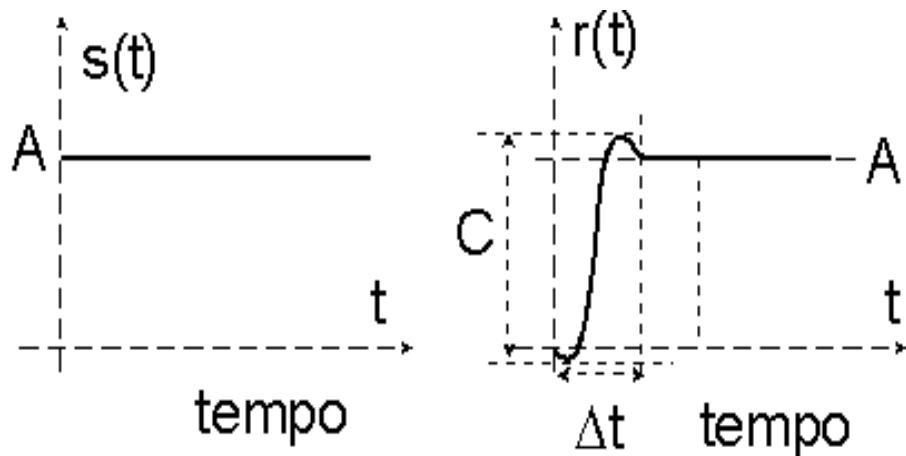


Figura 6.22: Sinal de entrada (esquerda) e resposta “sub-amortecida” (direita) do amplificador.

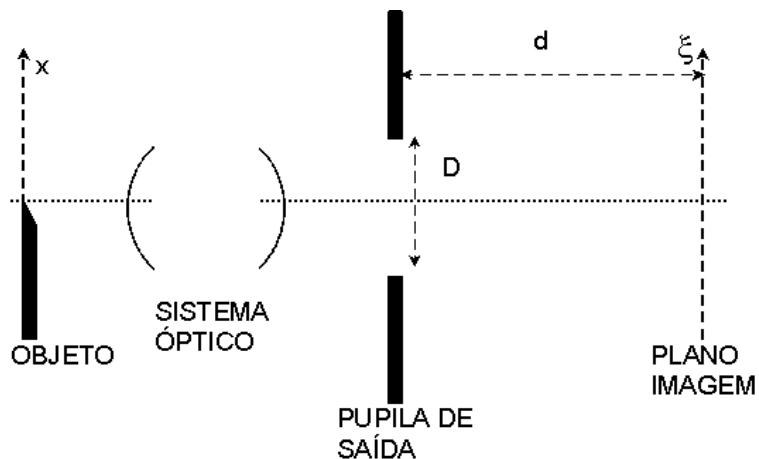


Figura 6.23: Imagem de uma borda, uniformemente iluminada, por um sistema óptico.

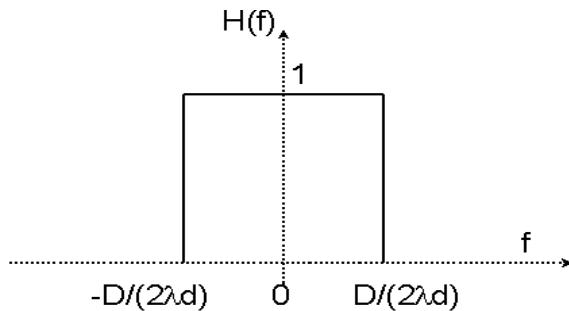


Figura 6.24: Função de transferência de um sistema óptico operando em luz coerente, onde D é a pupila de saída, d a distância da pupila ao plano imagem e f a freqüência espacial. A largura de banda é $\Delta H(f) = D/(\lambda d)$

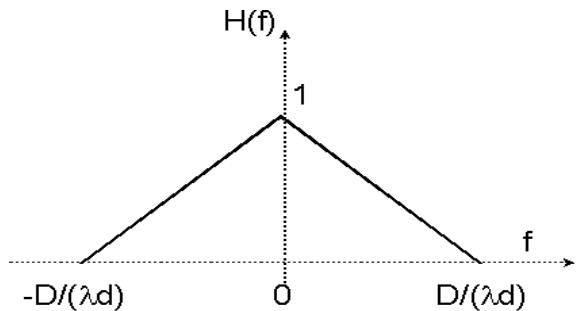


Figura 6.25: Função de transferência de um sistema óptico operando em luz incoerente, onde D é a pupila de saída, d a distância da pupila ao plano imagem e f a freqüência espacial. A largura de banda é $\Delta H(f) = 2D/(\lambda d)$

6.4.3.2 Poder de resolução de um sistema óptico

Vamos estudar um exemplo de Óptica, onde o que em termos de eletrônica chamávamos de “tempo de resposta” encontra o equivalente no termo “poder de resolução” que não é mais do que o tempo de resposta em termos espaciais e ele será agora avaliado em termos de coordenadas espaciais e não mais temporais como no caso do amplificador acima. Trata-se da imagem de uma borda uniformemente iluminada, como ilustrado na Fig.6.23, realizada por um sistema óptico. Abordaremos dois casos: um com iluminação coerente e outro incoerente. A borda pode ser definida pela função:

$$f(x) = 0 \text{ para } x < 0 \quad (6.43)$$

$$= 1 \text{ para } x > 0 \quad (6.44)$$

Para um sistema óptico coerente, a função de transferência pode ser escrita como

$$H(f) = P(\lambda d f) \quad (6.45)$$

que corresponde à Fig.6.24, onde f é a freqüência espacial, e $P()$ é a “função pupila” do sistema óptico. Para o caso de um sistema incoerente, em câmbio, a função de transferência está representada na Fig.6.25. Não discutiremos a origem destas expressões (vide [11]) e apenas as aceitaremos para não nos desviar de nosso objetivo imediato. Trata-se então de calcular a resposta do sistema óptico em termos da distância Δx que representa a transição entre a escuridão total e a luz total, no plano da imagem. Sendo que o sistema tem uma largura de banda finita B (vide as Fig.6.24 e Fig.6.25), e levando em conta a Eq.(6.41), resulta que

$$\Delta x \geq \frac{2}{\pi B} \quad (6.46)$$

sendo que para os casos do sistema coerente e incoerente resulta ser respectivamente :

$$\Delta x \approx 2 \frac{\lambda d}{\pi D} \quad (6.47)$$

$$\Delta x \approx \frac{\lambda d}{\pi D} \quad (6.48)$$

Veja que a luz incoerente permite maior resolução. Podemos comparar o resultado acima para o sistema coerente, com o obtido utilizando a teoria da difração, onde a “indefinição” Δr_o da imagem é calculada pelo tamanho finito da abertura de difração (isto é a abertura circular da pupila P) e que resulta ser [11]

$$\Delta r_o = 1.22 \frac{\lambda d}{D} \quad (6.49)$$

e que resulta comparável com o resultado obtido na Eq.(6.47).

A analogia acima estabelecida entre Electrônica e Óptica não é fortuita. Ela existe porque os conceitos “poder de resolução” em Óptica e “tempo de resposta” em Eletrônica, ambos são consequência imediata da largura de banda finita da função de transferência dos sistemas lineares invariantes.

¹Se a função $f(x)$ é contínua e derivável no intervalo $[a,b]$, então existe um $x = c$ pertencente a esse intervalo, que verifica $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$.

6.5 Problemas

6.5.1 Capacidade de informações em imagens

Duas imagens de 80.15cm x 60.11 cm da mesma cena (vide Fig.6.20), foram processadas de forma de a) suavizar e b) reforçar os contrastes (bordas). No primeiro caso o “tamanho” da imagem (informada pelo computador) é de 659 KB e na segunda é de 2.46 MB. Cada “B” significa “bite” que representa uma informação independente. Quais são as máximas frequências espaciais presentes em cada uma das duas imagens assim processadas, supondo distribuição uniforme nas coordenadas x e y ?

RESPOSTA: a)11.7 cm^{-1} e b)22.6 cm^{-1}

Capítulo 7

Óptica em Sólidos

Neste capítulo daremos algumas breves noções da propagação da luz em sólidos não isotrópicos e de efeitos não lineares. Eses dois assuntos são relativamente marginais em relação aos objetivos principais destes texto e são tratados aqui de maneira simplificada, apenas para dar ao leitor uma ideia geral do assunto, oferecendo literatura adequada para um estudo mais detalhado.

7.1 Propagação em meios anisotrópicos

Os meios anisotrópicos [8, 15] são, em geral, cristais. Para eles podemos escrever uma relação vectorial geral

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.1)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E} \quad (7.2)$$

onde $\epsilon_0 = 8.82 \times 10^{-12}$ coul/(mV) é a permitividade do vácuo. As quantidades \vec{P} , \vec{E} e \vec{D} são a polarização, o campo elétrico e o deslocamento elétrico respectivamente. A polarizabilidade $\hat{\chi}$ é um tensor que, apenas para meios isotrópicos, pode ser escrito como um escalar assim

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (7.3)$$

A relação tensorial Eq.(7.2) pode ser escrita assim

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

ou de forma abreviada assim

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\hat{1} + \hat{\chi}) \vec{E} \quad \hat{\epsilon} \equiv (\hat{1} + \hat{\chi}) \quad (7.5)$$

onde $\hat{\epsilon}$ é o tensor da constante dielétrica e $\hat{1}$ e $\hat{\chi}$ são tensores descritos como:

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Lembremos que existe sempre um sistema de coordenadas, chamado de “principal”, onde $\hat{\chi}$ tem forma diagonal assim

$$\hat{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

7.1.1 Equação geral da onda

A onda electromagnética se propagando num meio não magnético e sem carga elétrica, pode se deducir das equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J} \text{ with } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} \quad (7.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (7.11)$$

e das equações materiais

$$\begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_o \chi_{11} E_1 & D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_o (1 + \chi_{11}) \\ P_2 &= \varepsilon_o \chi_{22} E_2 & D_2 &= \varepsilon_{22} E_2 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_o (1 + \chi_{22}) \\ P_3 &= \varepsilon_o \chi_{33} E_3 & D_3 &= \varepsilon_{33} E_3 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_o (1 + \chi_{33}) \end{aligned} \quad (7.12)$$

representadas num sistema de coordenadas principal.

7.1.2 Elipsoide de índice de refração

Podemos escrever a expressão das densidades de energia elétrica w_e e magnética w_m [6]

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} E_l \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.13)$$

e escrever o vetor de Poynting para o fluxo de energia

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (7.14)$$

Depois de algumas substituições e transformações que levam em conta as equações de Maxwell, podemos escrever no sistema de coordenadas principal

$$\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} = 8\varepsilon_o \pi w_e = \text{constante} \quad \begin{aligned} \epsilon_x &\equiv \epsilon_{11} &= 1 + \chi_{11} \\ \epsilon_y &\equiv \epsilon_{22} &= 1 + \chi_{22} \\ \epsilon_z &\equiv \epsilon_{33} &= 1 + \chi_{33} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Se definimos:

$$x = \frac{D_x}{\sqrt{w_e \epsilon_o}}$$

$$y = \frac{D_y}{\sqrt{w_e \epsilon_o}}$$

$$z = \frac{D_z}{\sqrt{w_e \epsilon_o}}$$

com

$$n_x^2 = \epsilon_x = \varepsilon_x / \varepsilon_o$$

$$n_y^2 = \epsilon_y = \varepsilon_y / \varepsilon_o$$

$$n_z^2 = \epsilon_z = \varepsilon_z / \varepsilon_o$$

encontramos a formulação da indicatriz óptica, ou elipsoide de índice:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (7.16)$$

onde n_x , n_y e n_z são os índices de refração ao longo das coordenadas x , y e z respectivamente, como representado na Fig.7.1. Se a onda (harmônica) viaja no material com um vetor propagação \vec{k} , os modos normais de propagação estão linearmente polarizados e eles podem ser calculados a partir do elipsoide de índice, como descrito a seguir.

7.1.3 Modos próprios de propagação

Num material anisotrópico, os vetores \vec{D} e \vec{E} não são em geral paralelos, e o fluxo de energia, indicado pelo vetor \vec{S} (raio), também não tem a mesma direção que o vetor de onda \vec{k} . Para equacionar o problema, primeiramente escrevemos, das equações de Maxwell Eq.(3.1), as relações

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (7.17)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H} \quad (7.18)$$

para um material não condutor ($j = 0$) e não magnético ($\mu = \mu_0$). Combinando as equações acima resulta

$$-\frac{\vec{k}}{k} \times \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \frac{1}{\epsilon} \vec{D} \right) = \frac{\vec{D}}{n^2} \quad 1/n^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \mu_0 \epsilon_0 = v^2/c^2 \quad (7.19)$$

que representa a projeção de $\frac{\vec{D}}{\epsilon}$ sobre um plano (representado na cor cinza na Fig.7.2) perpendicular à direção de propagação \vec{k}/k , o que nos permite encontrar as direções das duas componentes próprias do vetor \vec{D} para as ondas ordinária e extraordinária, representadas pelas linhas tracejadas na Fig.7.2. Os comprimentos desses eixos, por outro lado, nos dão os respectivos índices de refração para cada um dos valores próprios de \vec{D} , que são os n_o e n_e indicados na figura.

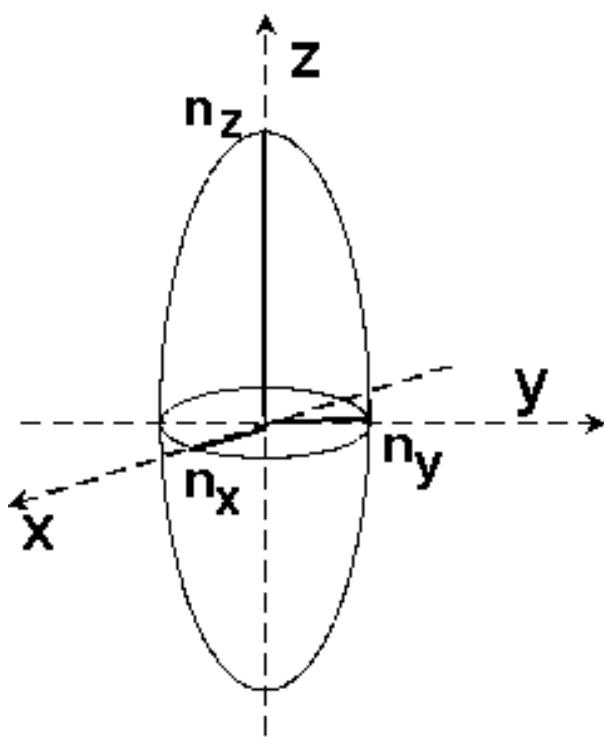


Figura 7.1: Elipsoide de índice de refração.

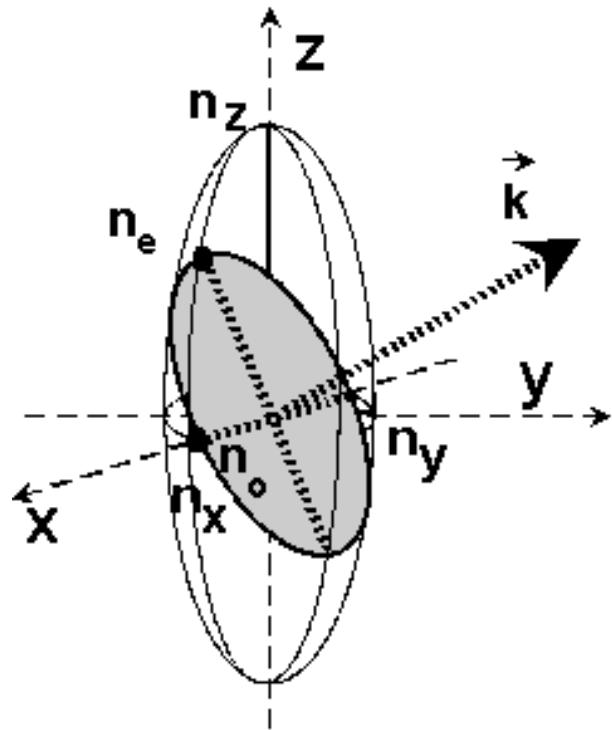


Figura 7.2: Índices de refração para uma onda plana se propagando num meio anisotrópico.

7.1.3.1 Eixo óptico

Quando \vec{k} é tal que a interseção do seu plano normal (cor cinza na Fig.7.2) é um círculo, o índice de refração vale n_o e é obviamente independente da direção de vibração da onda: essa direção de \vec{k} define o “eixo óptico” do material.

7.1.3.1.1 Cristais uniaxiais e biaxiais: Os cristais anisotrópicos podem ser uniaxiais ou biaxiais. Nos primeiros (quando $n_x = n_y = n_o$ na Fig.7.1), existe um único eixo óptico, que corresponde ao eixo z das Figs.7.1 e 7.2. Nos segundos (quando $n_x \neq n_y \neq n_z$) existem dois eixos ópticos, simétricos, definidos pelas duas direções de \vec{k} para as quais a interseção do plano perpendicular com o elipsoide de índice forma um círculo. Qualquer onda se propagando numa direção fora da do eixo óptico terá dois modos de propagação, ordinário e extraordinário, com os correspondentes índices n_o e n_e .

7.1.3.2 Relação de dispersão

Das relações nas Eqs.(7.17) e (7.18) e da formulação do vetor de Poyning

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

deducimos que:

- \vec{S} é perpendicular aos \vec{E} e \vec{H}
- \vec{D} é perpendicular aos \vec{k} e \vec{H}
- \vec{H} é perpendicular aos \vec{k} e \vec{E}
- \vec{D} , \vec{E} , \vec{S} e \vec{k} estão num mesmo plano, que é perpendicular aos \vec{B} e \vec{H} .

Da Eq.(7.19) podemos escrever

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} + \chi \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \quad (7.20)$$

ou seja que

$$\mathcal{M}\vec{E} = 0 \quad (7.21)$$

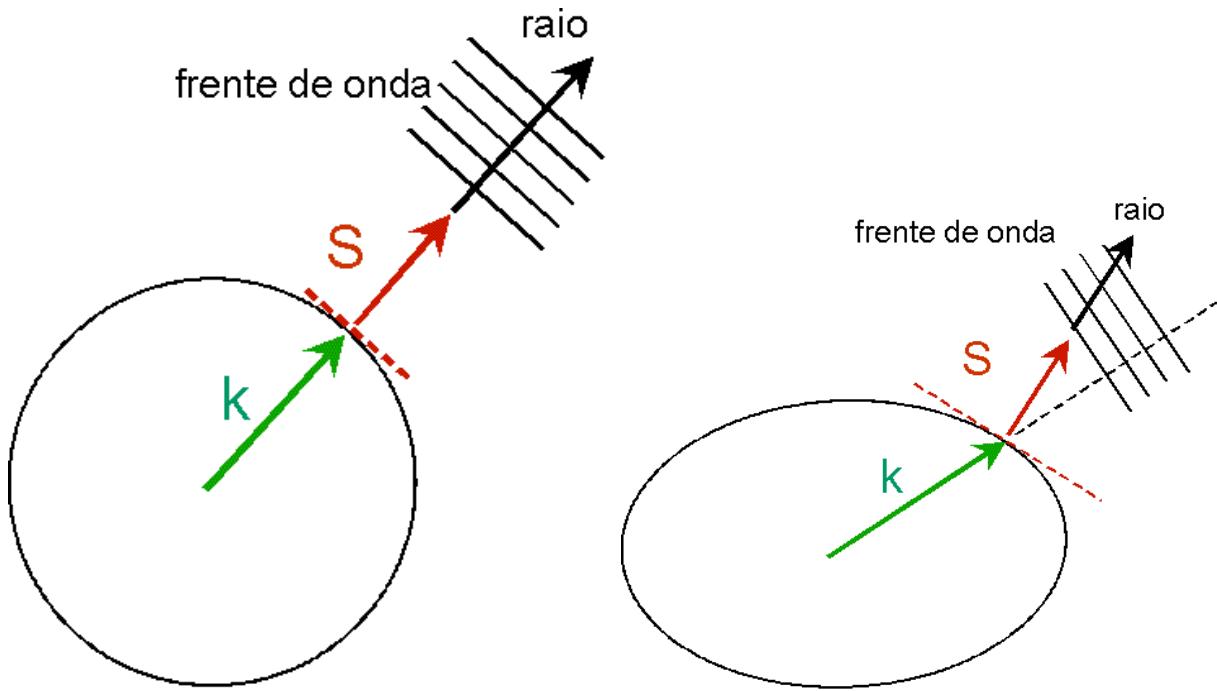


Figura 7.3: Superfícies de onda normal, $\omega(\vec{k})$, para a onda ordinária (esquerda, onde $\vec{k} \parallel \vec{S}$) e extraordinária (direita), mostrando a propagação das frentes de onda (perpendiculares ao vetor \vec{k}) e dos raios (velocidade de grupo), ao longo do vetor \vec{S} .

onde \mathcal{M} representa a matriz

$$\mathcal{M} \equiv \begin{bmatrix} -k_y^2 - k_z^2 + k_0^2(1 + \chi_{11}) & k_x k_y & +k_x k_z \\ k_y k_x & -k_x^2 - k_z^2 + k_0^2(1 + \chi_{22}) & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & -k_x^2 - k_y^2 + k_0^2(1 + \chi_{33}) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

onde $k_0 \equiv \omega/c$. A solução não trivial da Eq.(7.21) é

$$|\mathcal{M}| = 0 \implies \omega(\vec{k}) \quad (7.23)$$

que resulta numa relação entre ω e \vec{k} , $\omega(\vec{k})$ e que constitui uma relação de dispersão. Essa solução do determinante descreve uma superfície de ω em função de $\vec{k}(k_1, k_2, k_3)$. Para cada valor (constante) de ω a Eq.(7.23) descreve duas superfícies centro-simétricas em \vec{k} , uma esférica para a onda ordinária e outra elíptica para a onda extraordinária como ilustrado na Fig.7.3. Como a velocidade de grupo \vec{v}_g (que indica o transporte de energia e que é paralela ao vetor \vec{S}) se calcula como

$$\vec{v}_g = \nabla_k \omega(\vec{k}) \quad (7.24)$$

que por ser um gradiente deve ser normal à superfície que represente ω constante, e como as superfícies de onda normal (ou superfície de k) representadas na Fig.7.3 representam os valores de \vec{k} para ω constante, concluímos que \vec{S} deve ser normal à superfície de onda normal, como ilustrado na Fig.7.3. A direção de \vec{S} representa também o “raio” de luz. A frente de onda, por outro lado, deve ser perpendicular ao vetor \vec{k} , como também ilustrado na Fig.7.3. Para a onda ordinária, \vec{k} e \vec{S} são paralelos, que não é em geral o caso da onda extraordinária.

7.1.3.3 Cristal uniaxial.

Para o caso de um cristal uniaxial, n_o é constante e n_e varia de n_o (quando \vec{k} é paralelo ao eixo z que aqui representa o eixo óptico do cristal) até n_z quando \vec{k} é perpendicular ao eixo óptico. Se a onda viaja (\vec{k}) formando um ângulo θ com o eixo óptico, então a elipse de índice vale

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2(\theta)} \quad (7.25)$$

o que significa que os modos próprios de propagação tem índices n_o e $n_e(\theta)$ que depende de θ .

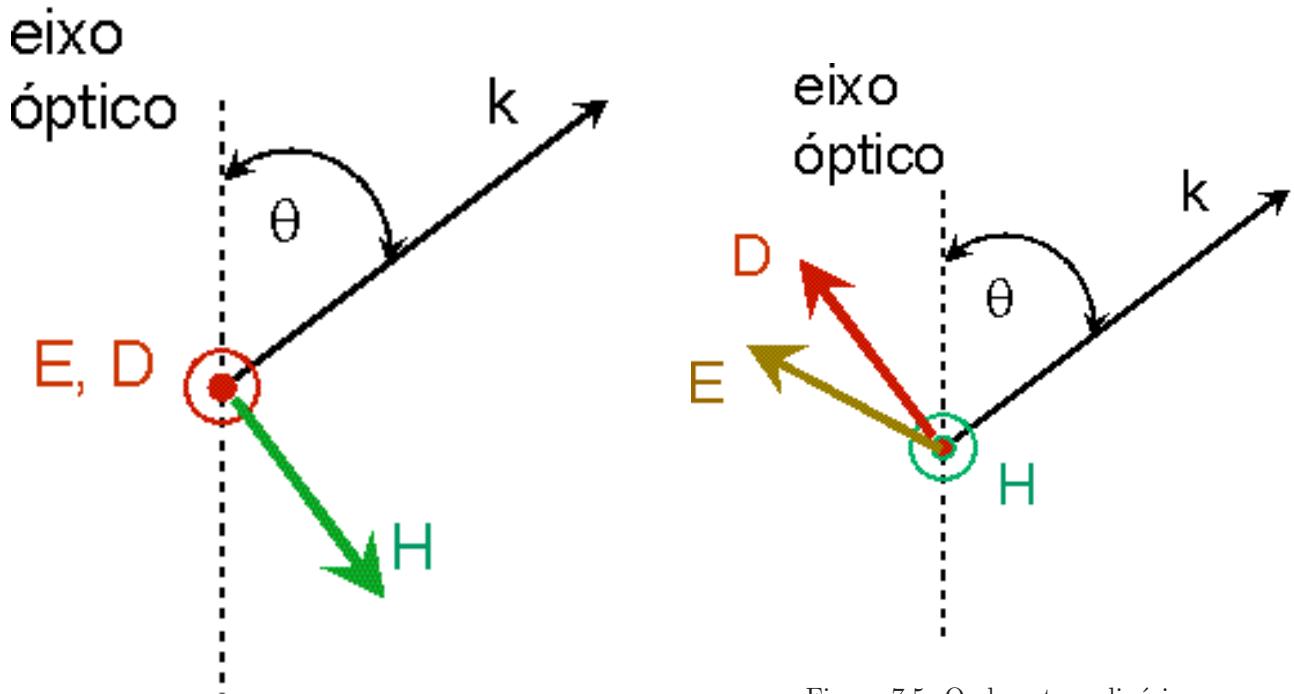


Figura 7.5: Onda extraordinária

Figura 7.4: Onda ordinária

- A onda ordinária, tem um índice constante n_o independente de θ e os vetores \vec{E} e \vec{D} são sempre paralelos.
- A onda extraordinária tem um índice $n_e(\theta)$ e os vetores \vec{E} e \vec{D} não são, em geral, paralelos.

como indicado nas Figs.7.4 e 7.5. Podemos então calcular a equação para a superfície de k para um material uniaxial, escrevendo

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 = n_o \\ n_3 &= n_e \end{aligned}$$

que substituído na Eq.(7.23) nos dá uma equação para a onda ordinária

$$k^2 - n_o^2 k_0^2 = 0 \quad (7.26)$$

e outra para a extraordinária

$$\frac{k_1^2 + k_2^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2} - k_0^2 = 0 \quad (7.27)$$

como ilustrado na Fig.7.6.

7.1.4 Refração num material birrefringente

Se tivermos uma fonte de luz pontual no interior de um cristal birrefringente e traçarmos a superfície tal que, para cada direção de propagação (ou seja do \vec{k}), sua distância à fonte pontual fosse igual ao índice de refração correspondente, teríamos duas superfícies distintas (chamadas de “inversas das frentes de onda”), como ilustrado nas Figs.7.7 e 7.8, uma esférica (verde) referente à onda ordinária, e outra elíptica (vermelha) referente à onda extraordinária, projetadas num plano, para os casos de um cristal uniaxial e biaxial.

Se tivermos uma interface separando um meio isotrópico e um cristal birrefringente (suponhamos uniaxial para simplificar), as tais frentes de onda seriam como indicadas na Fig.7.9. Se a luz incide sobre a interface a partir do meio isotrópico (suponhamos seja vácuo), com um vetor propagação \vec{k}_1 ($|\vec{k}_1| = 2\pi/\lambda_0$) como indicado na figura, podemos saber as direções dos vetores das ondas ordinária e extraordinária refratadas, lembrando que na interface as projeções dos vectores (paralelas à interface) se conservam (vide sec.3.4)

$$\begin{aligned} (\vec{k}_1)_\parallel &= (\vec{k}_e)_\parallel = (\vec{k}_o)_\parallel \\ k_1 &= k_0 \quad k_e = k_0 n_e \quad k_o = k_0 n_o \text{ valor no vácuo: } k_0 \equiv 2\pi/\lambda_0 \end{aligned}$$

onde n_o e n_e são os índices ordinário e extraordinário, com $n=1$ no vácuo, e o suíndice \parallel indicando a projeção sobre o plano da interface. O procedimento gráfico está ilustrado na Fig.7.10.

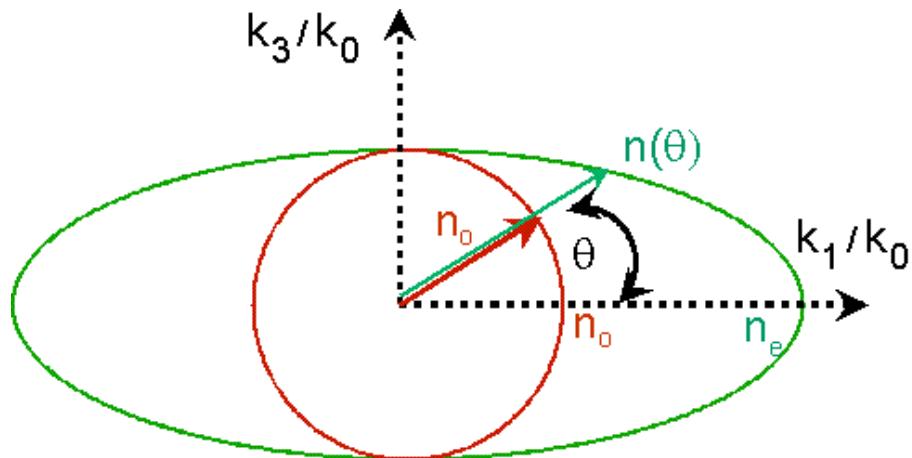


Figura 7.6: Ondas ordinária e extraordinária em cristal uniaxial, no plano $x - z$

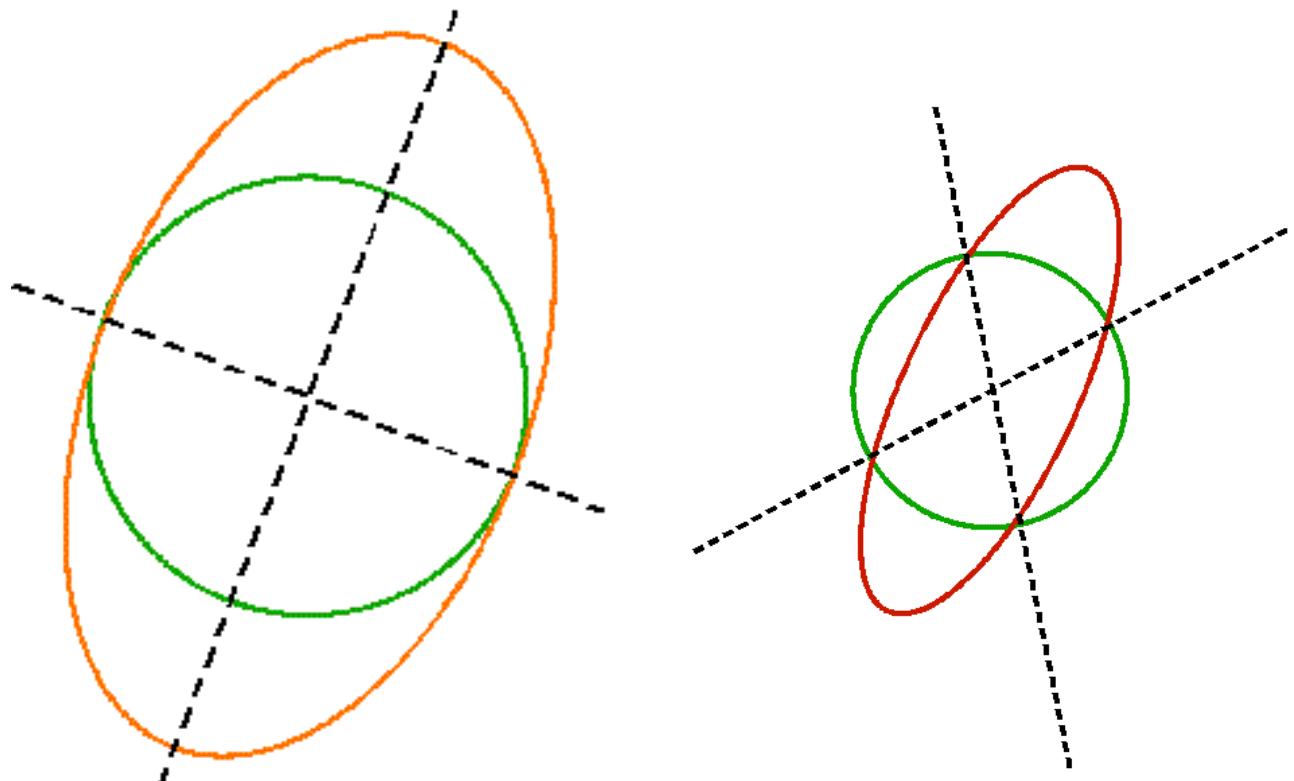


Figura 7.7: Superfícies representando a “inversa da frente de onda” para a onda ordinária (verde) cujo raio é proporcional à n_o e para a extraordinária (elipse vermelha) cujos eixos menor e maior são proporcionais á n_o e n_e respectivamente, num material birrefringente uniaxial.

Figura 7.8: Igual que para o caso da Fig. 7.7, mas para um cristal biaxial, onde os dois eixos ópticos estão representados pelas duas retas pontilhadas simétricas.

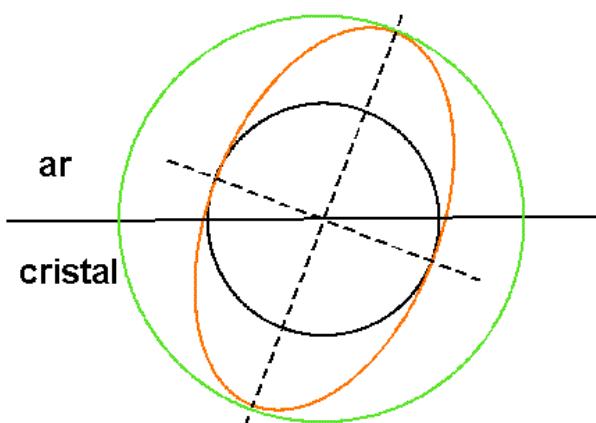


Figura 7.9: A figura mostra uma interface entre ar e um cristal birrefringente uniaxial, com as respectivas inversas das frentes de onda: em preto para o ar, em verde para a onda ordinária e em vermelho para a onda extraordinária, estas últimas apenas no cristal.

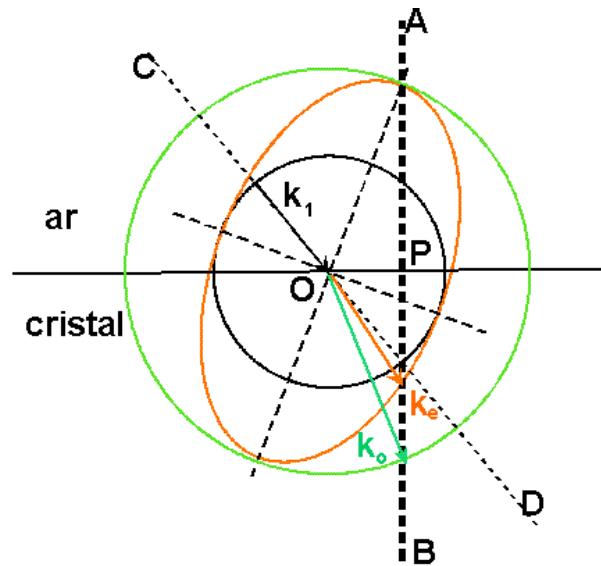


Figura 7.10: Vetores de propagação para as ondas ordinária e extraordinária refratadas no segundo meio, conhecendo a direção do vetor incidente \vec{k}_1 do lado do ar. As projeções dos três vetores \vec{k}_1 , \vec{k}_o e \vec{k}_e sobre a interface devem ser iguais.

Exemplos

7.1.5 Cristal de água

A Fig.7.11 mostra uma lâmina de cristal de água (material birrefringente uniaxial) de 4.2 mm de espessura, com o eixo óptico paralelo à superfície da lâmina. Supondo que um raio de luz de uma lâmpada de vapor de sódio ($\lambda = 589 \text{ nm}$) incida nessa lâmina com um ângulo rasante num plano de incidência normal ao eixo óptico do cristal, calcule a separação linear (d) dos raios ordinário e extraordinário na face de saída da lâmina.

Como o eixo óptico é normal ao plano de incidência e o cristal é uniaxial, o lugar dos pontos correspondentes às superfícies inversas da frente de onda para os feixes ordinário e extraordinário no cristal são círculos de raios n_e e n_o respectivamente, assim como o do ar com raio n_{ar} . Como as componentes dos vetores propagação paralelas à interface se conservam na refração, podemos escrever

$$\begin{aligned} k_{ar} &= (k_o) \parallel = (k_e) \parallel \\ k_0 &= k_0 n_o \sin \theta_o = k_0 n_e \sin \theta_e \\ 1 &= 1.309 \sin \theta_o = 1.3104 \sin \theta_e \end{aligned}$$

Das relações acima calculamos os ângulos e daí as tangentes para obtermos d assim

$$d = b(\tan \theta_e - \tan \theta_o) = 0.01.127 \text{ mm}$$

7.1.6 Incidencia normal

A Fig.7.12 mostra a refração de um raio de luz incidindo normalmente sobre um material birrefringente, vindo do ar, mostrando as frentes de onda (\vec{k}) e raios (\vec{S}) refratados no material, para as ondas ordinária (vermelho) e extraordinária (verde) e em preto para o ar. Explique as diferentes direções indicadas na figura para a propagação das frentes de onda e para os raios. A Fig.7.13 mostra o caso real de incidencia normal num cristal de calcita, que é biaxial.

7.2 Óptica não linear

Quando a luz se propaga no vácuo ou quando se propaga em materiais mas a intensidade dos campos envolvidos é suficientemente pequena como para que o efeito do campo elétrico, por exemplo, sobre a nuvem eletrônica dos átomos, produza uma deformação linear, estamos no domínio da Óptica Linear. Neste caso, a ação do campo elétrico desloca a nuvem eletrônica dando origem a uma polarização dielétrica representada pelo vetor \vec{P} como indicado na sec.2.2.1,

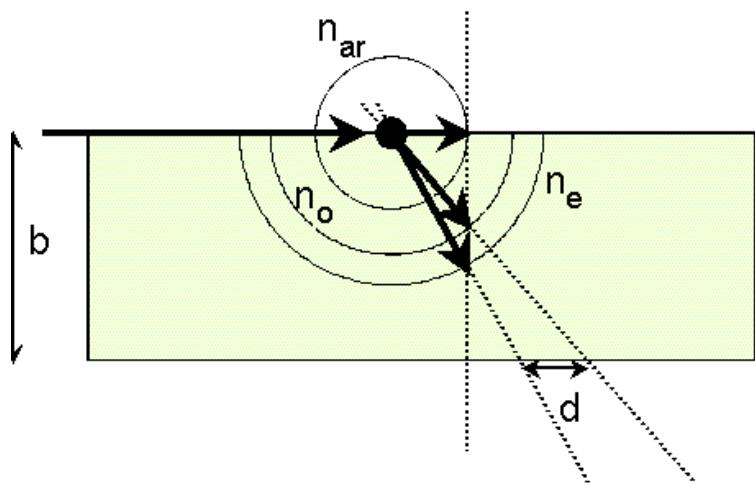


Figura 7.11: Refração num cristal de água (gelo): Lâmina de cristal de água (gelo) de espessura $b = 4.20$ mm, com $n_o = 1.3090$ e $n_e = 1.3104$ para $\lambda = 589$ nm, com o eixo óptico paralelo à superfície da lâmina e perpendicular ao plano de incidência do raio de luz incidindo rasante à superfície.

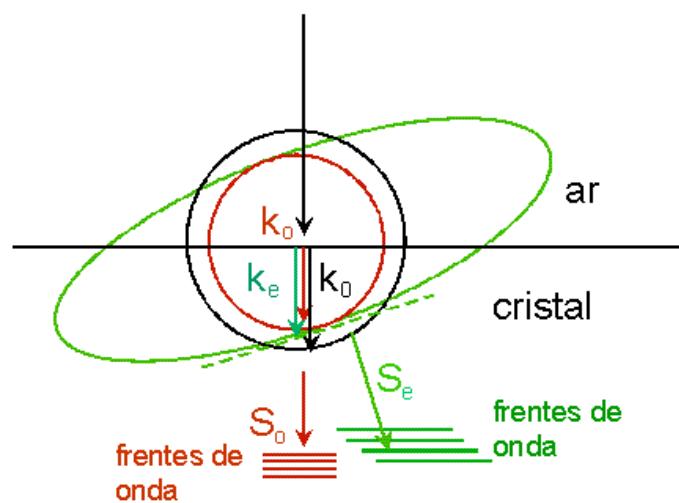


Figura 7.12: Raio incidindo normalmente, desde o ar, num material birrefringente, indicando as frentes de onda e direção dos raios, para as ondas ordinária e extraordinária.

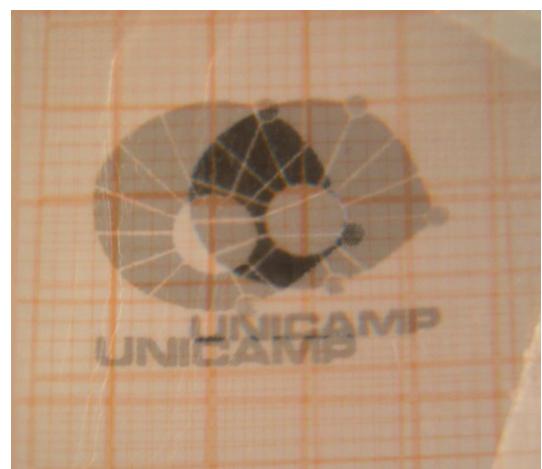


Figura 7.13: Refração em cristal de calcita, mostrando as imagens devidas aos raios ordinário e extraordinário

vetor éste que é linearmente proporcional ao campo amplicado $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ e onde χ representa essa susceptibilidade à deformação (linear) da nuvem eletrônica. Mas se os campos são suficientemente intensos, a deformação da nuvem eletrônica no material pode não ser mais linear, assim como ocorre com um oscilador mecânico que em geral apresenta uma deformação linearmente proporcional à força nele aplicada, para valores pequenos, mas para valores suficientemente grandes deixa de ser linear, dando lugar a harmônicos superiores. No caso das ondas eletro-magnéticas ocorre a mesma coisa e, para campos suficientemente grandes, aparecem termos não lineares em \vec{P} , o que dá lugar à geração de harmônicos superiores e diversas interações entre ondas da mesma e/ou de diferentes freqüências, via resposta do material, o que constitui o assunto da Óptica Não-Linear.

Vamos então rescrever as equações de Maxwell com especial atenção para a presença de efeitos não lineares [16]:

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad (7.28)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \quad (7.29)$$

$$\nabla \cdot \vec{e} = \rho \quad (7.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad (7.31)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{e} \quad (7.32)$$

$$\vec{d} = \varepsilon_o \vec{e} + \vec{p} \quad (7.33)$$

$$\vec{d} = \varepsilon_o \hat{\chi} \vec{e} \quad (7.34)$$

$$\vec{d} = \varepsilon \vec{e} \quad \varepsilon = \varepsilon_o (1 + \hat{\chi}) \quad (7.35)$$

$$\vec{b} = \mu \vec{h} \quad (7.36)$$

sendo que \vec{e} representa o campo elétrico real e $\hat{\chi}$ representa o tensor susceptibilidade dielétrica (linear).

$$\vec{e} = \Re \{ \vec{E} e^{ikz - i\omega t} \} = \frac{1}{2} \left[\vec{E} e^{ikz - i\omega t} + cc \right] \quad (7.37)$$

e o mesmo para os outros \vec{b} , \vec{d} , etc. No caso de um material não linear, a polarização elétrica pode ser escrita como uma parte linear e outra não-linear, da seguinte forma

$$p_i = p_i^L + p_i^{NL} \quad p_i^L = \sum_j \varepsilon_o \chi_{ij} e_j \quad p_i^{NL} = \sum_{j,k} \varepsilon_o \chi_{i,j,k}^{(2)} e_j e_k \quad (7.38)$$

onde os sub-índices i, j, k indicam as diferentes componentes dos respectivos vectores. Da Eq.(7.28) podemos calcular

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{e}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{e}) - \nabla^2 \vec{e} \quad (7.39)$$

$$\nabla^2 \vec{e} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 p_i^{NL}}{\partial t^2} \quad (7.40)$$

Suponhamos que se superpõem 3 ondas (do tipo das indicadas em Eq.(7.37)), cada uma com uma freqüência diferente ω_1 , ω_2 e ω_3 , que vamos supor ser escalares para não complicar os cálculos, assim

$$e = e_1^{\omega_1}(z, t) + e_2^{\omega_2}(z, t) + e_3^{\omega_3}(z, t) \quad (7.41)$$

Nesse caso podemos escrever a Eq.(7.40) para cada uma das três componentes, e em particular para $e_3^{\omega_3}$, podemos escrever:

$$\nabla^2 e_3 - \mu \sigma_3 \frac{\partial e_3}{\partial t} - \mu \varepsilon_3 \frac{\partial^2 e_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 p_3^{NL}}{\partial t^2} \quad (7.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 p_3^{NL}}{\partial t^2} = & \frac{\mu \varepsilon_o \chi_{eff}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j,k} \left[E_j(z) E_k(z) e^{i(k_j + k_k)z - i(\omega_j + \omega_k)t} \right. \\ & \left. + E_j(z) E_k^*(z) e^{i(k_j - k_k)z - i(\omega_j - \omega_k)t} \right] \end{aligned} \quad (7.43)$$

No termo à direita da Eq.(7.43) existem termos em $\omega_1 + \omega_2$ e $\omega_1 - \omega_2$, entre outros. Se nenhum desses valores corresponde ao ω_3 , não haverá termo “gerador” para essa componente $e_3^{\omega_3}$ na Eq.(7.42). Em câmbio, se ocorre que

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 \quad (7.44)$$

então podemos reescrever a Eq.(7.42) assim

$$\begin{aligned} \nabla^2 e_3 - \mu \sigma_3 \frac{\partial e_3}{\partial t} - \mu \varepsilon_3 \frac{\partial^2 e_3}{\partial t^2} = & \frac{\mu \varepsilon_o \chi_{eff}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1(z) E_2^*(z) e^{i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t} \\ & + cc \end{aligned} \quad (7.45)$$

o que significa que o termo da direita na Eq.(7.45) é o gerador para a onda $e_3^{\omega_3}$ e assim ela poderia ser produzida pela combinação dos outros dois termos de freqüências diferentes, graças ao meio não linear onde eles se propagam.

Podemos ainda escrever:

$$\begin{aligned}\nabla^2 e_3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[E_3(z) e^{ik_3 z} - i\omega_3 t + cc \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(-k_3^2 E_3(z) + i2k_3 \frac{\partial E_3(z)}{\partial z}) e^{ik_3 z} - i\omega_3 t + cc \right]\end{aligned}\quad (7.46)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[-i\omega_3 E_3(z) e^{ik_3 z} - i\omega_3 t + cc \right] \quad (7.47)$$

$$\frac{\partial^2 e_3}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left[-\omega_3^2 E_3(z) e^{ik_3 z} - i\omega_3 t + cc \right] \quad (7.48)$$

Substituindo os resultados acima na Eq.(7.45) obtemos

$$\begin{aligned}\left[-k_3^2 E_3(z) + i2k_3 \frac{\partial E_3(z)}{\partial z} \right] e^{ik_3 z} - i\omega_3 t + (i\omega_3 \mu \sigma_3 + \omega_3^2 \mu \varepsilon_3) E_3(z) e^{ik_3 z} - i\omega_3 t &= \\ = -\mu \varepsilon_o \chi_{\text{eff}}^{(2)} (\omega_1 - \omega_2)^2 E_1(z) E_2(z)^* e^{i(k_1 - k_2)z} - i(\omega_1 - \omega_2)t &\quad (7.49)\end{aligned}$$

$$\text{sendo } k_3^2 = \omega_3^2 \mu \varepsilon_3 \quad (7.50)$$

Para o caso

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 \quad (7.51)$$

a equação acima fica da forma

$$\frac{\partial E_3(z)}{\partial z} + \frac{\sigma_3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} E_3(z) = i \frac{\omega_3 \varepsilon_o \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} E_1(z) E_2(z)^* e^{i(k_1 - k_2 - k_3)z} \quad (7.52)$$

e similarmente para as outras duas ondas

$$\frac{\partial E_1(z)}{\partial z} + \frac{\sigma_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} E_1(z) = i \frac{\omega_1 \varepsilon_o \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} E_2(z) E_3(z) e^{i(k_2 + k_3 - k_1)z} \quad (7.53)$$

$$\frac{\partial E_2(z)}{\partial z} + \frac{\sigma_2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} E_2(z) = -i \frac{\omega_2 \varepsilon_o \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} E_1(z) E_3(z) e^{i(k_3 - k_1 + k_2)z} \quad (7.54)$$

É interessante notar que as Eqs(7.52-7.54) são o fundamento matemático da chamada “oscilação paramétrica” da “geração do segundo harmônico” e do fenômeno conhecido por “up-conversion”, fenômenos estes que são essencialmente a mesma coisa do ponto de vista de suas bases físicas.

7.2.1 Oscilação paramétrica

A Eq.(7.52) junto com a condição em Eq.(7.51) dão lugar ao que se chama “oscilação paramétrica” ou “excitação paramétrica” que é quando as duas ondas $e_1^{\omega_1}$ e $e_2^{\omega_2}$ se combinam para dar origem a uma outra $e_3^{\omega_3}$, de freqüência menor.

7.2.2 Geração do segundo harmônico

Trata-se de um fenômeno indo na direção inversa do tratado no item anterior: uma onda de freqüência menos acaba gerando outra de freqüência duas vezes maior. Este caso se caracteriza pela condição

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega \quad \omega_1 = 2\omega \quad (7.55)$$

Neste caso, se desprezamos a absorção ($\sigma_1 \approx 0$), a Eq.(7.53) fica assim

$$\frac{\partial E^{2\omega}(z)}{\partial z} + = i \frac{2\omega \varepsilon_o \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{2\omega}}} (E^\omega(z))^2 e^{i(2k^\omega - k^{2\omega})z} \quad (7.56)$$

e supondo que o feixe “bomba” $E^\omega(z)$ permaneça sensivelmente inalterado, e com a condição inicial $E(0)^{2\omega} = 0$, a Eq.(7.56) fica

$$E^{2\omega}(l) = i\omega d \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{2\omega}}} (E^\omega(z))^2 \frac{e^{i(2k^\omega - k^{2\omega})l} - 1}{i(2k^\omega - k^{2\omega})} \quad (7.57)$$

$$I^{2\omega}(l) = \omega^2 d^2 \frac{\mu}{\varepsilon_{2\omega}} |E^\omega|^4 \frac{\sin^2 \frac{2k^\omega - k^{2\omega}}{2} l}{(2k^\omega - k^{2\omega} 2l)^2} l^2 \quad (7.58)$$

$$\text{onde } I^{2\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{2\omega}}{\mu}} |E^{2\omega}|^2 \quad (7.59)$$

$$\eta = \frac{I^{2\omega}}{I^\omega} = 2 \left(\frac{\mu}{\varepsilon_{2\omega}} \right)^3 \omega^2 d^2 l^2 \frac{\sin^2 \frac{2k^\omega - k^{2\omega}}{2} l}{(2k^\omega - k^{2\omega} 2l)^2} l^2 I^\omega \quad (7.60)$$

7.2.3 “Up-conversion”

É muito parecido ao anterior excepto pelo fato que agora a freqüência da onda gerada (ω_1) não é o dobro da inicial mas a soma de duas ondas de menor freqüência, como descrito pela Eq.(7.53), com a condição

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad (7.61)$$

Parte II

Experimentos

Esta parte do livro descreve e propõe experimentos ilustrativos da parte teórica. Alguns estão descritos muito detalhadamente, como o caso da velocimetria Doppler, e Birrefringência; outros como Difração, cristais fotorrefrativos, e medida de vibrações, estão apenas superficialmente formulados, seja porque a parte teórica já os descreve detalhadamente, seja porque a formulação mais detalhada fugiria do contexto deste livro, como é o caso da medida de vibrações por holografia, que está aqui citada apenas para lembrar da sua importância e estimular o especialista que estiver familiarizado com esta técnica, a pô-la em operação.

Estes experimentos são apenas propostas, mais ou menos incompletas, e sua execução dependerá obviamente da disponibilidade do laboratório a ser utilizado e da experiência e interesse do professor encarregado de por estes experimentos em prática. Existe pouca literatura sobre este tipo de experimentos e por isso acredito que a inclusão deles como complemento da parte teórica vai trazer grandes benefícios para os estudantes envolvidos.

Capítulo 8

Óptica Geométrica

Sistema de lentes

8.1 Objetivos

Estudo de lentes finas, grossas e sistema de lentes. Cálculo teórico e medida experimental da posição dos planos cardinais.

8.2 Metodologia

1. Medir as características físicas (espessura no centro, raios de curvatura das superfícies, etc.) de uma lente fina e com essas informações calcular os parâmetros (a , b e c) que caracterizam a matriz dessa lente e, em função deles calcular os planos cardinais da lente.
2. Medir experimentalmente as posições dos planos cardinais e comparar esses resultados com os obtidos no item acima. Para se medir experimentalmente os parâmetros de uma lente ou de um sistema de lentes, uma técnica recomendada é medir a amplificação de um objeto pelo sistema em função da distância da imagem e a inversa da amplificação em função da distância do objeto. É importante escolher corretamente as condições experimentais de maneira a minimizar as incertezas experimentais: por ex. não medir distâncias perto do foco pois nessas condições essas distâncias variam muito pouco e consequentemente os erros são grandes. A medida experimental pode ser feita se graficando β vs ℓ' (para calcular a e c) e $1/\beta$ vs ℓ (para calcular a e b) por regressão linear, como ilustrado nas Figs.8.3 e 8.4.
3. A discrepância entre os valores medidos experimentalmente e calculados a partir da medida sobre a lente, podem decorrer de uma escolha errada do índice de refração da lente. Lembre que o vidro óptico mais comum é o BK7 (vide Fig.1.16) cujos índice varia bastante com λ . Procure recalcular os parâmetros da lente nas Eqs.(1.13-1.15) ajustando o índice de refração até obter uma melhor concordância com os resultados das regressões lineares. Trata-se também de uma forma interessante de se achar o índice da lente.
4. Montar duas lentes (de preferência iguais, e se possível, alguma das que já foram estudadas no item anterior) num trilho, e mantendo o sistema de lentes fixo, repita o procedimento de medida dos planos de uma lente, agora para o conjunto das duas. Escolha o espaçamento entre as lentes de forma a facilitar a medida, ou seja, para que a imagem não fique inconvenientemente pequena nem próxima demais das lentes. Verifique se resultado experimental corresponde com o cálculo para os sistema feito apartir das matrizes das duas lentes.
5. Reposicione as duas lentes (agora sim as duas devem ser iguais) de forma que a distância entre ambas seja quatro vezes ($4f_1$) a distância focal ($f_1 = f_2$) de cada lente. Faça a imagem de um objeto (papel milimetrado transparente) colocado a uma distância $2f_1$ antes da primeira lente. Meça o “campo de observação” nessas condições. A seguir coloque uma terceira lente igual às anteriores, a igual distância entre as duas já existentes e verifique que o tamanho do “campo” do sistema aumentou significativamente. Quantifique esse aumento.

8.3 Exemplo

A figura 8.1 mostra uma objetiva fotográfica medida no experimento descrito acima. Os gráficos nas Figs. 8.3 e 8.4 mostram as curvas de β vs distância imagem (ℓ') e $1/\beta$ vs distância objeto (ℓ), ambas distâncias medidas desde os vértices das lentes de saída e de entrada respectivamente. As posições dos planos principais de entrada e de saída (indicados na Fig.8.2) calculados desses graficos são:

$$LH = -8.54\text{mm} \quad LH' = -30.12\text{mm} \quad (8.1)$$

$$\text{foco} \quad 1/a = (59 + 54)/2 \approx 56\text{mm} \quad (8.2)$$



Figura 8.1: Objetiva fotográfica estudada

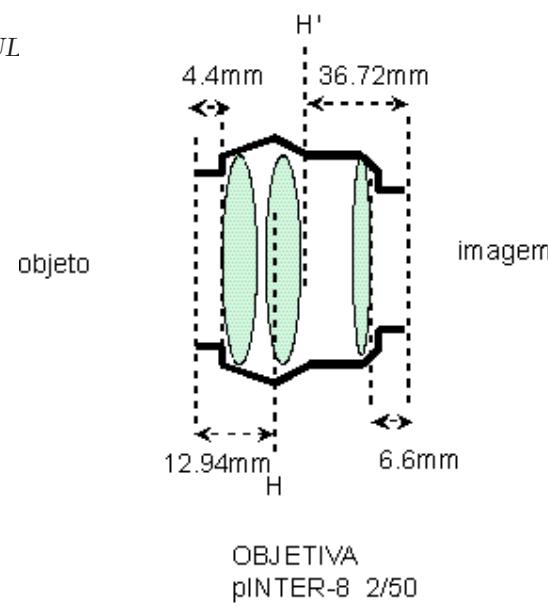


Figura 8.2: Esquema da objetiva da Fig.8.1, mostrando o possível arranjo do sistema de lentes, e posição dos planos principais e vértices das lentes.

O valor nominal do foco na lente está indicado como sendo 50 mm e não 56 mm como medido no experimento.

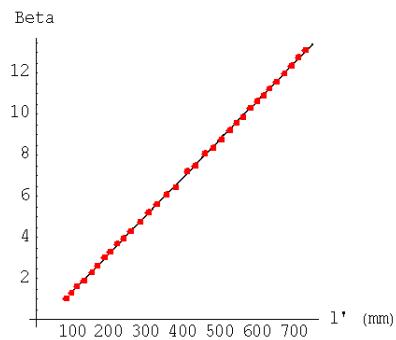


Figura 8.3: Amplificação vs distância imagem $\beta = c - al'$ dando $c = 0.44$ e $a = 0.0185 \text{ mm}^{-1}$ para o caso da objetiva da Fig.8.1

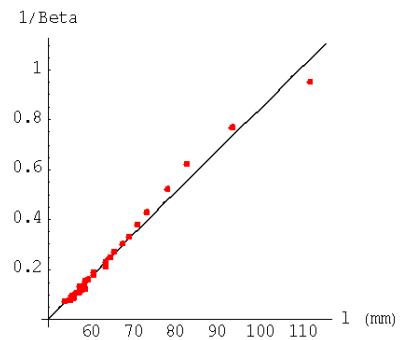


Figura 8.4: Amplificação reciproca vs distância objeto $1/\beta = b - al$ dando $b = 0.84$ e $a = 0.0169 \text{ mm}^{-1}$ para o caso da objetiva da Fig.8.1

Capítulo 9

Índice de refração

9.1 Objetivos

Trata-se de medir o índice de refração de materiais transparentes em volume, na forma de lâminas grossas e de filmes finos.

9.2 Métodos

Vamos abordar alguns métodos adequados para os diferentes objetivos listados acima, baseados no ângulo de desvio mínimo, no ângulo de Brewster e na interferência.

9.2.1 Ângulo de desvio mínimo

Trata-se de um método [8] apropriado para se medir o índice de refração de um prisma de material transparente como vidro, por exemplo. O experimento é feito utilizando um goniômetro e uma lâmpada de descarga com varias linhas espectrais que podem ser utilizadas para fazer medidas em diferentes comprimentos de onda.

1. Para cada linha espectral existe um ângulo de desvio mínimo δ_m (menor ângulo entre o raio incidente e o raio emergente do prisma) que está relacionado com o ângulo α do vértice do prisma e com seu índice de refração n [8]:

$$n = \frac{\sin(\alpha + \delta_M)/2}{\sin \alpha/2} \quad (9.1)$$

O goniômetro permite medir o ângulo do vértice, o que finalmente permitirá calcular o índice. Estime a precisão da medida e compare-a com a dos outros métodos utilizados.

2. Repetindo o experimento para as diferentes linhas espectrais da lâmpada, podemos calcular a dispersão cromática do índice e comprovar se ela verifica a equação de Cauchy [8].

9.2.2 Ângulo de Brewster

Trata-se de medir o ângulo de Brewster da interface material-ar (onde “material” representa o objeto de estudo, que pode ser uma lâmina de vidro) para calcular o índice desse material. Para isso podem se utilizar diferentes fontes de luz mais ou menos monocromáticas, desde que se usem feixes paralelos para que o ângulo de incidência possa ficar bem definido.

Se o experimento é feito com um laser com relativamente grande comprimento de coerência, o material sob estudo deve estar sob a forma de um prisma, ou na forma de uma lâmina cuja face posterior esteja despolida, para evitar a visualização das franjas formadas pela interferência entre ambas faces da lâmina, que dificultam a visualização do mínimo de intensidade que serve para identificar o ângulo de Brewster. A medida pode ser feita visualmente ou se medindo a luz refletida com um fotodetector mecanicamente acoplado. Estime a precisão da medida e compare-a com a dos outros métodos utilizados.

Pode-se usar também LEDs de diferentes comprimentos de onda, numa montagem como a esquematizada na Fig.9.1, onde a deteção se faz a olho nu, observando a reflexão do LED na lâmina, cuidando para centralizar sempre a imagem no meio da lâmina, para minimizar erros de paralaxe. Como a luz refletida é geralmente demasiado fraca para se encontrar a normal da placa por reflexão da luz, deve-se medir o ângulo de mínima reflexão de um lado e o sométrico do outro, para dispensar a medida direta da posição da normal da lâmina. Neste caso não é necessário despolarizar a segunda face da lâmina pois a luz não é coerente o batante para formar franjas de interferência em materiais com espessura da ordem

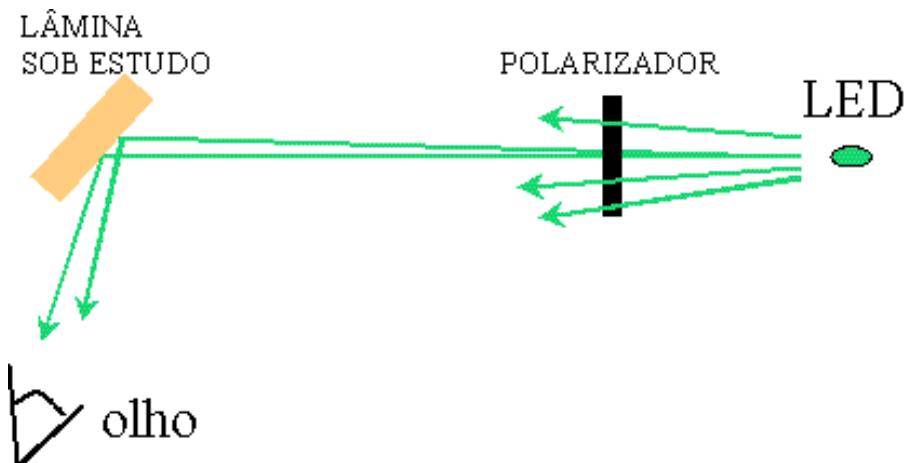


Figura 9.1: Medida de ângulo de Brewster usando LEDs e observando o LED refletido na lâmina, a olho nu.

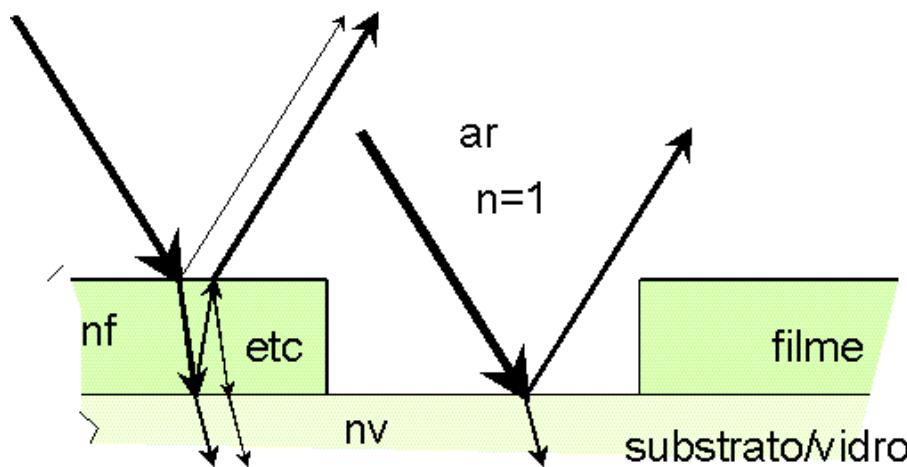


Figura 9.2: Esquema do experimento de Abélès.

do mm. É importante colocar a fonte de luz o mais afastado possível da lâmina a ser medida, para trabalhar com raios aproximadamente paralelos. Se a precisão da medida for boa o bastante, podemos medir a dispersão cromática do material, usando LEDs de diferentes comprimentos de onda, mesmo que o polarizador utilizado não seja muito efetivo em alguns desses comprimentos de onda.

9.2.2.1 Filmes finos: Método de Abélès

A medida do ângulo de Brewster [7] é utilizada para se medir o índice de refração em sólidos transparentes. A medida se complica quando se trata de medir o índice de um filme fino, devido às reflexões nas diferentes interfaces (filme-substrato e substrato-ar). O método de Abélès [23, 24] permite fazer facilmente a medida, mesmo nessas condições adversas. Precisamos utilizar um filme depositado sobre vidro (ou outro substrato transparente) onde uma pequena faixa do filme tenha sido removida (no caso das Figs.9.3-9.5 a parte sem filme está no centro) e onde o substrato apareça livre e limpo. O método baseia-se no fato que, para uma polarização TM da luz incidente num interfase, a luz nela refletida é mínima quando ela incide sob o ângulo de Brewster [7].

O esquema do experimento está indicado na Fig.9.2 onde se pode ver um filme (com índice de refração n_f) sobre um substrato transparente (vidro com índice n_v). Uma parte do filme foi retirado de forma a expor, nesse local, o substrato diretamente ao ar. Um feixe de luz paralelo incide sobre o filme e sobre o substrato, sendo largo o suficiente para iluminar ambas as partes, a coberta pelo filme e a do substrato exposto.

Prove que, se o raio de luz tiver a polarização correta, e se incidir no filme sob o ângulo de Brewster para a interface filme-ar, a luz refletida na parte coberta e descoberta do substrato tem a mesma intensidade. Esse critério nos permite

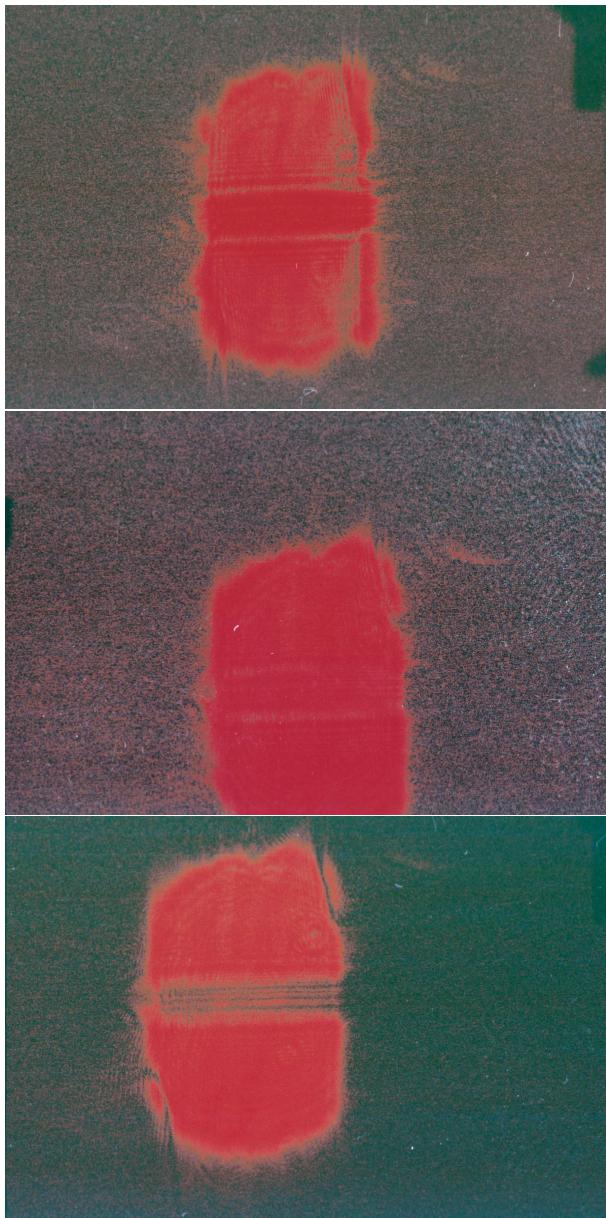


Figura 9.3: Experimento de Abélès mostrando a imagem do filme com a luz incidindo num ângulo maior que o ângulo de Brewster: o substrato sem filme (tarja central) está mais brilhante

Figura 9.4: Experimento de Abélès mostrando a imagem do filme com a luz incidindo no ângulo de Brewster: o substrato sem filme (tarja central) tem o mesmo brilho que o restante da placa com filme

Figura 9.5: Experimento de Abélès mostrando a imagem do filme com a luz incidindo num ângulo menor que o ângulo de Brewster: o substrato sem filme (tarja central) está mais escuro

encontrar e medir o ângulo de Brewster e assim calcular nf . O substrato é grosso o suficiente ou tem sua segunda interface (não indicada no esquema) despolida para podermos não considerar as reflexões nela. Observe as fotografias Figs.9.3-9.5 mostrando as diferentes situações na determinação do ângulo.

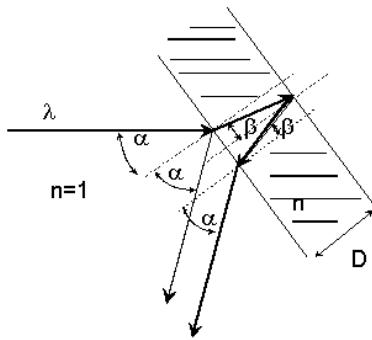


Figura 9.6: Interferência numa lâmina de faces paralelas.

O experimento também pode ser feito visualmente ou instrumentalmente utilizando um fotodetector mecanicamente acoplado, medindo-se uma vez sobre a parte do substrato com filme e a outra sobre a parte do substrato sem filme. É interessante fazer a medida em diferentes comprimentos de onda para poder calcular a dispersão cromática procedendo como na sec..

9.2.3 Interferência numa lâmina de faces paralelas

Trata-se de medir a espessura óptica de uma lâmina transparente de faces paralelas, utilizando a interferência de um feixe laser direto (de baixa potência) se refletindo em cada uma das duas faces. Sabendo a espessura óptica e medindo-se a espessura geométrica com um paquímetro, podemos calcular o índice de refração.

- Mostre que para o caso do ângulo de incidência ser muito pequeno ($\alpha \ll 1$), a espessura geométrica da lâmina D pode ser calculada assim [6]:

$$D = \frac{\lambda n}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \quad (9.2)$$

onde n é o índice de refração do vidro e λ é o comprimento de onda da luz (suposta coerente). O ângulo α_1 é o ângulo de incidência do feixe onde pode-se ver um mínimo de interferência. O ângulo α_2 corresponde ao próximo mínimo de interferência.

- Para realizar a medida é necessário se dispor de um sistema mecânico capaz de produzir suaves movimentos angulares para encontrar os ângulos de interferência sucessivos.
- Meça a espessura óptica de uma lâmina “porta-objeto” de microscópio com espessura aproximada de 1mm, iluminando com um laser de He-Ne de $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$
- Meça a espessura geométrica da lâmina e calcule seu índice de refração.

Capítulo 10

Interferometria em filmes finos

10.1 Objetivos

Medir a espessura óptica de um filme fino sobre um substrato transparente, utilizando a modulação interferométrica superposta sobre o espectro de transmissão medido num espectrofotômetro

10.2 Introdução

O comprimento de coerência da luz num espectrofotômetro comercial pode ser ajustado de forma de ser maior que a espessura de um filme suficientemente fino, mas muito menor que a espessura do substrato. Nesse caso o espectro de transmissão do filme ficará modulado pela interferência produzida pelas duas faces do filme, como descrito na sec.4.5 [6, 8, 7]. Dessa modulação é possível calcular a espessura óptica do filme e, eventualmente, sua dispersão cromática.

10.3 Roteiro proposto

- Ajustar a fenda do espectrofotômetro para observar a modulação devida ao filme mas nenhuma devida ao substrato
- fazer um espectro de transmissão do filme/substrato e a partir da modulação observada, calcular a espessura óptica do filme
- com os dados acima, estimar a dispersão cromática do índice do filme

Capítulo 11

Birrefringência-I

Medida da birrefringência em lâminas e/ou filmes

11.1 Objetivo

Medir a diferença de índices de refração (ou de caminho óptico ou de fase) entre os eixos ordinário e extraordinário num filme ou numa lâmina birrefringente.

11.2 Introdução

Alguns cristais naturais como a calcita e o quartzo apresentam birrefringência natural. Muitos filmes plásticos comerciais (por exemplo as transparências usadas para retro-projetores) também apresentam birrefringência. Neste último caso isso ocorre devido ao processo de fabricação, que mantém uma direção preferencial de tração mecânica que provoca um certo grau de alinhamento das cadeias moleculares poliméricas

A luz linearmente polarizada ao passar por uma lâmina birrefringente fica, em geral, elipticamente polarizada. A formulação matemática deste processo é relativamente simples, porém um pouco trabalhosa e encontra-se parcialmente descrita nas refs. [25, 26]. Leve em conta que ao representar a polarização da luz na saída da lâmina como

$$x = x_o \cos \omega t \quad (11.1)$$

$$y = y_o \cos(\omega t + \phi) \quad (11.2)$$

resulta uma equação

$$\frac{x^2}{x_o^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - 2 \frac{xy}{x_o y_o} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (11.3)$$

Essa equação representa uma elipse rotada de um ângulo α [27, 6] onde

$$\tan 2\alpha = \frac{2x_o y_o}{x_o^2 - y_o^2} \cos \phi \quad (11.4)$$

cujos semi-eixos a e b (nas direções x e y respectivamente) são:

$$a^2 = \frac{x_o^2 y_o^2 \sin^2 \phi}{y_o^2 \cos^2 \alpha + x_o^2 \sin^2 \alpha - x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (11.5)$$

$$b^2 = \frac{x_o^2 y_o^2 \sin^2 \phi}{y_o^2 \sin^2 \alpha + x_o^2 \cos^2 \alpha + x_o y_o \sin 2\alpha \cos \phi} \quad (11.6)$$

11.3 Metodologia

Propomos um procedimento simples para se medir a birrefringência de uma lâmina, no caso uma lâmina retardadora comercial, de ordem zero. Ela é construída com duas placas de quartzo cujas espessuras diferem no valor d . Elas são superpostas de forma que o eixo rápido de uma se superponha com o lento da outra. Nesse caso a diferença de fase entre os dois eixos é

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n \quad \Delta n \equiv n_e - n_o \quad (11.7)$$

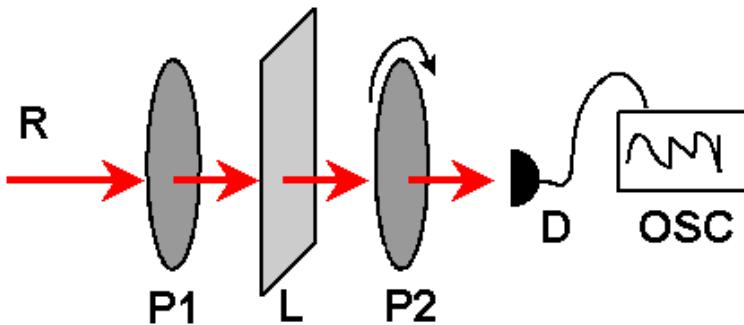


Figura 11.1: Esquema da montagem para medir birrefringência em filmes: raio de luz (R), polarizador graduado ($P1$), lâmina sob estudo (L), polarizador rotando om velocidade constante ($P2$), fotodetector (D) e osciloscópio (OSC)

A lâmina L é colocada na montagem ilustrada na Fig.11.1 sendo que as fontes de luz utilizadas podem ser lasers de diversos comprimentos de onda e/ou LEDs ou outras fontes de luz. É importante utilizar luz de mais de um comprimento de onda para levantar possíveis indeterminações em ϕ . Trata-se basicamente de se produzir luz linearmente polarizada com o polarizador $P1$ que, após passar pela lâmina sob estudo, fica elipticamente polarizada; a elipticidade pode ser medida com o auxílio do polarizador rotante $P2$, o fotodetector D e um osciloscópio. No osciloscópio aparecerá uma onda senoidal, cujos valores máximo (I_M) e mínimo (I_m) correspondem aos eixos maior e menor respectivamente da elipse de polarização. Com o polarizador $P1$ procuram-se a posição dos eixos rápido e lento da lâmina e a seguir posiciona-se o polarizador a 45° com eles, onde I_M/I_m será mínimo. Pode-se ajustar essa posição verificando esse mínimo no osciloscópio; é aconselhável tomar varias medidas nessa região para garantir a medida desse valor mínimo para I_M/I_m . Com esse valor é possível calcular a diferença de fase pela fórmula:

$$\cos \phi = \frac{I_M/I_m - 1}{I_M/I_m + 1} \quad (11.8)$$

Com esse valor de ϕ calcula-se ainda

$$d \Delta n = \pm \frac{\phi \lambda}{2\pi} + N\lambda/2 \quad (11.9)$$

onde N é um número inteiro. Note que o sinal \pm assim como N são necessários por causa da indeterminação de ϕ calculada de $\cos \phi$.

Uma sugestão: procure uma tabela (veja por ex. [28]) com os valores de Δn para o quartzo na faixa de comprimentos de onda da luz utilizada, e calcule, da Eq.11.9, d

$$d = \pm \frac{\phi \lambda}{2\pi \Delta n} + N \frac{\lambda}{2\Delta n} \quad (11.10)$$

que deve ser mesmo invariante. Calcule o valor médio obtido para todos os λ s e verifique para qual comprimento de onda na faixa visível (400-700nm) essa lâmina se comporta como retardadora de $\lambda/2$ ou $\lambda/4$.

Outra sugestão: é possível que os polarizadores utilizados não sejam muito eficientes para polarizar alguns comprimentos de onda, principalmente com $\lambda > 640$ nm. Nessas casos, o minimo da senoide observada no osciloscópio para a luz sem a lâmina birrefringente não vai ser zero. A experiência mostra que isso pode ser corregido utilizando esse minimo como referência de zero para se medir o minimo com a propria lâmina. Esse foi o procedimento utilizado para se obter os dados na tabela 11.2.

11.3.1 Exemplo

Segundo o procedimento acima, medimos/calculamos ϕ para os comprimentos de onda indicados na Tabela 11.2, para calcular o valor médio da espessura \bar{d} da lâmina. Com esses dados fizemos o gráfico, que aparece ao lado da tabela, para concluir que se trata de uma lâmina retardadora em $\lambda/4$, de ordem zero, para $\lambda = 575$ nm. Uma outra alternativa é fazer o gráfico correspondente à Eq.(11.10), para os diferentes comprimentos de onda e verificar para quais valores inteiros de N existe interseção das curvas, como ilustrado na Fig.11.2, onde alguns comprimentos de onda se intersetam em $N = 0$ dando $d=15880 \mu\text{m}$ e outros dois em $N = -1$ dando $d=-15500 \mu\text{m}$ (o sinal negativo não tem importância neste caso). A Fig.11.3 mostra as mesmas curvas exceto para 504 e 524 nm, em cujo caso usou-se o sinal de "menos" para a phase ϕ , o que resultou numa interseção em $N = 1$ dando $d=15630 \mu\text{m}$.

Tabela 11.1: Índice de refração do Quartzo [8]

λ nm	cristalino		fundido
	ordinário	extraordinário	
200.060	1.64927	1.66227	
226.503	1.61818	1.62992	1.52308
257.304	1.59622	1.60714	1.50379
274.867	1.58752	1.59813	1.49617
303.412	1.57695	1.58720	1.47867
340.365	1.56747	1.57738	1.46968
404.656	1.55716	1.56671	1.46690
486.133	1.54968	1.55898	1.46318
546.072	1.54617	1.55535	1.46013
579.066	1.54467	1.55379	
589.290	1.54425	1.55336	1.45845
656.278	1.54190	1.55093	1.45640
706.520	1.54049	1.54947	1.45517
766.494	1.53907	1.54800	
794.763	1.53848	1.54739	1.45340
844.670	1.53752	1.54640	
1014.06	1.53483	1.54360	

Tabela 11.2: Medidas numa lâmina birrefringente comercial de quartzo

λ (nm)	Δn	$\pm\phi + \pi$	d (μm)
700	0.008984	1.2178	15.099
670	0.009009	1.388	16.428
634	0.009053	1.4063	15.672
593	0.009104	1.4929	16.005
524	0.009216	-1.4223+ π	15.558
504	0.009253	-1.3564+ π	15.476

$$\bar{d} = 15.706 \mu\text{m}$$

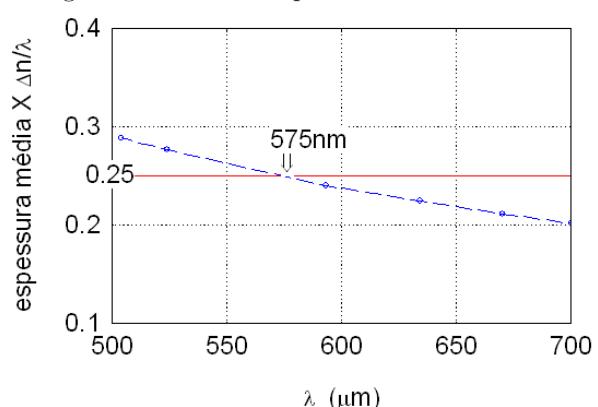


Gráfico de $\bar{d} \times \Delta n$ em função de λ utilizando os dados da tabela ao lado. A curva mostra que essa lâmina é $\lambda/4$, de ordem zero, para $\lambda \approx 575$ nm

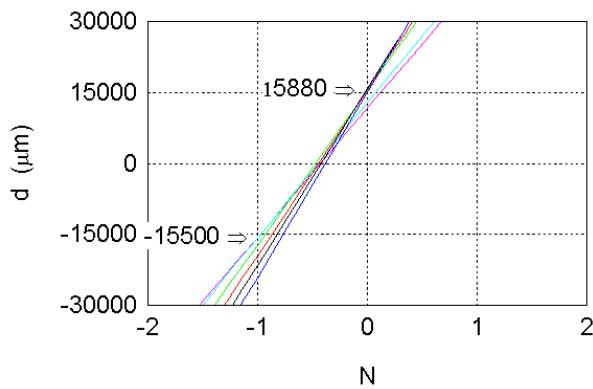


Figura 11.2: Gráfico da espessura d da lâmina birrefringente em função do número de ordem N para diferentes λ : 504nm (roxo), 524nm (celeste), 593nm (verde), 634nm (vermelho), 670nm (preto) e 700nm (azul)

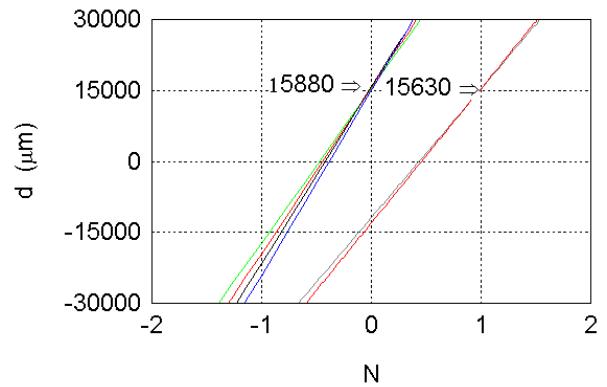


Figura 11.3: Gráfico da espessura d da lâmina birrefringente em função do número de ordem N para diferentes λ : 504nm (cinza), 524nm (celeste), 593nm (verde), 634nm (vermelho), 670nm (preto) e 700nm (azul), como na Fig.11.2, mas com valores negativos para as fases de 504 e 524 nm.

11.3.2 Exemplo

A Fig.11.4 mostra um resultado típico obtido no laboratório para uma outra lâmina de retardo comercial. Com os dados indicados nessa figura, verifique que a lâmina estudada representa de fato uma lâmina $\lambda/4$ para $\lambda = 633\text{nm}$. A Fig.11.5 mostra a relação I_M/I_m para a mesma lâmina usada na Fig.11.4 mas agora medida usando o laser He-Ne de 633nm e mais 4 leds bastante monocromáticos. As fontes de luz foram sendo sucessivamente trocadas na montagem sem qualquer alteração na posição da lâmina, polarizador de entrada e fotodetector.

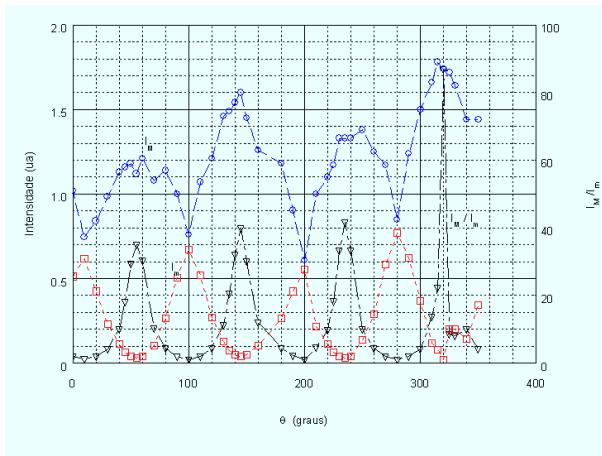


Figura 11.4: Medida da intensidade máxima I_M (\circ), mínima (\square) e razão I_M/I_m (∇), para uma lâmina de retardo cometral de ordem zero, com feixe direto de um laserHe-Ne com $\lambda=633$ nm. O valor do mínimo para I_M/I_m é 1.13.

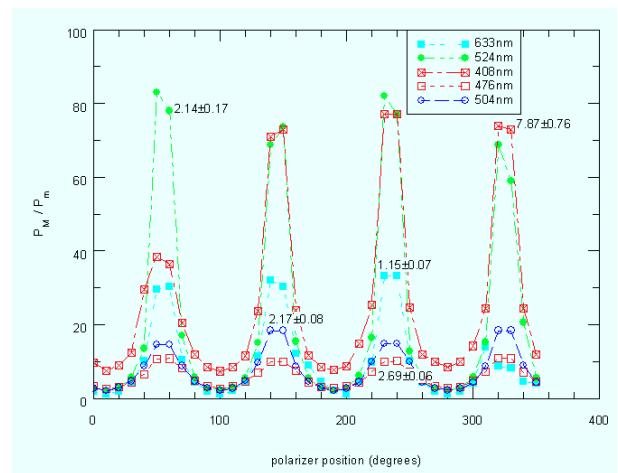


Figura 11.5: Potência máxima sobre mínima calculada para uma luz elipticamente polarizada na saída da mesma lâmina de retardo estudada na Fig.11.4, para diferentes posições angulares do polarizador de entrada, e para iluminações de diferente comprimento de onda. O número ao lado de cada curva representa o valor para o mínimo da curva e as diferentes iluminações correspondem aos leds indicados na Fig.16.4.

Capítulo 12

Birrefringência-II

Fabricação de uma lâmina de retardo de fase

12.1 Objetivo

Utilizando as técnicas de medida descritas no capt.11 e as sugestões no artigo [29] fabricar uma lâmina de retardo utilizando filmes plásticos para transparências como os utilizados em impressoras deskjet.

12.2 Metodologia

- Verificar teoricamente se é possível se combinar dois filmes de birrefringência conhecida para se obter um outro num valor intermediário entre o que resultaria da soma e da diferença entre os dois.
- Utilizando as técnicas no Capt.11 medir a birrefringência no centro de alguns filmes.
- Fazer uma combinação entre dois ou mais filmes já medidos para obter um que seja $\lambda/2$ ou $\lambda/4$ para algum comprimento de onda pré-determinado

Capítulo 13

Velocimetria Doppler-I

Estudo do movimento de um alto-falante

13.1 Objetivos

Estudar o movimento oscilatório de um alto-falante comercial. Em particular, mas não apenas, medir a amplitude de oscilação, velocidade máxima e linearidade da resposta (tensão aplicada *vs* amplitude de oscilação) do alto-falante.

13.2 Introdução

O efeito Doppler, que resulta na mudança da freqüência da luz ao se refletir num objeto em movimento, permite medir a velocidade desse objeto. Para isso se utilizam técnicas de interferometria num interferômetro de Michelson simplificado. A teoria está descrita em [7] e nas secs.4.1.4 e 4.1.5. Uma descrição mais completa do uso desta técnica foi publicada por Freschi e colaboradores [30].

13.3 Metodologia

1. Posicionar o alvo (neste caso um alto-falante) à distância correta do aparelho, lembrando que os dois braços do interferômetro de Michelson devem ser aproximadamente iguais.
2. Observar o sinal do detector, na saída do interferômetro, num osciloscópio: pelo número de ciclos podemos calcular a amplitude do movimento e pelo menor período podemos calcular a velocidade máxima.
3. Medindo-se a amplitude para diferentes tensões aplicadas podemos estudar a linearidade da resposta do alto-falante.
4. Pela relação existente entre a amplitude e a velocidade máxima podemos verificar se trata-se de uma oscilação harmônica, o que também está relacionado com a linearidade da resposta.

Capítulo 14

Velocimetria Doppler-II

Estudo eletromecânico de um alto-falante

14.1 Objetivo

Estudo de um alto-falante e determinação dos parâmetros eletro-mecânicos mais importantes.

14.2 Teoria: Oscilador harmônico amortecido

O movimento de um alto-falante pode ser caracterizado como uma oscilação harmônica com amortecimento onde o movimento sem excitação é descrito pela equação

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (14.1)$$

cuja solução é

$$x = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_f t + \phi) \quad (14.2)$$

$$\text{com } \gamma \equiv b/m \quad \omega_o^2 \equiv k/m \quad \omega_f^2 = \omega_o^2 - (\gamma/2)^2 \quad (14.3)$$

$$\text{sendo: } \gamma/2 \ll \omega_o \text{ e } \omega_f \approx \omega_o - \frac{1}{8}\gamma^2/\omega_o \quad (14.4)$$

A energia total desse oscilador é

$$W = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (14.5)$$

e sua taxa de variação temporal é

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dW}{dx} \frac{dx}{dt} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -b\dot{x}^2 \leq 0 \quad (14.6)$$

Da Eq.(14.6) se conclui que a energia do oscilador diminui com o tempo, o que era de se esperar por se tratar de uma oscilação com amortecimento. Substituindo a expressão para x em Eq.(14.2) na Eq.(14.5), resulta

$$W = \frac{1}{2}A^2 m e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma^2}{4} \cos(2\omega_f t + 2\phi) + \omega_o^2 + \frac{\gamma\omega_f}{2} \sin(2\omega_f t + 2\phi) \right] \quad (14.7)$$

e a média temporal num ciclo fica assim

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2}A^2 m \omega_o^2 e^{-\gamma t} \quad \text{para } \gamma \ll \omega_o \quad (14.8)$$

$$-\frac{d\langle W \rangle}{dt} = \frac{1}{2}\gamma A^2 m \omega_o^2 e^{-\gamma t} \quad (14.9)$$

Assim, a taxa de dissipação relativa de energia é

$$-\frac{1}{\langle W \rangle} \frac{d\langle W \rangle}{dt} = \gamma \quad (14.10)$$

14.2.1 Ressonância forçada

Neste caso a Eq.(14.1) fica assim

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos(\omega t) \quad (14.11)$$

cuja solução particular é

$$x = A \cos(\omega t + \phi_f) \quad (14.12)$$

$$\tan \phi_f = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} \quad (14.13)$$

$$A = -\frac{F/m}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (14.14)$$

Sendo que o valor máximo da amplitude é

$$A_o = -\frac{F/m}{\sqrt{\gamma^2(\omega_0^2 + \gamma^2/2) + (\gamma^2/2)^2}} \approx -\frac{F/m}{\gamma\omega_0} \quad (14.15)$$

$$\text{para } \omega^2 = \omega_0^2 + \gamma^2/2 \text{ e } \omega_0^2 \gg \gamma^2/2 \quad (14.16)$$

É bom lembrar que, em termos de amplitude de oscilação, a freqüência de ressonância é diferente para os diferentes casos assim:

$$\text{Ressonância sem amortecimento} \Rightarrow \omega_o \quad (14.17)$$

$$\text{Ressonância livre com amortecimento} \Rightarrow \omega_f^2 = \omega_o^2 - \gamma^2/4 \quad (14.18)$$

$$\text{Ressonância forçada com amortecimento} \Rightarrow \omega_{\text{rf}}^2 = \omega_o^2 + \gamma^2/2 \quad (14.19)$$

Devemos lembrar que no caso do alto-falante, sua membrana está fixada numa bobina que se move con campo magnético de um iman permanente. Por isso a força responsável pelo movimento da membrana é

$$F \propto iBl \quad (14.20)$$

onde l é o comprimento da bobina, B é a indução magnética e i é a corrente que circula pela bobina. Isso significa que ao normalizar a amplitude, velocidade e outros parâmetros experimentais do alto-falante, é preferível normalizar pela intensidade e não pela tensão aplicada na bobina do alto-falante.

14.3 Experimento

O alto-falante, com a sua membrana pintada com uma camada muito fina de tinta retro-refletiva, é colocado num dos braços de um interferômetro de Michelson. Ele é alimentado com uma tensão senoidal e o sinal Doppler resultante é transformado num sinal elétrico num foto-detector e visualizado, junto com o sinal de alimentação, num osciloscópio, como ilustrado na Fig.14.1

14.3.1 Medida da amplitude

Diretamente da Fig.14.1 pode-se medir a amplitude de oscilação. Cada período do sinal Doppler representa o deslocamento de $\lambda/2$ na posição da membrana do alto-falante. Para meio período do movimento da membrana que é o intervalo entre duas posições consecutivas de velocidade zero no alto-falante e que corresponde ao intervalo de 0.56ms indicado na Fig.14.1, podemos distinguir aproximadamente 6 e 1/2 ciclos de sinal Doppler o que representa

$$A = 6.5 \lambda/4 = 1.03 \mu\text{m} \text{ para } \lambda = 0.66 \mu\text{m} \quad (14.21)$$

onde $\lambda=0.633\mu\text{m}$ corresponde ao laser utilizado no experimento da Fig.14.1 e A é a amplitude de oscilação do alto-falante.

14.3.2 Medida da velocidade

A Fig.14.1 também permite a medida da velocidade do alto-falante, particularmente a velocidade máxima u_M . Para isso basta procurar no sinal Doppler, a região onde o período é menor, que neste caso corresponde ao indicado como 0.053ms na figura. Sempre sabendo que um período do sinal Doppler corresponde ao movimento da membrana numa distância $\lambda/2$, calculamos a velocidade assim

$$u_M = (\lambda/2)/(0.053\text{ms}) = 5.97\text{mm/s} \quad (14.22)$$

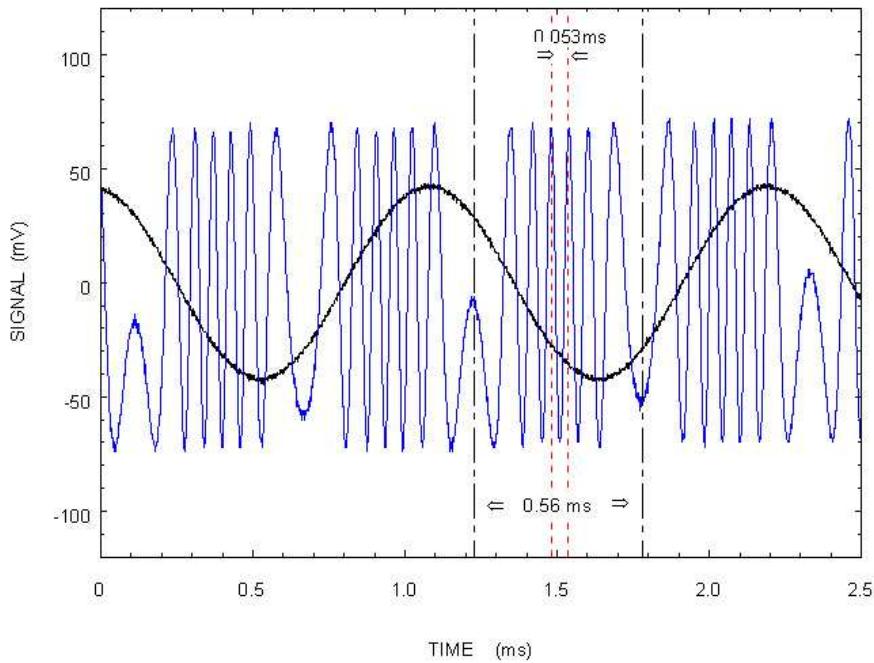


Figura 14.1: Sinal Doppler típico produzido pela membrana de um alto-falante alimentado por uma tensão senoidal de 88mV (pico-a pico) e freqüência de $f = 900\text{Hz}$. Os 0.56ms medidos sobre o sinal representam o semi-período do sinal de alimentação. O período mínimo (0.053ms) indicado na figura sobre o sinal Doppler mostra o ponto onde a velocidade da membrana do alto-falante é máxima.

14.3.3 Linearidade da resposta

As equações de movimento aqui formuladas incluem sempre o termo ‘ kx ’ para a força de restituição, o que significa que o sistema opera na região perfeitamente elástica e por esse motivo a amplitude A é sempre proporcional à força F agindo sobre o sistema como indicado pela Eq.(14.14). Da Eq.(14.12) podemos calcular a velocidade assim

$$u = \frac{d}{dt}(A \cos(\omega t + \phi_f)) \quad (14.23)$$

$$u_M = \omega A \quad (14.24)$$

que significa que, na hipótese de operação dentro do regime perfeitamente elástico, existe a relação simples na Eq.(14.24) entre v_M e A . Para verificar experimentalmente isto, podemos medir diretamente A e u_M , como indicado nas secs.14.3.1 e 14.3.2 respectivamente, para diferentes tensões (o correto seria medir as correntes e não as tensões, como explicado acima) aplicadas ao alto-falante, para uma freqüência fixa, e graficar esses resultados como na Fig.14.2 onde nossas hipótese de linearidade são perfeitamente verificadas. No caso da Fig.14.2, o coeficiente angular resultou ser $7.09(\text{mm/s})/\mu\text{m}$ de cujo valor calculamos assim

$$f = \frac{7090\text{s}^{-1}}{2\pi} = 1128\text{Hz} \quad (14.25)$$

e que é bastante próximo do valor nominal de 1100Hz utilizado no experimento.

14.3.4 Fator de qualidade

A potência dissipada pelo alto-falante calcula-se como

$$P_d = b(\dot{x})^2 = b\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_f) \quad (14.26)$$

e seu valor médio (temporal) é

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{2}bA^2\omega^2 \quad (14.27)$$

$$= \frac{1}{2}b(F/m)^2 \frac{\omega^2}{\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_o^2)^2} \quad (14.28)$$

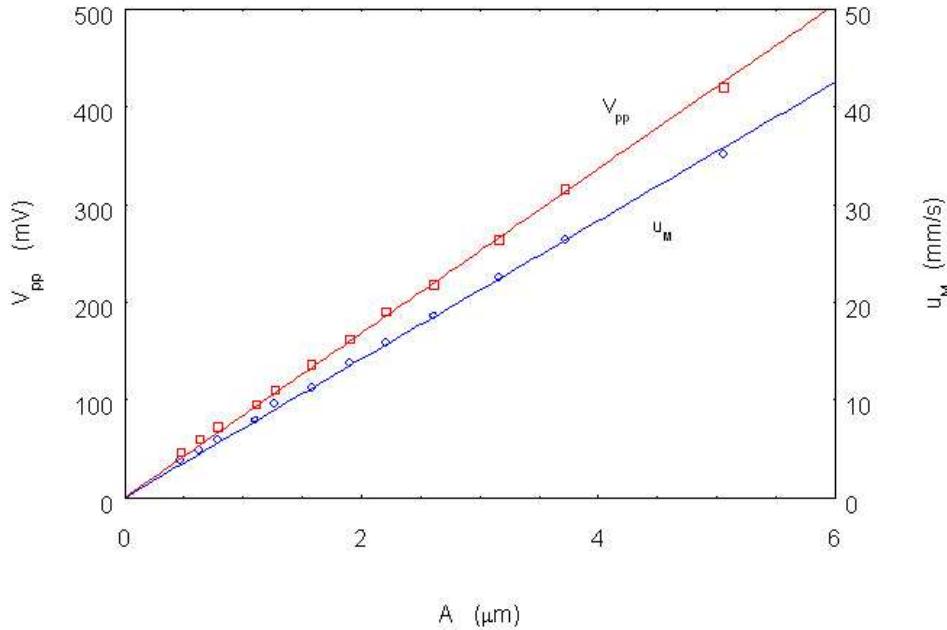


Figura 14.2: Resposta de um alto-falante em termos da tensão pico-a-pico (V_{pp}) aplicada e da velocidade máxima, ambas graficadas em função da amplitude medida A da oscilação, para uma freqüência de excitação $f = 1100\text{Hz}$ no alto-falante.

É fácil verificar que o valor máximo para a potência se atinge para $\omega = \omega_o$ resultando

$$\langle P_d \rangle_o = \frac{1}{2} \frac{b(F/m)^2}{\gamma^2} \quad (14.29)$$

Chamando ω_1 e ω_2 às freqüências à meia potência (potência metade da de ressonância), resulta

$$\langle P_d \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{b(F/m)^2 \omega_1^2}{\gamma^2 \omega_1^2 + (\omega_1^2 - \omega_o^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{b(F/m)^2}{\gamma^2} \quad (14.30)$$

$$\langle P_d \rangle_2 = \frac{1}{2} \frac{b(F/m)^2 \omega_2^2}{\gamma^2 \omega_2^2 + (\omega_2^2 - \omega_o^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{b(F/m)^2}{\gamma^2} \quad (14.31)$$

do que resulta

$$(\omega_1^2 - \omega_o^2)^2 = \omega_1^2 \gamma^2 \quad (\omega_2^2 - \omega_o^2)^2 = \omega_2^2 \gamma^2 \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \gamma \quad (14.32)$$

O fator de qualidade que é definido como

$$Q \equiv \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} \quad (14.33)$$

resulta ser assim

$$Q = \omega_o / \gamma \quad (14.34)$$

que em função do significado de γ na Eq.(14.10) permite escrever Q como

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{1}{\gamma T_o} \quad (14.35)$$

que representa a energia média por energia dissipada num ciclo. Na Fig.14.3 estão representadas as medidas de amplitude A , para um valor fixo da tensão aplicada, feitas num alto-falante comercial, ao redor da sua ressonância. Graficou-se também o valor $A^2 f^2 \propto \langle P_d \rangle$. Utilizando o ajuste teórico para estes últimos dados, calculou-se $Q = 4.95$. Calculou-se também a velocidade máxima, nas condições do experimento, para a freqüência de ressonância $f_o = 1015\text{ Hz}$ assim

$$u_M = A 2\pi f_o = 38.52\text{mm/s} \text{ para } f_o = 1015\text{Hz} \quad (14.36)$$

Supondo uma massa de aproximadamente 1g para a membrana (e bobina acoplada) vibrante podemos estimar a energia media do vibrador

$$\langle W \rangle = m u_M^2 / 2 \approx 0.742\mu J \quad (14.37)$$

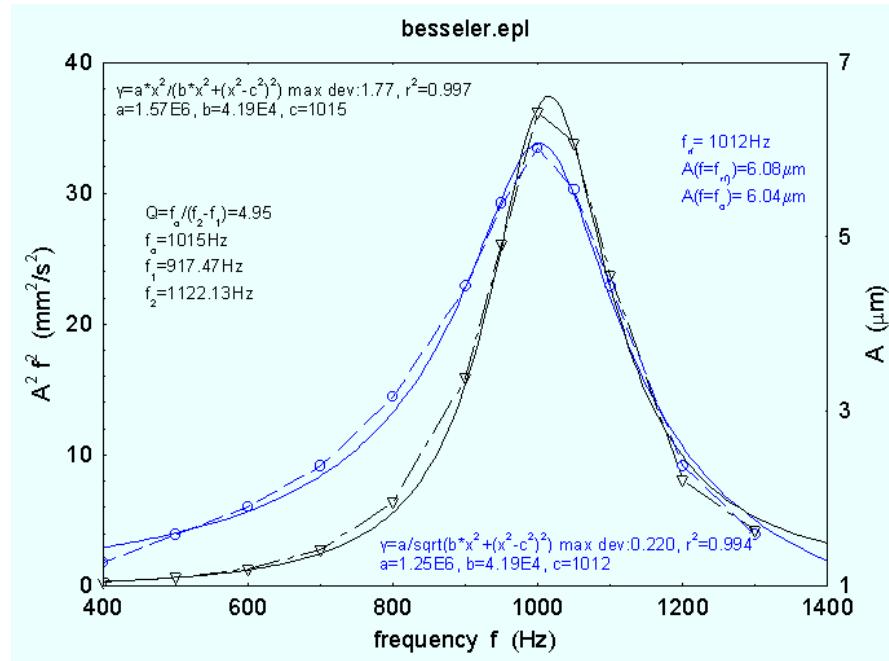


Figura 14.3: Amplitude de oscilação A (círculos) e $A^2 f^2$ (triângulos) medidos em função da freqüência de excitação f para um alto-falante comercial. As curvas são os melhores ajustes teóricos. Resultados dos alunos Edmilson Besseler e Carlos Luciano de Danieli no curso F-840, Abril/2002.

Substituindo o resultado acima na Eq.(14.35), podemos calcular a potência dissipada na ressonância

$$\langle P_d \rangle_o = \langle W \rangle 2\pi f_o / Q \approx 1 \text{ mW} \quad \text{para } f_o = 1015 \text{ Hz} \quad (14.38)$$

que deve ser basicamente a potência sonora do alto-falante. Na Fig.14.4 vemos o mesmo parâmetro $u \propto A^2 f^2$ mas agora normalizada sobre a corrente e não apenas sobre a tensão aplicada. A Fig.14.5 mostra um estudo num domínio mais amplo de freqüências, mostrando outras ressonâncias.

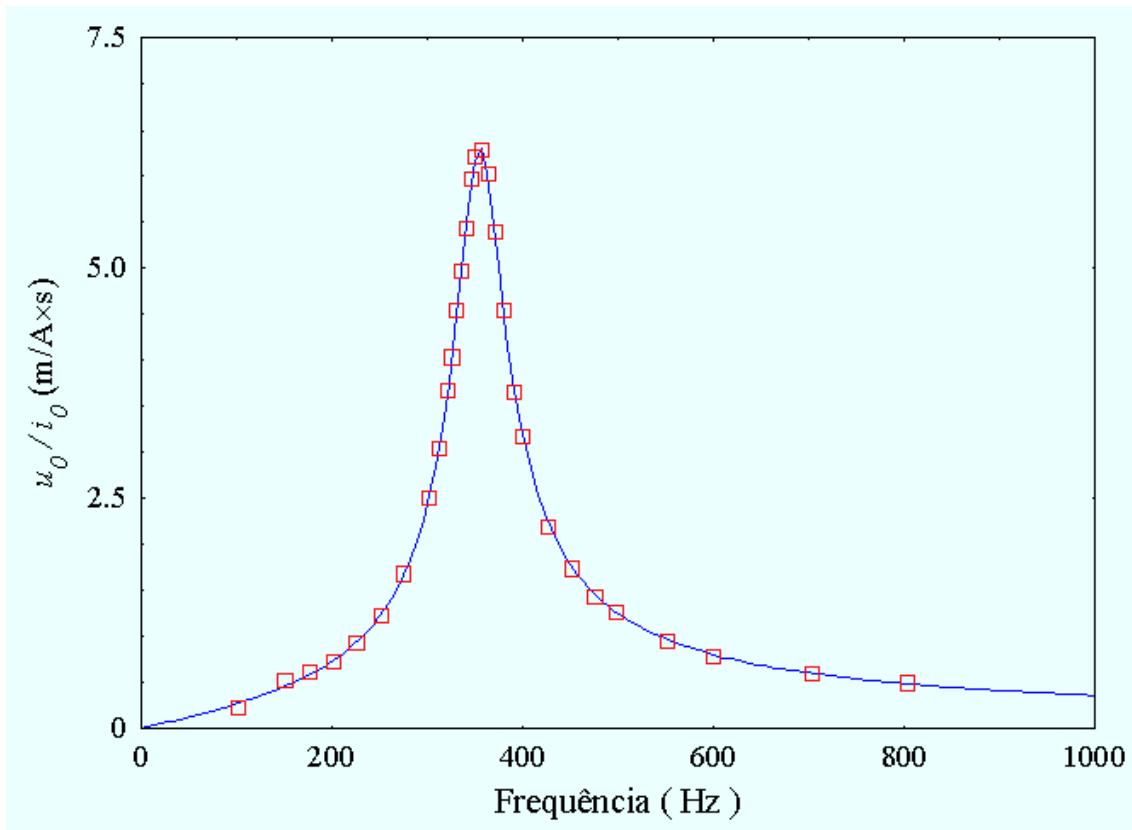


Figura 14.4: Velocidade normalizada pela corrente medida ao redor da ressonância

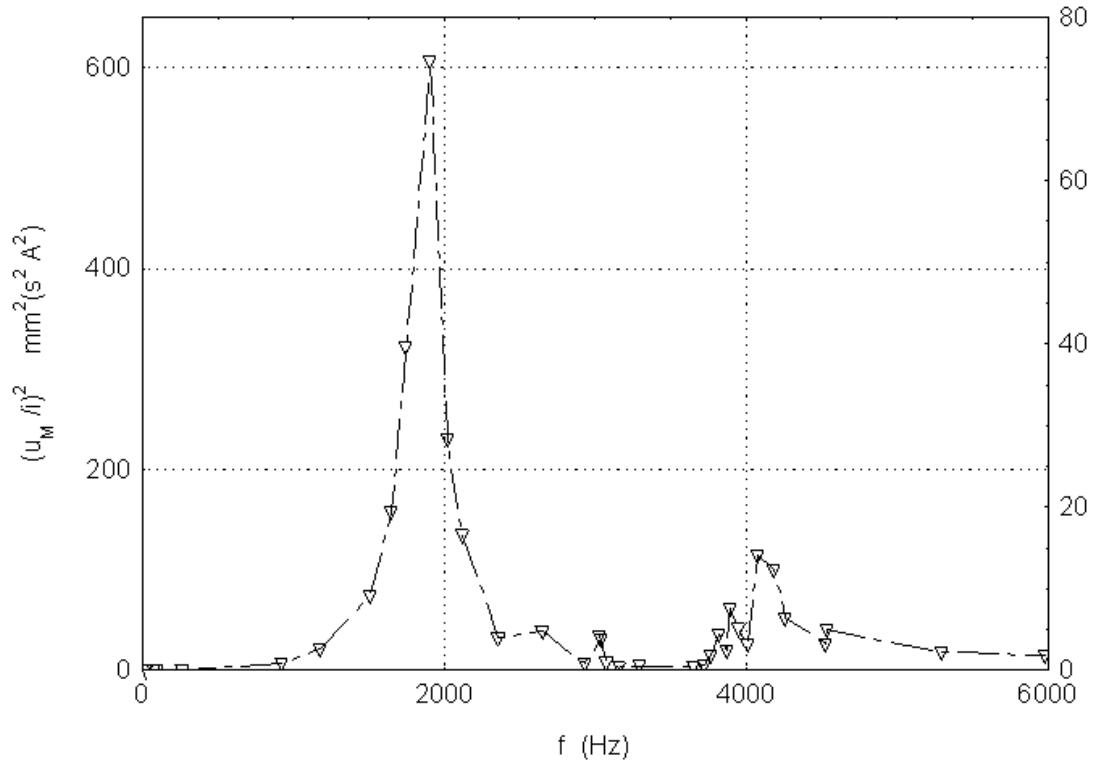


Figura 14.5: Potencia de um alto-falante (quadrado da velocidade máxima normalizada sobre a corrente) em função da freqüência, num domínio maior, mostrando outras ressonâncias menores, possivelmente um segundo harmônico.

Capítulo 15

Velocimetria Doppler-III

Medida da banda passante de um fotodetector

15.1 Objetivo

Medir a banda passante de um fotodetector utilizando o sinal doppler gerado por um alto-falante

15.2 Metodologia

A mesma montagem anteriormente utilizada para estudar o movimento de um alto-falante, pode ser também utilizada para estudar a banda passante de um fotodetector, no caso, o próprio detector utilizado para medir o sinal Doppler do experimento anterior.

A Fig.15.1 ilustra o assunto e a Fig.15.2 mostra um detalhe. A amplitude do sinal nas bordas (onde o sinal tem uma freqüência Doppler quase zero $f_D \approx 0$) é a resposta R_0 do detector à $f \approx 0$ enquanto que no centro (onde a freqüência Doppler f_D é máxima e então chamaremos de f_D^M) a amplitude corresponde à resposta R_{f_D} à freqüência Doppler f_D nesse ponto. Esta última pode ser diretamente calculada na tela do osciloscópio. A razão $R(f_D) = R_{f_D}/R_0$ é a resposta relativa. O experimento deve-se repetir para várias freqüências f_D no centro, e com isso se faz um gráfico, como o da Fig.15.3, que deve responder à equação teórica

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 f^2}} \quad (15.1)$$

O valor de f_D que corresponde a $R = 1/\sqrt{2}$ (ou -3dB) é o chamado “valor de corte” f_c para a freqüência do detector e é quem determina sua “banda passante”.

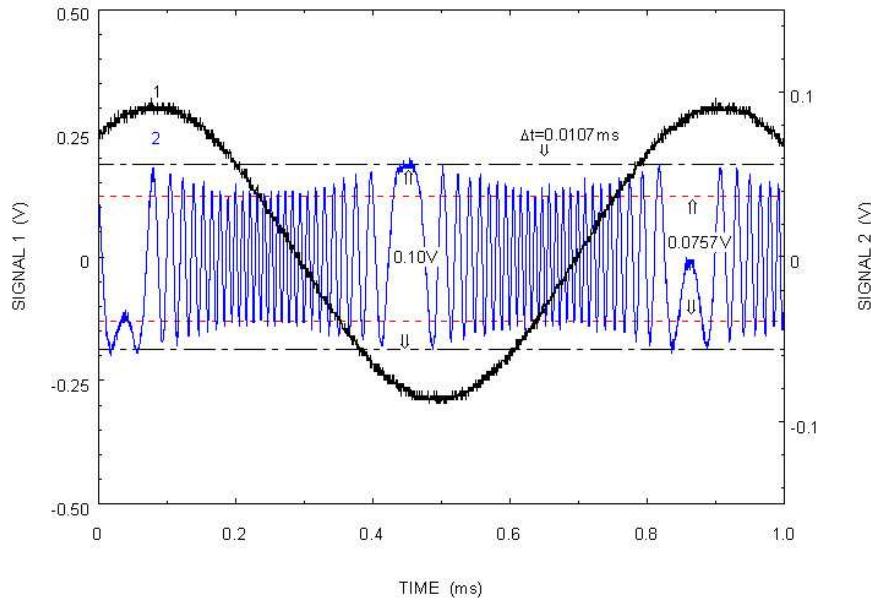


Figura 15.1: Efeito da largura de banda limitada na resposta do detector sobre o sinal Doppler. A tensão aplicada é senoidal com amplitude pico-a-pico de 0.177V e 1200Hz, 0.177V. As respostas do detector nas freqüências zero e máxima ($f_D^M = 93.46$ kHz) são 0.10V e 0.0757V respectivamente.

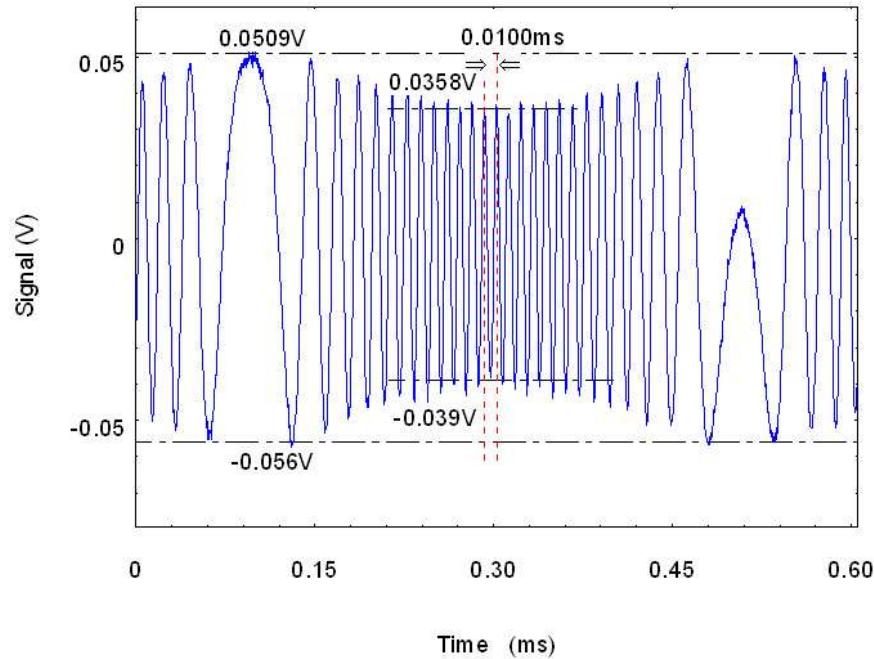


Figura 15.2: Vista detalhada da Fig.15.1: A resposta em $f_D \approx 0$ é 0.1069 V (pico-a-pico) enquanto que para a posição onde o período é mínimo ($\Delta t=0.0100\text{ms}$) cai para 0.0748V

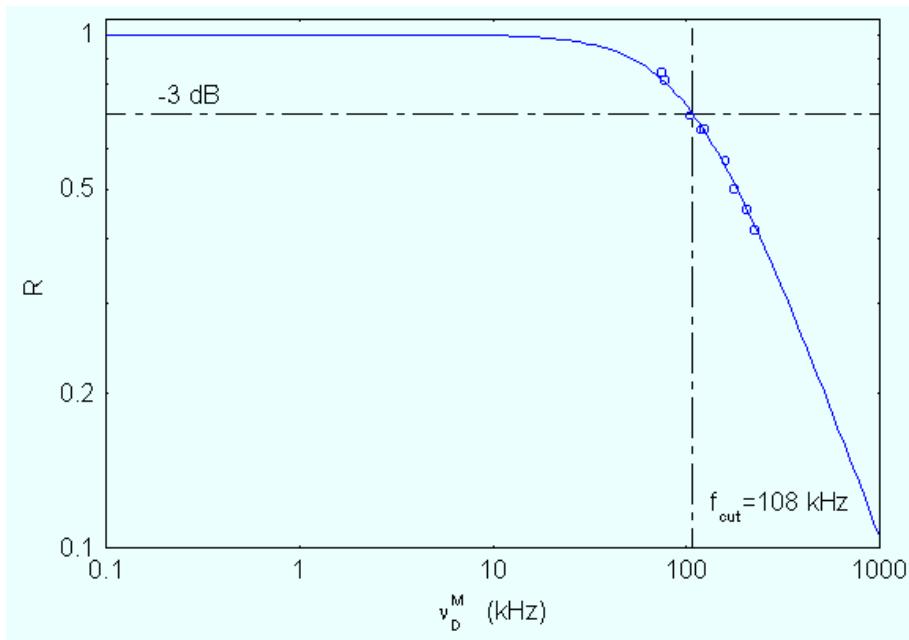


Figura 15.3: Medida da resposta R em função da freqüência Doppler máxima f_D^M de um fotodetector, cuja freqüência de corte resultou ser de $f_c = 108$ KHz

Capítulo 16

Coerência e espectro de potência da luz

Espectrometria por Transformação de Fourier

16.1 Introdução

Existe uma relação matemática bem estabelecida entre o comprimento de coerência e o espectro (de potência) da luz [7] e que foi estudado na sec.4.2. O espectro pode-se medir com ajuda de um espetrômetro e isso nos fornece o chamado espectro de potência $S(\nu)$. Por outro lado a função de autocorrelação $\Gamma(\tau)$, que está relacionada com a interferência da luz (vide sec.4.2), pode ser medida por meio de um interferômetro de Michelson. Ambas quantidades estão relacionadas pela transformação de Fourier

$$S(\nu) = TF\{\Gamma(\tau)\} \quad (16.1)$$

Essa relação é o fundamento da “Espectrometria por Transformação de Fourier” que permite calcular o espectro a partir do interferograma medido num interferômetro de Michelson. A relação de transformação de Fourier leva também à relação simples

$$\Delta\tau\Delta\nu \geq 1 \quad (16.2)$$

Como $\Delta\tau$ está relacionada com o comprimento de coerência e $\Delta\nu$ com a monocromaticidade ou pureza espectral, fica claro que sabendo um deles podemos calcular o outro.

16.2 Objetivos

Os objetivos se dividem em duas partes: uma dedicada ao ajuste do instrumento, e outra, uma vez ajustado o aparelho, ao estudo propriamente dito das fontes de luz.

- Ajuste do interferômetro (veja detalhamento em G).
- Estudo das fontes de luz
 1. Verificar experimentalmente que a largura do espectro de potência e da função de autocorrelação, para diferentes fontes de luz, verificam a relação de incerteza (vide Eq.(B.30))

$$\Delta\tau \Delta\nu \geq 1 \quad (16.3)$$

2. A partir da medida do termo de interferência num interferômetro de Michelson, para diferentes fontes de luz quase-monocromáticas, calcular os espectros correspondentes.

16.3 Metodologia

Primeiramente é necessário fazer o alinhamento e ajustes iniciais do aparelho, como detalhado em G, para depois proceder ao estudo propriamente dito das fontes luminosas.

16.3.1 Estudo das fontes de luz

- No interferômetro de Michelson, observar as franjas de interferência de:
 - um laser He-Ne

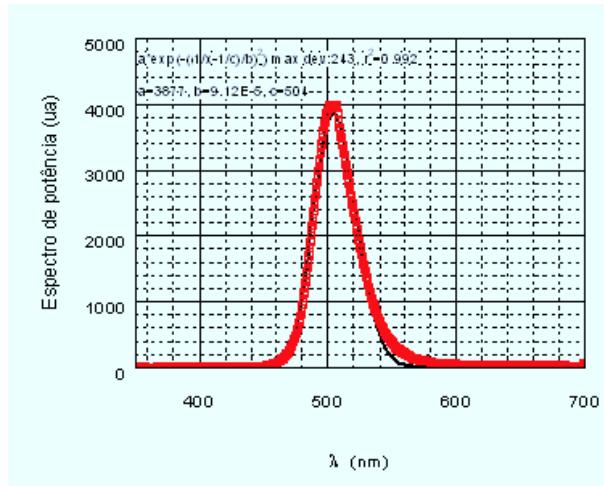


Figura 16.1: Espectro de um led emitindo em 504 nm

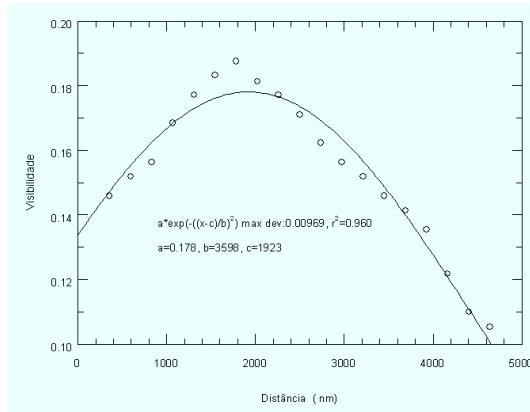
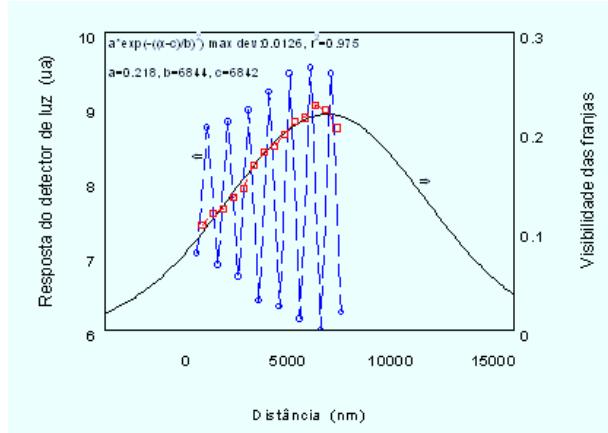


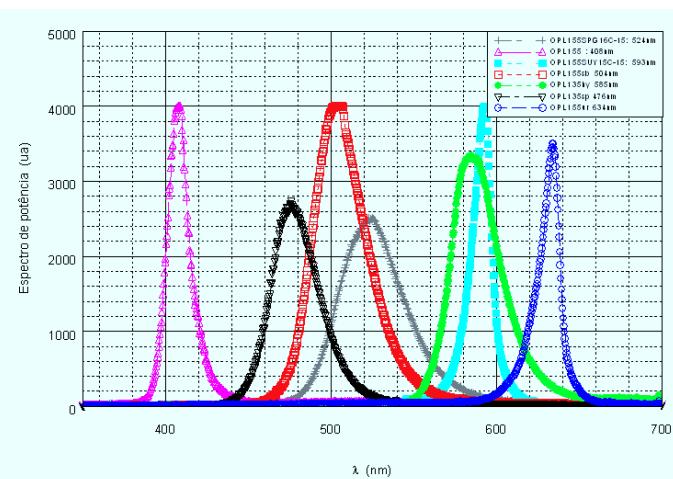
Figura 16.3: Visibilidade das franjas de interferência medidas da mesma forma que na Fig.16.1, mas utilizando um led de $\lambda = 476$ nm cujo espectro aparece na Fig.16.4. A curva foi ajustada com uma gaussiana.

- uma lâmpada de mercurio
- uma lâmpada de Na
- a luz de um fotodiodo (LED)
- uma lâmpada incandescente

Com base na estrutura das franjas de interferência observadas e/ou medidas, concluir sobre a forma do espectro correspondente.

- Medir a transmitância de um filtro interferencial e medir a visibilidade das franjas de interferencia desse filtro, iluminado com luz branca e observado num interferômetro de Michelson. Relacionar ambos os resultados.
- Repetir o item acima mas agora com um fotodiodo. Compare seu espectro medido diretamente com a visibilidade das franjas observadas no interferômetro.

A Fig.16.1 mostra o espectro de um led emitindo em 504nm. A curva foi ajustada por uma gaussiana em função de $1/\lambda$, como indicado na figura. Na Fig.16.2 aparece a medida das intensidades máximas e mínimas das franjas de interferência, junto com a visibilidade calculada para essas franjas. A curva de visibilidade também foi ajustada com uma gaussiana em função de λ . A distância foi medida sabendo-se que uma interfranja representa uma distância de $\lambda = 504$ nm. Na hora de escolher o tipo de iluminação devemos ter cuidado com a coerência da luz: se ela é muito coerente significa que tem uma função de auto-correlação muito larga e nesse caso poderia acontecer que a visibilidade das franjas de interferencia não variasse sensivelmente no pequeno percurso que podemos mover o espelho do interferômetro



de Michelson. Por outro lado, uma luz muito pouco coerente pode não nos permitir ver quase que nenhuma franja ao mover o espelho e por isso inviabilizar o experimento.

Capítulo 17

Óptica de Fourier

17.1 Difração de micro-orifícios circulares

17.1.1 Introdução

Trata-se de ilustrar experimentalmente algumas noções básicas de difração sob o formalismo da Óptica de Fourier.

17.1.2 Objetivos

Estudar as diferenças nas figuras de difração de um micro-orifício circular, de um conjunto aleatoriamente distribuído desses orifícios (na verdade esferinhas retro-refletoras) e de um conjunto ordenado de micro-orifícios

17.1.3 Metodologia

Como exemplos veja as imagens de difração, observadas por meio de um feixe laser direto, de um pinhole comercial (de 20 a 50 μm de diâmetro) cuja imagem de difração está ilustrada na Fig.17.1, de uma máscara de transmissão gravada num filme fino metálico cujo espectro de difração aparece na Fig.17.2 e de uma superfície pintada com uma tinta retro-refletiva (formada por micro-esferas de vidro suspensas numa matéria aderente) como aparece na Fig.17.3.

17.2 Transformação de Fourier pelas lentes

17.2.1 Objetivos:

Verificar o uso de lentes para realizar a transformação de Fourier (TF) de imagens.

17.2.2 Introdução

É possível mostrar que a difração da luz na aproximação de Fraunhofer pode ser matematicamente formulada como a TF do plano objeto [11, 31]. Podemos conseqüentemente mostrar que a formação de uma imagem óptica é a dupla TF e que, escolhendo adequadamente o experimento, podemos agir sobre o plano da TF para modificar o resultado obtido na imagem.

17.2.3 Roteiro proposto

- Utilizando objetos (slides) escolhidos, mostrar que uma lente numa montagem adequada pode produzir a Transformada de Fourier (TF) do objeto.
- Mostrar que a TF da TF reproduz o objeto (imagem do objeto).
- Provar experimentalmente algumas das propriedades da TF:
 - invariância translacional (da amplitude)
 - produto e produto de convolução numa montagem óptica
- Fazer alguns experimentos simples de filtragem de frequências espaciais no plano óptico de Fourier:
 - inverter o contraste e/ou realçar as bordas de uma imagem
 - eliminar o "reticulado" numa imagem digitalizada ou eliminar a imagem ficando com o reticulado apenas

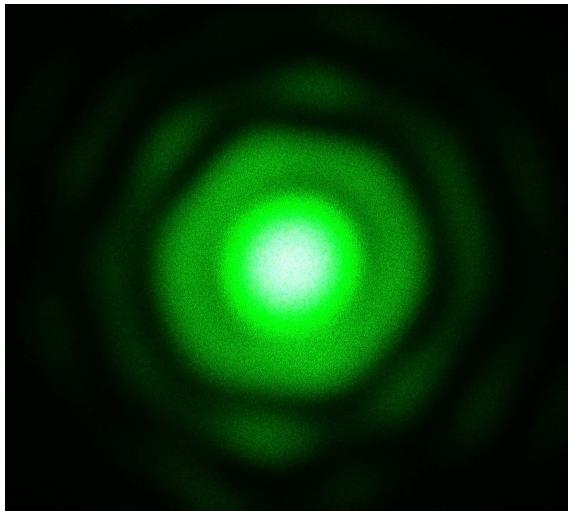


Figura 17.1: Difração de um orifício circular de $100\mu\text{m}$ de diâmetro, iluminado com um laser de $\lambda=532\text{nm}$ e observado numa tela a uns $50\text{-}60\text{cm}$ de distância do orifício. A mancha central é muito intensa e saturou a fotografia dando a ilusão de ser quase branca.

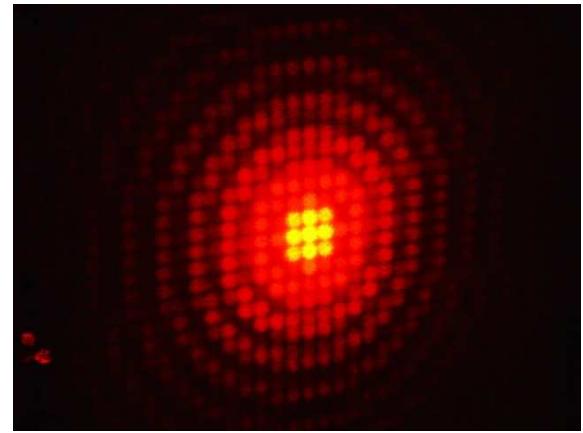


Figura 17.2: Difração de um arranjo ordenado de microfuros numa lâmina metálica, iluminada com um feixe laser ($\lambda = 633\text{nm}$) direto e observada numa tela

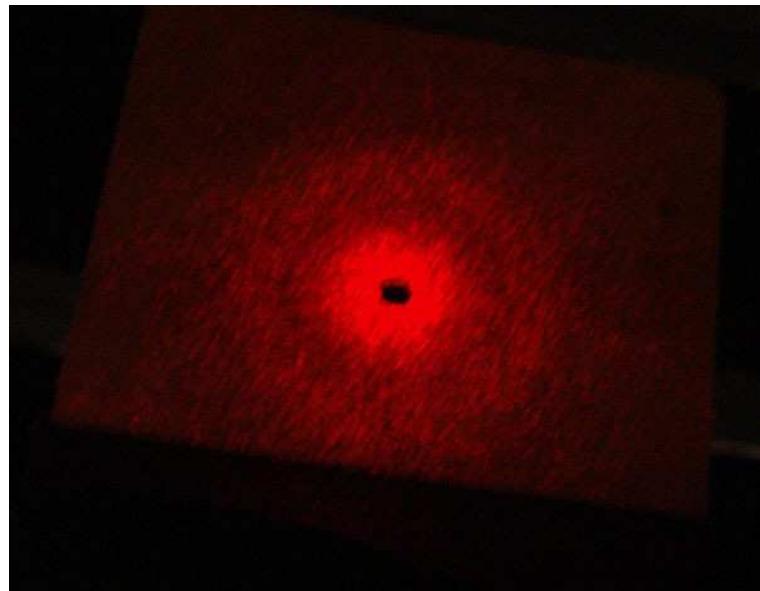


Figura 17.3: Difração de uma lâmina pintada com tinta retro-refletiva iluminada com um feixe laser (633nm) direto e observada por reflexão. O centro escuro corresponde ao furo para passagem do raio laser. Observe o primeiro anel escuro.

- transformar um reticulado "rectangular" num outro sinusoidal de freqüência espacial igual ao primeiro ou com freqüências correspondentes aos harmônicos superiores.

17.3 Multiplexing espacial

17.3.1 Objetivos:

Gravar duas imagens diferentes e multiplexadas, num mesmo filme fotográfico e separá-las depois numa montagem de dupla TF, utilizando a filtragem espacial adequada

17.3.2 Introdução

A multiplexação espacial de imagens (informações), como descrita na sec.5.7.6.1, é o simil espacial da multiplexação temporal, mecanismo pelo qual podemos enviar diferentes informações (funções temporais $f_i(t)$) multiplexadas pelo mesmo canal. No caso temporal como no espacial, cada uma das informações (funções ou imagens) pode ser selecionada escolhendo a frequência temporal (ou especial) na qual ela está multiplexada. Esta última é chamada de "portadora" no caso temporal (vamos chamar assim também no caso espacial) e o exemplo mais comum são as chamadas ondas AM (amplitude modulated). Sejam as portadoras $g_{1,2} = \cos(2\pi\nu_{1,2}t)$ e as respectivas moduladoras $f_{1,2}(t)$, com as respectivas ondas multiplexadas[11, 31]:

$$f_1(t).g_1(t) \quad f_2(t).g_2(t) \quad (17.1)$$

cujas TF são:

$$TF\{f_1(t)\} * TF\{g_1(t)\} = F_1(\nu) * \delta(\nu - \nu_1) = F_1(\nu - \nu_1) \quad (17.2)$$

$$\text{e} \quad TF\{f_2(t).g_2(t)\} = F_2(\nu - \nu_2) \quad (17.3)$$

O que significa que os espectros temporais estão centrados respectivamente em ν_1 e em ν_2 e podem ser então separados utilizando-se filtros centrados em uma ou outra das freqüências. No caso espacial tudo é igual excepto que ocorre no espaço e não no tempo: basta escrever $f_i(x)$ e $g_i(x) = \cos(2\pi f_{xi}x)$ para a moduladora e a portadora respectivamente. O espectro de Fourier (espacial) fica centrado em f_{xi} e pode ser selecionado filtrando (espacialmente, numa montagem de dupla TF) essa freqüência espacial.

17.3.3 Roteiro proposto

- Fabricação de duas imagens multiplexadas:

Na montagem de dupla TF, coloque a máquina fotográfica (sem objetiva) no lugar onde se forma a imagem do objeto. Como objeto coloque um slide (modulador) e um retículo (portadora) encostado nela de forma que a transmitância seja o produto de ambas. Grave essa imagem no filme e não mexa na máquina. Substitua o slide anterior por outro diferente e encoste nele o mesmo retículo, mas agora rotado de um ângulo (pode ser 90° para facilitar) e grave no mesmo local do filme sem rodar o filme. Voce terá assim a soma de duas imagens diferentemente multiplexadas. Agora pode revelar e fixar o filme.

- Demultiplexação (recuperação) das imagens:

Coloque o filme revelado com as duas imagens multiplexadas na montagem de dupla TF. Examine o plano imagem e vai ver as duas imagens superpostas (o retículo é muito fino e provavelmente não vai ser visto. Examine o plano de Fourier e filtre uma das portadoras (espaciais): no plano imagem vai aparecer então apenas a moduladora associada. Filtre a outra portadora e verifique que agora é a outra imagem que aparece. Não esqueça que, a menos que você tenha tomado o cuidado de gravar as duas imagens na região de resposta linear do filme (bastante difícil!!!!) vai haver o que se chama de "inter-modulação" entre as duas imagens, isto é não vão poder se separar completamente. Se o material fosse rigorosamente linear, isto não ocorreria

Capítulo 18

Difração

18.1 Objetivos

Medir e caracterizar diferentes microestruturas com o auxílio da difração da luz.

18.2 Introdução

Para microestruturas com dimensões tais que possa ser utilizada a aproximação escalar da difração da luz, e na chamada aproximação paraxial, a difração da luz pode ser calculada pela transformação de Fourier [11], o que facilita grandemente os cálculos.

18.3 Roteiro proposto

- Calcular o diâmetro de uma micro abertura circular (10 a 50 μm de diâmetro) utilizando a difração de um feixe laser (quase) focalizado na abertura a medir.
- Calcular o período espacial de uma rede rectangular de amplitude, assim como o tamanho da porção opaca de cada período [11, 32, 33].
- Medir a largura de uma micro fenda rectangular.
- Na medida do possível, tente medir os espectro de difração utilizando um fotodetector linear, o que lhe dará maiores possibilidades de interpretação da estrutura difratante. Caso não exista essa possibilidade, procure se auxiliar pela localização dos mínimos e máximos de luz nos espectros de difração.

Capítulo 19

Cristais Fotorrefrativos

Mistura de ondas

19.1 Objetivo

Gravar um holograma num cristal de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO), verificar a presença do holograma gravado e o fenômeno de “mistura de ondas” e quantificar a transferência de energia entre os feixes.

19.2 Introduction

Os materiais fotorrefrativos [15] são fotocondutores, o que significa que a luz libera portadores de carga elétrica no material. Eles são também eletro-ópticos (efeito Pockels) o que significa que um campo elétrico no material modifica seu índice de refração. Estas duas propriedades permitem que um padrão de interferência luminosa grave uma rede de difração (ou eventualmente um holograma) no volume do material, sob forma de modulação do seu índice de refração [34, 13, 15]. A rede gravada difrata a luz o que ocorre também com os feixes incidentes. Isso significa que durante a gravação do holograma, o próprio holograma que vai se gerando produz a difração dos feixes que o estão gerando. Esse fenômeno chama-se de “auto-difração” ou “mistura de ondas”. A luz transmitida por trás do cristal carrega então o feixe transmitido e o difratado nessa mesma direção o que pode ser escrito na forma

$$I_S = I_S^0(1 - \eta) + I_R^0\eta \pm \cos \gamma \sqrt{I_S^0 I_R^0} \sqrt{\eta(1 - \eta)} \cos \varphi \quad (19.1)$$

$$I_R = I_R^0(1 - \eta) + I_S^0\eta \mp \cos \gamma \sqrt{I_S^0 I_R^0} \sqrt{\eta(1 - \eta)} \cos \varphi \quad (19.2)$$

onde I_S e I_R são as intensidades medidas por trás do cristal nas direções dos feixes incidentes I_S^0 e I_R^0 respectivamente, η é a eficiência de difração do holograma, $\cos \gamma$ representa as polarizações dos feixes transmitido e difratado e φ é a diferença de fase entre o feixe transmitido e o difratado, na saída do cristal.

As Eqs.19.1 e 19.2 podem ser escritas de outra forma assim:

$$I_S(d) = I_S(0) \frac{1 + \beta^2}{1 + \beta^2 e^{-\Gamma d}} \quad (19.3)$$

$$\beta^2 = I_R(0)/I_S(0) \quad (19.4)$$

$$I_R(d) = I_R(0) \frac{1 + \beta^2}{\beta^2 + e^{-\Gamma d}} \quad (19.5)$$

$$\beta^2 \equiv I_R(0)/I_S(0) \quad (19.6)$$

onde fica mais evidente o efeito de transferência de energia de um feixe para o outro sendo que Γ é o chamado “ganho” ou “amplificação” do sinal, $I_S(0)$ é a intensidade do sinal na entrada do cristal, $I_S(d)$ é a intensidade do sinal após percorrer uma espessura d do cristal e I_R é a intensidade do feixe “de bombeio” onde $I_R(0) \gg I_S(0)$. Se Γ for positivo, $I_S(d)$ aumenta em detrimento de $I_R(d)$ e viceversa para Γ negativo [35, 36, 37]. Comparando os dois conjuntos de equações acima fica claro que o “ganho” Γ , a eficiência de difração η e a defasagem φ entre os feixes transmitido e difratado, estão interligados e que a magnitude da primeira é maior quanto maior seja η e mais próximo φ seja de $\pm\pi/2$.

Para o caso $\beta^2 \gg 1$, as Eqs.(19.1) e (19.2) podem ser simplificadas assim

$$I_S(d) = I_S(0) e^{\Gamma d} \quad (19.7)$$

$$I_R(d) \approx I_R(0) \quad (19.8)$$

A gravação do holograma ocorre quase que em tempo real e também é reversível, o que significa que ao se cortar um dos feixes para se medir η o holograma vai se apagando inviabilizando assim a medida direta de η .

Em muitos cristais fotorrefrativos as polarizações dos feixes transmitido e difratado na saída dele não são paralelos. Isso chama-se de difração anisotrópica [15], o que obviamente repercute no acoplamento entre os feixes representado nas equações acima.

19.3 Metodologia

Numa montagem holográfica usando um laser com comprimento de onda adequado gravar um holograma num cristal de $B_{12}TiO_{20}$

- Algum tempo após a gravação, verificar qualitativamente a presença de um holograma, produzindo uma pequena perturbação por exemplo, e observando o resultado na intensidade de luz na saída.
- Verificado que um holograma está sendo gravado, cortar um dos feixes incidentes e observar o efeito na saída do outro feixe.
- Quantificar o efeito de transferência de energia em ambos os feixes na saída do cristal.
- Calcular o ganho Γd e, mudando a direção de polarização da luz incidente, estudar o efeito da difração anisotrópica sobre o ganho. Lembre que ao mudar a polarização incidente, ela tem que ser igual para ambos os feixes. Encontrar a polarização que produz máximo ganho.
- Nas condições de máximo ganho encontrada acima, estudar o efeito da relação de intensidades (β^2) sobre o ganho.

Capítulo 20

Medida de vibrações por holografia

20.1 Objetivos

Observar os modos de vibração de uma superfície e medir a amplitude de vibração nos diferentes pontos do plano

20.2 Introdução

A técnica de medida a ser utilizada é a chamada "holografia interferométrica em média temporal". O holograma é gravado num cristal fotorrefrativo que permite o registro em tempo real e de forma reversível. O método permite a visualização imediata dos modos de vibração no plano todo. A partir do interferograma formado podemos inferir os valores das amplitudes de vibração em todos os pontos do plano. O objeto de estudo será a membrana de um alto-falante comercial

20.3 Roteiro proposto

- Escolher a frequência e a tensão de excitação para observar um padrão de modos bem definidos
- A partir do sistema de franjas de interferência formado, construir um "mapa de nível" da distribuição de amplitudes no plano
- Estudar a relação existente entre a tensão aplicada e a amplitude produzida

Capítulo 21

Coeficiente eletro-óptico

21.1 Objetivos

Medir o coeficiente eletro-óptico através da medida de birrefringência produzida no material pela aplicação de um campo elétrico.

21.2 Introdução

Alguns materiais são eletro-ópticos, isto é, um campo elétrico aplicado nele produz câmbios no seu índice de refração. O coeficiente eletro-óptico pode-se representar por um tensor e por isso deve-se tomar cuidado para saber quais elementos do tensor estão sendo medidos. O método a ser utilizado [38, 39] consiste basicamente em iluminar o cristal com uma luz linearmente polarizada e medir a elipticidade da luz após atravessar o material. D'aí se poderá deduzir o coeficiente desejado. Deve-se tomar cuidado com a presença de outros fenômenos associados que podem aparecer e que podem complicar a medida: fotocondutividade, piezoelectricidade, atividade óptica, ferroelectricidade, etc. O material a ser estudado será um cristal de $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$.

21.3 Roteiro proposto

- Medir a atividade óptica do cristal
- Medir a elipticidade na saída do cristal seguindo o procedimento descrito na bibliografia [38], para medir o coeficiente eletro-óptico, na presença de atividade óptica.
- Repetir a medida para outros valores do campo aplicado
- Calcular o coeficiente eletro-óptico r_{41} .
- Repetir o procedimento com outros comprimentos de onda para verificar possíveis dependências com λ .

O cristal de sillenita, na configuração transversal indicada na Fig.21.1, com campo elétrico aplicado ao longo do eixo y , transversalmente à direção de incidência da luz (eixo x), ilumina-se com luz linearmente polarizada, com esta incidindo numa posição angular θ no plano $y - z$, para a qual medimos as intensidades do eixo maior I_M e menor I_m da elipse na saída do cristal para assim calcular

$$V_\theta = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (21.1)$$

Fazemos o mesmo cálculo mas agora para a luz incidindo num ângulo $\theta + \pi/4$ e calculamos

$$V_\theta^2 + V_{\theta+\pi/4}^2 = 1 + \left[1 - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right)^2 \right]^2 \quad (21.2)$$

$$\delta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} n^3 r_{41} E_y d \quad (21.3)$$

$$\phi^2 = \rho^2 + \delta^2 \quad (21.4)$$

onde d é a espessura do cristal ao longo do eixo x e ρ é o dobro do ângulo de rotação da luz linearmente polarizada ao atravessar a espessura d do cristal.

Neste experimento é necessário tomar algumas precauções:

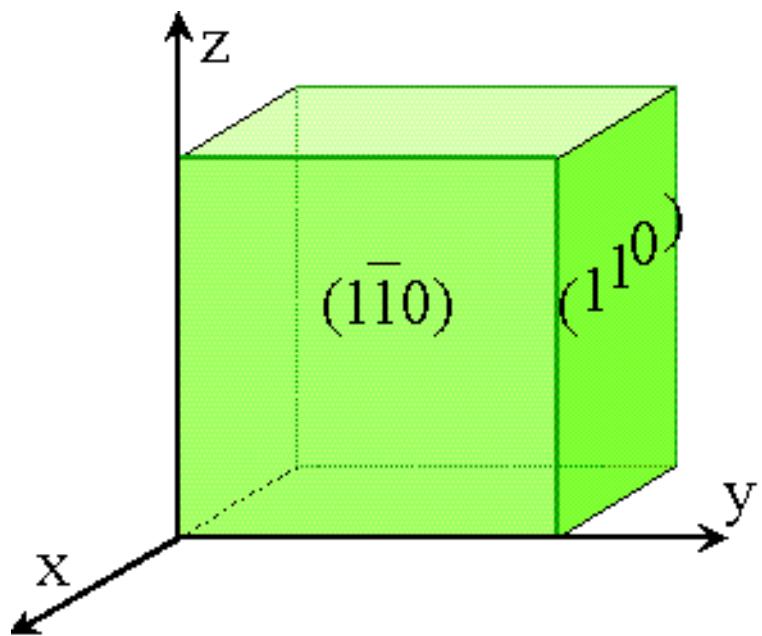


Figura 21.1: Configuração transversal de um cristal de sillenita (BTO , $BGeO$ ou $BSiO$) para medida de coeficiente eletro-óptico. Luz incidente perpendicular à face $(\bar{1}\bar{1}0)$ ao longo do eixo x e campo elétrico aplicado ao longo do eixo y .

- A iluminação tem que ser o mais fraca possível compatível com uma adequada medida de intensidade, isto para evitar polarização elétrica do cristal via fotocondutividade.
- Alguns polarizadores não polarizam adequadamente a luz. Nesse caso é necessário
 - se limitar aos λ para os quais os polarizadores se comportam adequadamente
 - ou levar em conta o funcionamento falho do polarizador, tomado como referência para se calcular as intensidades I_M e I_m , não o zero do instrumento de medida, mas o mínimo e o máximo que o polarizador permite para a luz incidente, antes de passar pelo cristal. Se a falha do polarizador não for muito grande, este recurso funciona adequadamente

Parte III

APÊNDICE

Nesta parte do livro descrevemos alguns assuntos que são necessários para a compreensão da parte teórica. Os primeiros capítulos tratam principalmente de assunto teóricos e os últimos são de caráter prático e experimental.

Apêndice A

Delta de Dirac

Trataremos da distribuição “delta de Dirac” e de outras distribuições e/ou funções associadas.

A Delta de Dirac $\delta(x)$ é uma distribuição, caracterizada pelo conjunto de funções que verificam as seguintes propriedades:

1. $\delta(0) = \infty$
2. $\int_{-|X|}^{|X|} \delta(x) dx = 1$ para qualquer valor de $|X|$

Essas propriedades indicam que $\delta(x)$ tem que ser uma função infinitamente estreita. Nesse caso ainda, se temos uma função $f(x)$ bem comportada e contínua no intervalo de integração, verifica-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (\text{A.1})$$

Lembrando que o produto de convolução (vide sec.??) simbolizado por (*) está definido como:

$$f(x) * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi) d\xi \quad (\text{A.2})$$

então podemos verificar que $\delta(x)$ é a unidade no produto de convolução:

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x - \xi) d\xi = f(x) \quad (\text{A.3})$$

e que

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0) \quad (\text{A.4})$$

Verifique que são Deltas de Dirac (entre outras) as expressões:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu x} d\nu$$

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \operatorname{rect}(at)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \operatorname{sinc}(ax)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-\pi a^2 x^2}$$

NOTA: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi ax)}{x} dx = \pi|a|/a$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 x^2} = 1/\sqrt{a^2}$ para a : real

A.1 Pente de Dirac

Trata-se de uma soma infinita de deltas de Dirac assim

$$\text{III}(x) \equiv \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} \delta(x - N) \quad N : \text{inteiro} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Função Degrau ou de Heaviside

É definida como

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

e pode ser calculada como a integral de $\delta(x)$:

$$U(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Transformada de Fourier

Podemos definir a Transformada de Fourier (TF) sem o fator $1/\sqrt{2\pi}$ na frente da integral, desta forma

$$F(\nu) = \text{TF}\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi t\nu} dt \quad (\text{B.1})$$

para que a expressão fique simétrica com a da Transformada de Fourier inversa

$$f(t) = \text{TF}^{-1}\{F(\nu)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi t\nu} d\nu \quad (\text{B.2})$$

Assim, a TF direta e inversa se diferenciam apenas pelo sinal “+” ou “-” respectivamente, no “ i ” na exponencial.

B.1 Propriedades

Definindo

$$G(\nu) = \text{TF}\{g(t)\} \quad H(\nu) = \text{TF}\{h(t)\}$$

Verifique as seguintes propriedades da transformada de Fourier [11]:

1. LINEARIDADE

$$\text{TF}\{a g(t) + b h(t)\} = aG(\nu) + bH(\nu) \quad (\text{B.3})$$

2. SIMILARIDADE

$$\text{TF}\{g(at)\} = \frac{1}{|a|} G(\nu/a) \quad (\text{B.4})$$

Para verificar esta propriedade, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-i2\pi\nu t} dt &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-i2\pi(\nu/a)(at)} d(at) \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') e^{-i2\pi(\nu/a)(t')} dt' = \frac{1}{|a|} G(\nu/a) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

3. TRANSLAÇÃO

$$\text{TF}\{g(t - t_o)\} = G(\nu) e^{-i2\pi\nu t_o} \quad (\text{B.6})$$

o que se demonstra escrevendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_o) e^{-i2\pi\nu t} dt &= e^{-i2\pi\nu t_o} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_o) e^{-i2\pi\nu(t - t_o)} dt \\ &= e^{-i2\pi\nu t_o} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') e^{-i2\pi\nu t'} dt' = G(\nu) e^{-i2\pi\nu t_o} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

4. Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{B.8})$$

Para demonstrar esta propriedade escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(t)^* dt \quad (\text{B.9})$$

e o termo da direita resulta ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)^* e^{-i2\pi\xi t} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)^* d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(\nu - \xi)t} dt$$

mas sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(\nu - \xi)t} dt = \delta(\nu - \xi) \quad (\text{B.10})$$

resulta ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)^* \delta(\nu - \xi) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) G(\nu)^* d\nu \quad (\text{B.11})$$

que substituído na Eq.(B.9) nos da o resultado procurado. Verifique que a relação de Parseval representa a conservação da energia.

5. CONVOLUÇÃO

A TF do produto de convolução (vide 5.80 e não confundir com “correlação”) de duas funções $g(t)$ e $h(t)$ resulta ser

$$\text{TF}\{g(t) * h(t)\} = G(\nu)H(\nu) \quad \text{onde } g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)h(t - \xi)d\xi \quad (\text{B.12})$$

Para provar esta propriedade escrevenos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)h(t - \xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \xi) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)H(\nu) e^{-i2\pi\nu\xi} d\xi = H(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i2\pi\nu\xi} d\xi = G(\nu)H(\nu) \end{aligned}$$

6. DUPLA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\text{TF}\{\text{TF}\{g(t)\}\} = g(-t) \quad (\text{B.13})$$

Seja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t'} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{-i2\pi\nu t'} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu(-t')} d\nu = g(-t') \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

B.2 Funções especiais

Nesta seção estão indicadas as transformadas de Fourier de algumas funções especiais muito utilizadas em Óptica.

B.2.1 Função “Retângulo”

Essa função está definida assim:

$$\text{rect}(x) = 1 \quad |x| \leq 1/2 \quad (\text{B.14})$$

$$= 0 \quad |x| > 1/2 \quad (\text{B.15})$$

e sua TF vale

$$\text{TF}\{\text{rect}(x)\} = \text{sinc}(f) \quad (\text{B.16})$$

sendo que a função “sinc” é definida como

$$\text{sinc}(f) \equiv \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \quad (\text{B.17})$$

Demonstre que

$$\text{TF}\{\text{sinc}(f)\} = \text{rec}(-x)$$

B.2.2 Função “triângulo”

A função “triângulo” é definida como:

$$\Lambda(x) = 1 - |x| \quad |x| \leq 1 \quad (\text{B.18})$$

$$= 0 \quad |x| > 1 \quad (\text{B.19})$$

Verifique que:

$$(a) \quad \Lambda(x) = \text{rect}(x) * \text{rect}(x)$$

$$(b) \quad \text{TF}\{\Lambda(x)\} = (\text{sinc}(f))^2$$

B.2.3 Função “circ”

A função “circulo” está definida como

$$\text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = 1 \quad \text{para } r \leq R \quad (\text{B.20})$$

$$= 0 \quad \text{para } r > R \quad (\text{B.21})$$

$$\text{onde} \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B.22})$$

e sua Transformada de Fourier vale [40]

$$R^2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{R\rho} \quad \rho \equiv \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (\text{B.23})$$

onde J_1 é a função ordinaria de Bessel de ordem 1.

B.2.4 Gaussiana

A TF de uma gaussiana é outra gaussiana. Para que fique numa forma simétrica, podemos escrever

$$\text{TF}\{e^{-\pi x^2}\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi x f_x} dx = e^{-\pi f_x^2} \quad (\text{B.24})$$

A relação acima pode ser provada, primeiro mostrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{B.25})$$

para o que a elevamos ao quadrado, e resolvemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

de onde concluimos a validade da Eq.(B.25). Agora vamos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - \eta x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\eta)^2/2} e^{\eta^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{\eta^2/2} \quad (\text{B.27})$$

É possível provar [40] que a Eq.(B.27) vale para η complexo, e não apenas real. Se nessa equação escrevemos $\eta = i\xi$, ela fica assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - i\xi x} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2} \quad (\text{B.28})$$

e fazendo um câmbio de variáveis, chegamos à Eq.(B.24).

B.2.5 Função Degrau

Ela está definida em sec.A.2 e sua transformada de Fourier vale

$$\text{TF}\{U(\nu)\} = \frac{-i}{2\pi t} \quad (\text{B.29})$$

B.2.6 Função “pente” de Dirac

A função “pente” de Dirac está definida como

$$\text{III}(t) = \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} \delta(t-N) \quad N \text{ inteiro}$$

Verifique que sua Transformada de Fourier também é um “pente”:

$$\text{TF}\{\text{III}(t)\} = \text{III}(\nu)$$

Para a demonstração acima, leve em conta que

$$1/2 + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos Na = \frac{\sin(aN + a/2)}{2 \sin(a/2)}$$

B.3 Relações de incerteza na transformação de Fourier

Seja

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

onde podemos definir as respectivas larguras $\Delta\nu'$ e $\Delta t'$ assim:

$$\Delta t' = \left| \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(0)} \right| \quad \Delta\nu' = \left| \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) d\nu}{F(0)} \right|$$

$$|f(0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right| \quad |F(0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) d\nu \right|$$

A partir das equações acima é fácil mostrar (vide Fig.B.1) que

$$\boxed{\Delta t' \Delta\nu' = 1}$$

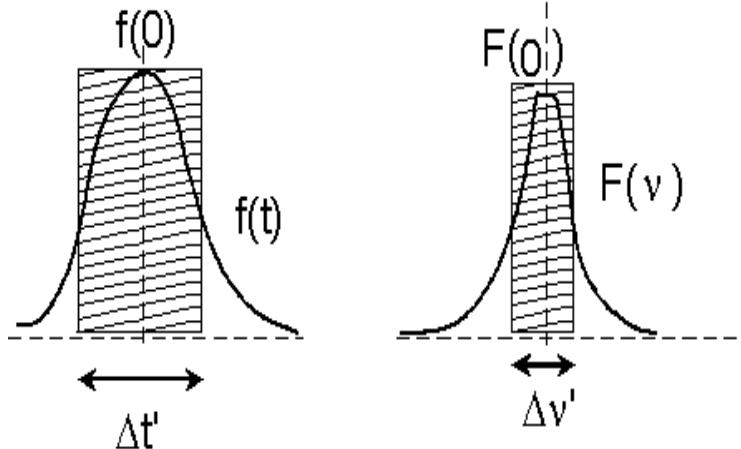


Figura B.1: Função equivalente para o cálculo da largura

Analisemos o caso concreto da expressão de $\gamma(\tau)$ nas Eq.(4.11) e Eq.(4.12). Neste caso não é interessante calcular a largura em termos de

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) d\tau \right|$$

mas a largura do módulo de $\gamma(\tau)$ (representado pela envolvente de $\Re\{\gamma(\tau)\}$ na Fig.4.11), já que é ele quem define a visibilidade (veja Eq.(4.9)) das franjas. Nesse caso devemos calcular

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt}{|f(0)|} \\ \Delta\nu &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)| d\nu}{|F(0)|} \\ \Delta t \Delta\nu &\geq \Delta t' \Delta\nu' = 1 \\ \Rightarrow \Delta t \Delta\nu &\geq 1 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Medindo a largura da envolvente na Fig.4.11 concluímos que $\Delta t = \tau_o$ e então $\Delta\nu \geq 1/\tau_o$.

Apêndice C

Teorema de Bernstein

Trata da derivada de funções de espectro limitado

É intuitivo aceitar que se o espectro de uma função não inclui freqüências superiores a um determinado valor limite, essa função não pode mudar arbitrariamente rápido. É isso o que estabelece matematicamente o teorema de Bernstein [5].

Seja uma função $g(x)$ com espectro de Fourier $G(f)$ limitado, isto é, definida no intervalo $-B/2 \leq f \leq B/2$, em cujo caso podemos escrever

$$g(x) = \int_{-B/2}^{+B/2} G(f) e^{i2\pi fx} df \quad (\text{C.1})$$

cuja derivada vale

$$g'(x) = \int_{-B/2}^{+B/2} i2\pi f G(f) e^{i2\pi fx} df \quad (\text{C.2})$$

que pode se escrever assim

$$g'(x) = \int_{-B/2}^{+B/2} i2\pi f e^{-i\frac{\pi f}{B}} e^{i\frac{\pi f}{B}} G(f) e^{i2\pi fx} df \quad (\text{C.3})$$

A função $i2\pi f e^{-i\frac{\pi f}{B}}$ sendo também limitada no mesmo intervalo que $G(f)$, pode ser escrita como uma série de Fourier [41] complexa

$$i2\pi f e^{-i\frac{\pi f}{B}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{in2\pi f}{B}} \quad (\text{C.4})$$

com os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} i2\pi f e^{-i\pi f/B} e^{-i2\pi nf/B} df \quad (\text{C.5})$$

$$= -2B \frac{(1+2n)\pi \cos[(1/2+n)\pi] - 2\sin[(1/2+n)\pi]}{(1+2n)^2 \pi} \quad (\text{C.6})$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4B}{\pi(1+2n)^2} \quad (\text{C.7})$$

Assim resulta:

$$g'(x) = \int_{-B/2}^{+B/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in2\pi f/B} \right) e^{i\pi f/B} + i2\pi f x G(f) df \quad (\text{C.8})$$

$$g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{-B/2}^{+B/2} G(f) e^{i2\pi f(x + \frac{2n+1}{2B})} df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(x + \frac{2n+1}{2B}) \quad (\text{C.9})$$

$$g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4B(-1)^n}{\pi(1+2n)^2} g(x + \frac{2n+1}{2B}) \quad (\text{C.10})$$

Obtemos assim uma expressão para g' em função de valores eqüidistantes da função g . Seja $M(g)$ o limite superior do módulo da função $g(x)$:

$$M(g) \geq |g(x)| \quad (\text{C.11})$$

e sabendo que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{C.12})$$

podemos concluir então que

$$\boxed{|g'(x)| \leq \pi \frac{B}{2} M(g)} \quad (\text{C.13})$$

Apêndice D

Teorema de amostragem de Whittaker-Shannon

Estuda a forma de amostrar imagens ou funções contínuas sem perder nenhuma informação sobre elas.

D.1 Amostragem

Seja a função de 2D $g(x, y)$ cuja amostra está representada por

$$g_s(x, y) = \text{III}(x/X, y/Y) g(x, y) \quad (\text{D.1})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(x/X - n, y/Y - m) g(nX, mY) \quad (\text{D.2})$$

onde n e m são inteiros. Calculando a Transformada de Fourier

$$G_s(f_x, f_y) = XY \text{III}(Xf_x, Yf_y) * G(f_x, f_y) \quad (\text{D.3})$$

$$= XY \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G(f_x - n/X, f_y - m/Y) \quad (\text{D.4})$$

que significa a repetição do espectro da função amostrada, no espaço de Fourier, como ilustrado na Fig.D.1, onde fica claro que, se a largura (Δ_x, Δ_y) do espectro é menor que o espaçamento ($1/X, 1/Y$) entre eles, será possível recuperar o espectro completo e assim reconstituir a função original sem perda de informações.

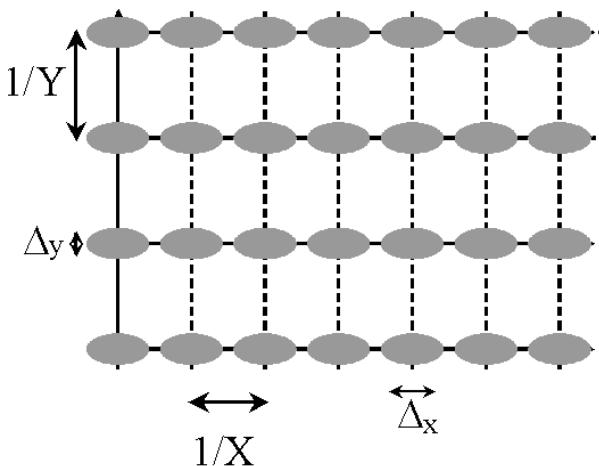


Figura D.1: Idealização da Eq.(D.3) mostando a repetição do espectro no espaço 2D de (f_x, f_y)

D.2 Recuperando a informação

Para recuperar a informação, utilizamos um filtro no espaço de Fourier, da forma

$$H(f_x, f_y) = \text{rect}(f_x/\Delta_x, f_y/\Delta_y) \quad (\text{D.5})$$

que aplicado no espaço de Fourier, recupera o espectro original

$$G(f_x, f_y) = H(f_x, f_y)G_s(f_x, f_y) \quad (\text{D.6})$$

A função original é obtida pela transformação inversa

$$g(x, y) = \text{TF}^{-1}\{H(f_x, f_y)\} * \text{TF}^{-1}\{G_s(f_x, f_y)\} \quad (\text{D.7})$$

$$= \Delta_x \Delta_y [\text{Sinc}(\Delta_x x, \Delta_y y)] * [\text{III}(x/X, y/Y)g(x, y)] \quad (\text{D.8})$$

$$= \Delta_x \Delta_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g(nX, mY) \text{Sinc}(\Delta_x(x - nX), \Delta_y(y - mY)) \quad (\text{D.9})$$

O caso limite corresponde à condição

$$X = 1/\Delta_x \quad Y = 1/\Delta_y \quad (\text{D.10})$$

em cujo caso temos

$$g(x, y) = \Delta_x \Delta_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g(n/\Delta_x, m/\Delta_y) \text{Sinc}(\Delta_x(x - n/\Delta_x), \Delta_y(y - m/\Delta_y)) \quad (\text{D.11})$$

Em conclusão podemos dizer que é possível amostrar uma função (ou imagem) de forma tal que a função (ou imagem) em questão contenha toda a informação original. Para isso basta que o intervalo de amostragem (X e Y) seja menor ou igual que a inversa da largura espectral (Δ_x e Δ_y) correspondente.

A recuperação integral da informação original dependerá do filtro utilizado para isso. Em nosso caso particular, onde utilizamos um filtro “retângulo”, a recuperação ocorre utilizando uma função de interpolação “Sinc” entre os pontos da amostragem.

D.3 Conteúdo da informação

Baseados nos resultados acima, podemos calcular o conteúdo de informações contidas numa imagem ou numa função. De fato, o conteúdo deverá estar dado pelo mínimo número de amostras possíveis capazes de recuperar integralmente o conteúdo original. Para o caso de uma fotografia em 2D com dimensões L_x e L_y e com espectros de Fourier com larguras Δ_x e Δ_y respectivamente por exemplo, o conteúdo será

$$C = (L_x \Delta_x)(L_y \Delta_y) \quad (\text{D.12})$$

onde o produto “largura espacial×largura de banda” caracteriza o conteúdo de informações para cada dimensão.

D.4 Considerações

A representação de uma função amostrada por meio da Eq.(D.1) merece algumas reflexões. Essa forma de se representar pontos discretos de uma função pode parecer algo estranho pelo fato de que o valor em cada um desses pontos vale afinal “ ∞ ”, mas devemos lembrar que a integral num intervalo infinitamente pequeno ao redor de cada um desses pontos nos dá afinal, o valor mesmo da função em cada ponto $g(nX, mY)$. Por isso essa forma simbólica de se representar a função amostrada é aceitável.

Apêndice E

Processos Estocásticos

E.1 Variável aleatória

Uma variável aleatória (VA) é uma variável real \mathbf{X} , definida a partir de uma “atividade” \mathcal{E} (pode ser jogar dados, por ex.), tal que para cada resultado ξ dessa atividade, lhe é atribuído um valor real $\mathbf{X}(\xi)$ com as seguintes propriedades:

- O conjunto $\mathbf{X} \leq x$ é um evento na atividade \mathcal{E}
- É nula a probabilidade $P\{\mathbf{X}\}$ dos eventos $\mathbf{X} = \infty$ e $\mathbf{X} = -\infty$, ou seja

$$P\{\mathbf{X} = \infty\} = P\{\mathbf{X} = -\infty\} = 0 \quad (\text{E.1})$$

E.1.1 Função distribuição

Dado um número real x , o conjunto $\mathbf{X} \leq x$, formado por todos os resultados ξ tais que $\mathbf{X}(\xi) \leq x$, é um evento em \mathcal{E} . Chama-se “função distribuição” da VA \mathbf{X} à

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P\{\mathbf{X} \leq x\} \text{ definida para todo } -\infty \leq x \leq \infty \quad (\text{E.2})$$

E.1.2 Densidade de probabilidade

Chama-se assim à derivada

$$\rho_{\mathbf{X}}(x) = \frac{dF_{\mathbf{X}}(x)}{dx} \quad (\text{E.3})$$

Exemplo

Nossa atividade \mathcal{E} será jogar ao ar uma moeda, com dois resultados possíveis: cara c ou número n , ou seja que o domínio do \mathcal{E} será: $\mathcal{D} = \{c, n\}$ com as probabilidades

$$\mathcal{D} = \{c, n\} \quad P(c) = p \quad P(n) = q \quad (\text{E.4})$$

e definimos a variável aleatória, por exemplo, como:

$$\mathbf{X}(c) = 1 \quad \mathbf{X}(n) = 0 \quad (\text{E.5})$$

e escrevemos sua função de distribuição assim:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 1 \\ q & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

A densidade de probabilidade serão então

$$\rho_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} p\delta(x-1) & \text{para } x = 1 \\ q\delta(x) & \text{para } x = 0 \\ 0 & \text{para } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

E.2 Processos Estocásticos

Se temos algum experimento \mathcal{E} (pode ser jogar uma moeda, ou dados, por ex.) capaz de dar um resultado ξ que permita lhe ser associado (segundo alguma regra bem definida) uma função, real ou complexa, do tempo

$$f_\xi(t) \quad (\text{E.8})$$

podemos formar assim uma família de funções, com uma função para cada ξ , e esta família é o que se chama um “processo estocástico”, onde ξ pertence ao domínio \mathcal{E} e t ao domínio (eixo do tempo, neste caso) dos números reais. Essa função pode representar:

- uma família de funções, para t e ξ variáveis
- um simples função do tempo, para ξ fixo
- uma variável aleatória, para t fixo e ξ variável
- um número, para t e ξ fixos

No exemplo de jogar uma moeda, podemos definir um processo estocástico bem simples, assim

$$\mathbf{X}_\xi(t) = \sin t \quad \text{para } \xi = c \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{X}_\xi(t) = \sin 2t \quad \text{para } \xi = n \quad (\text{E.10})$$

E.2.1 Estatística de primeira e de segunda ordem

Para um processo estocástico, a função de distribuição vai em geral depender também do tempo t e será escrita assim

$$F_{\mathbf{X}}(x; t) = P\{\mathbf{X}_\xi(t) \leq x\} \quad (\text{E.11})$$

A função $F_{\mathbf{X}}(x; t)$ serão chamada de “distribuição de primeira ordem” do processo $\mathbf{X}_\xi(t)$ e a correspondente densidade de probabilidade será obtida similarmente

$$\rho_{\mathbf{X}}(x; t) = \frac{dF_{\mathbf{X}}(x, t)}{dx} \quad (\text{E.12})$$

Dados dois instantes t_1 e t_2 , considerando as variáveis aleatórias correspondentes $\mathbf{X}_\xi(t_1)$ e $\mathbf{X}_\xi(t_2)$, podemos calcular a função distribuição conjunta

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\mathbf{X}_\xi(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}_\xi(t_2) \leq x_2\} \quad (\text{E.13})$$

que será chamada “função de distribuição de segunda ordem” com sua correspondente densidade (também de segunda ordem)

$$\rho(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{d^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{dx_1 dx_2} \quad (\text{E.14})$$

Note que

$$F(x_1, \infty; t_1, t_2) = F(x_1; t_1) \quad \rho(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 \quad (\text{E.15})$$

E.2.2 Valor médio e autocorrelação

Valor médio $\eta(t)$ de um processo $\mathbf{X}(t)$ é o valor esperado da variável aleatória $x(t)$

$$\eta(t) = E\{\mathbf{X}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x; t) dx \quad (\text{E.16})$$

que é, em geral, função do tempo. A autocorrelação $\Gamma(t_1, t_2)$ do processo $\mathbf{X}(t)$ é

$$\Gamma(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{E.17})$$

que será função de t_1 e de t_2 .

E.2.3 Processos estacionários

- No sentido estrito:

Um processo $\mathbf{X}(t)$ chama-se “estacionário”, no sentido estricto, se sua estatística não é afetada por um deslocamento no tempo, ou seja que

$$\mathbf{X}(t) \text{ e } \mathbf{X}(t + \tau) \quad (\text{E.18})$$

têm a mesma estatística para qualquer τ .

- No sentido amplo:

A estacionariedade diz-se ser em sentido amplo, quando se verifica que

$$E\{\mathbf{X}(t)\} = \eta = \text{constante} \quad (\text{E.19})$$

$$\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(\tau) \quad \tau \equiv t_2 - t_1 \quad (\text{E.20})$$

E.2.4 Ergodicidade e média temporal

O conceito de “ergodicidade”, em Teoria de Probabilidades, refere-se à possibilidade de se obter informações estatísticas sobre um determinado conjunto, num momento dado, a partir de observações do comportamento de um elemento desse conjunto ao longo do tempo. Se isso é possível, dizemos que esse conjunto possui ergodicidade.

Vamos supor que queremos saber quais são os teatros mais concorridos, nas Sextas Feiras pela noite, numa dada cidade. Podemos então fazer um registro instantâneo da população da cidade, verificando, numa Sexta Feira determinada, quantas pessoas estão no teatro A, no teatro B, teatro C, e etc. etc. Podemos usar outra estratégia, escolhendo uma pessoa dessa cidade, e verificando quais os teatros para onde ele vai as Sextas Feiras, ao longo de um período de tempo suficientemente longo, por ex. um ano. Assim obtemos dois resultados diferentes: o primeiro nos dá a estatística do conjunto de pessoas na cidade, num dado instante, enquanto que o segundo nos dá a estatística de uma pessoa dessa cidade, ao longo de um tempo adequadamente longo. O primeiro resultado pode não ser representativo para um intervalo mais longo de tempo, enquanto que o segundo, pode não representar o conjunto da população da cidade. Um conjunto será ergódico, somente se ambos resultados coincidem.

A ergodicidade refere-se então ao problema da determinação da estatística de um processo $\mathbf{X}(t)$ (estocástico ou randômico) a partir de um único resultado $\xi(t)$ (determinístico) desse processo.

E.2.4.1 Ergodicidade do valor médio

Seja um processo estocástico $\mathbf{X}(t)$, estacionário no sentido amplo, e por isso

$$E\{\mathbf{X}(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \rho_{\mathbf{X}}(x) dx = \eta \text{ constante} \quad (\text{E.21})$$

Calculemos a média temporal de $E\{\mathbf{X}(t)\}$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{\mathbf{X}(t)\} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \eta dt = \eta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \rho_{\mathbf{X}}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mathbf{X}}(x) dx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mathbf{X}}(x) dx = 1 \quad (\text{E.23})$$

e substituindo acima, resulta

$$\eta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (\text{E.24})$$

O que prova que a esperança matemática (valor médio) pode-se calcular como a média temporal para um processo estocástico estacionário em sentido amplo.

E.2.4.2 Ergodicidade da Correlação

No caso da ergodicidade da correlação, sendo o processo estacionário em sentido amplo, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(t, t + \tau) &= \Gamma(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad x_1 \equiv x(t) \quad x_2 \equiv x(t + \tau)\end{aligned}\quad (\text{E.25})$$

Calculando a média temporal temos

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt\end{aligned}$$

mas sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (\text{E.26})$$

resulta que

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \quad (\text{E.27})$$

O resultado acima mostra que, como para o caso do valor médio, a “esperança matemática” pode ser também substituída pela “média temporal”, desde que os processos envolvidos sejam estacionários.

Apêndice F

Alinhamento de lentes

Em alguns casos é necessário fazer um alinhamento preciso de lentes e para isso podemos usar o feixe de um laser como referência numa montagem simples como a indicada na Fig.F.1. Nessa montagem temos que observar as manchas de luz refletidas por cada uma das duas faces da lente, que no caso das figuras estão indicadas pelas reflexões centrais nas flechas grossas que indicam o centro do feixe laser: a preta indica a mancha refletida na primeira face da lente e a vermelha a refletida na segunda, após refração. Por outro lado, o feixe refletido na primeira face da lente forma uma frente de onda esférica centrada no ponto *A*, enquanto que a luz refletida na segunda face se focaliza no ponto *B* de onde parte outra onda esférica; a interferência de ambas ondas, com diferente esfericidade, produz anéis de interferência centrados na linha *A* – *B*. Quando a lente está centrada e seu eixo óptico alinhado com o feixe laser, como ilustrado na Fig.F.8, ambas manchas refletidas assim como o centro dos anéis ficam todos centrados com o eixo do raio laser, ou seja centrados no furinho do anteparo da Fig.F.1, como mostra a fotografia da Fig.F.9. As diferentes situações possíveis estão ilustradas nas Figs.F.2-F.6. Obviamente, quando queremos alinhar um sistema com várias lentes, teremos que começar pela mais afastada do laser.

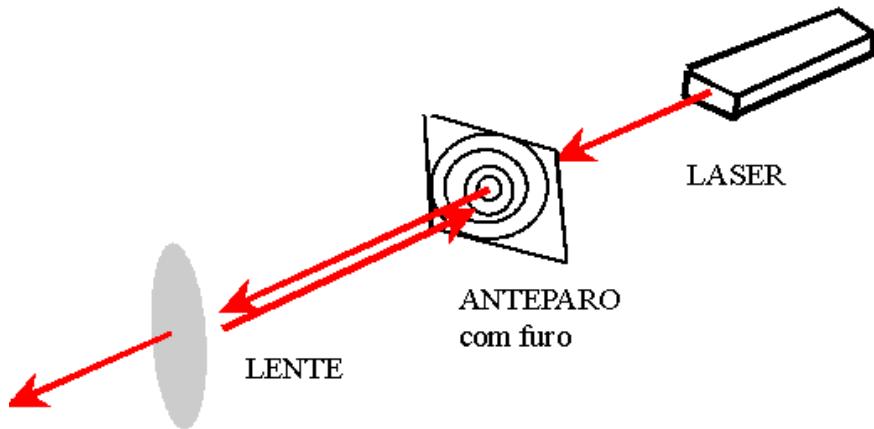


Figura F.1: Esquema da montagem utilizando um laser, um anteparo com um furo no centro, por onde passa o raio laser, e a lente a ser alinhada

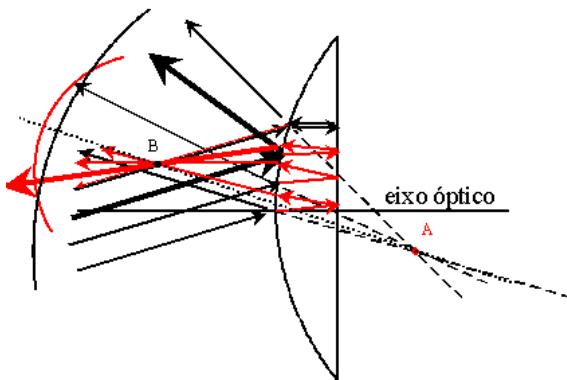


Figura F.2: Esquema de uma lente não centrada e fora do eixo em relação ao feixe incidente cujo eixo central está representado pela flecha mais grossa; a luz refletida pela segunda face da lente está indicada por flechas vermelhas. O resultado são duas manchas luminosas (uma por cada superfície refletora) separadas, e o eixo dos anéis de interferência (na linha A-B) também fora do eixo do raio incidente, como mostrado na Fig.F.3

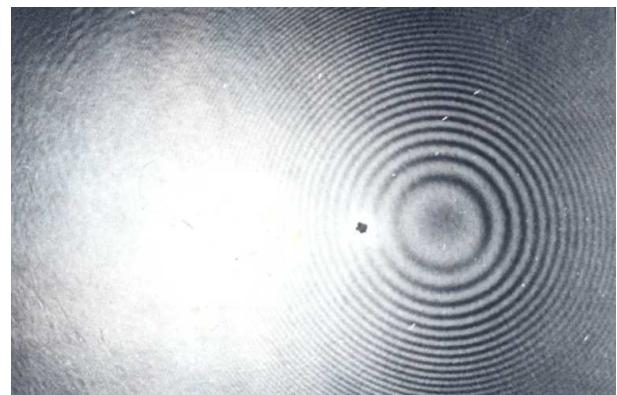


Figura F.3: Imagem observada no anteparo para o caso representado na Fig.F.2; a mancha escura no centro da fotografia indica o furo no anteparo, por onde passa o feixe laser.

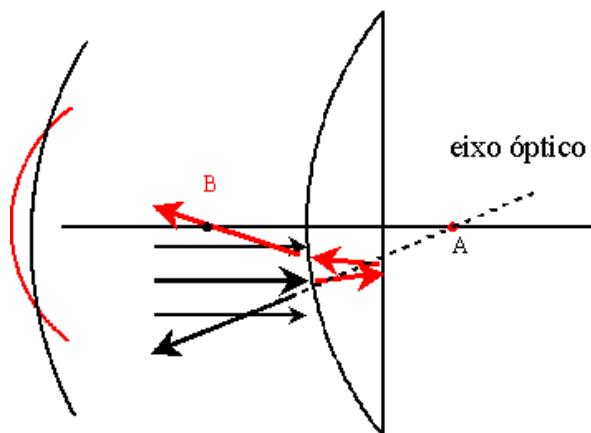


Figura F.4: Eixo óptico da lente paralelo ao raio laser mas lente não centrada no raio

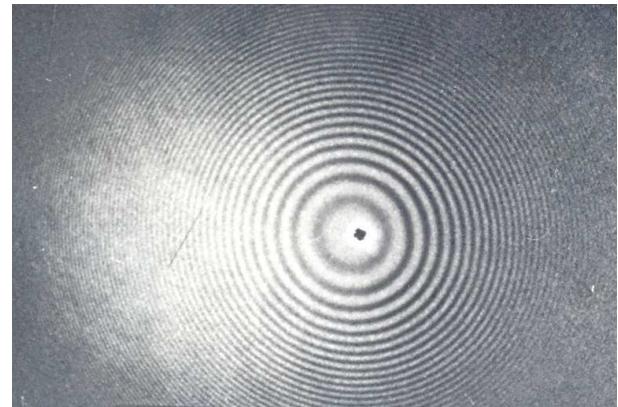


Figura F.5: Imagem observada no anteparo, numa situação como a representada na Fig.F.4, onde os anéis estão centrados mas as manchas não.

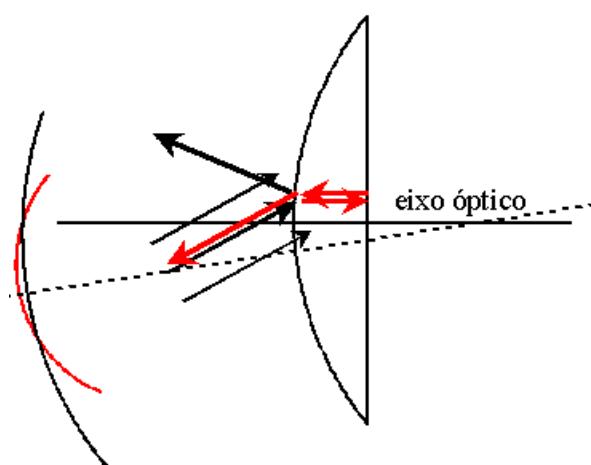


Figura F.6: Esquema mostrando uma lente com o eixo óptico desalinhado e com uma das manchas refletidas voltando sobre o feixe incidente.

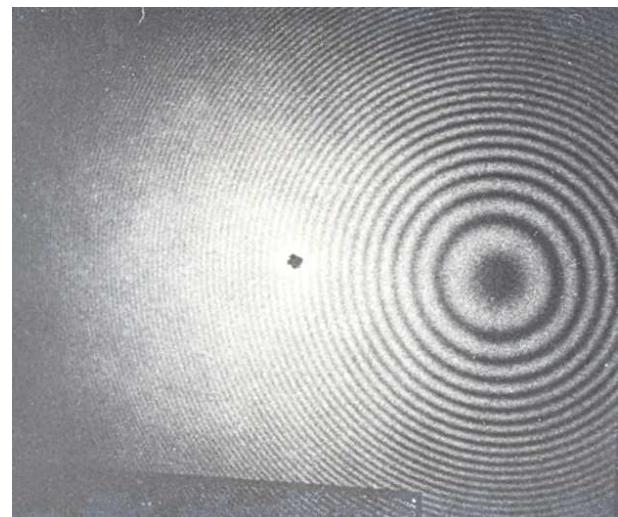


Figura F.7: Fotografia mostrando o caso descrito na Fig.F.6

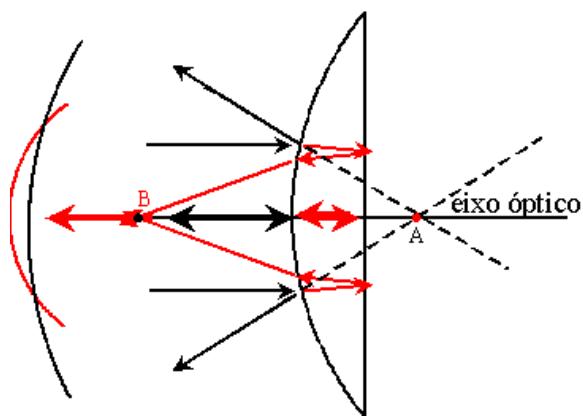


Figura F.8: Esquema mostrando uma lente centrada e alinhada.

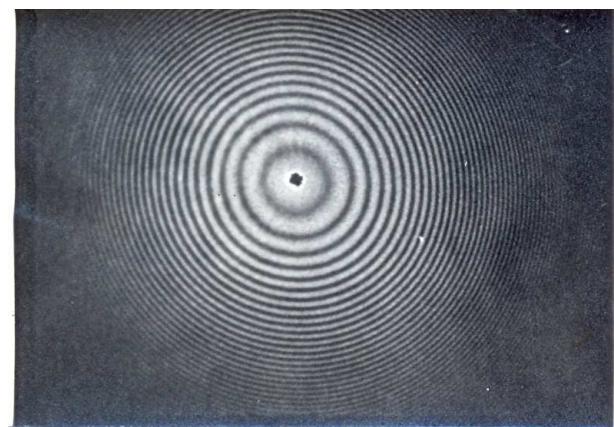


Figura F.9: Fotografia mostrando a imagem para o caso de uma lente alinhada e centrada, como indicado na Fig.F.8

Apêndice G

Interferômetro de Michelson.

G.1 Introdução

O interferômetro de Michelson, esquematizado na Fig.G.1, está formado por dois espelhos (B e C) perpendiculares, um divisor de feixe **BS** formado por uma lâmina de vidro com uma das faces semi-espelhada, e uma lâmina compensadora **COM** que tem a mesma espessura de vidro que **BS** mas sem espelhamento. O feixe que se reflete no espelho **C** passa duas vezes pela espessura de vidro do **BS** antes de chegar ao detector, enquanto que o outro, nenhuma. Como a lâmina está inclinada para a passagem do feixe, isso produz uma aberração na frente de onda; para que essa aberração não provoque deformações nas franjas de interferência, produzimos o mesmo defeito no outro feixe, colocado a lâmina **COM**, para que ele também passe duas vezes por uma lâmina de vidro similar à de **BS**.

G.2 Ajuste do instrumento

Para os ajustes do aparelho se procede da seguinte maneira:

- Alinhar os dois espelhos e a lâmina divisora de feixe do interferômetro para que a luz chegando ao detector pelos dois caminhos interferam formando franjas com o maior período espacial possível. Isso significa que os dois espelhos serão ajustados o mais perpendicularmente possível entre eles, para que os dois feixes emergentes, após reflexão nos espelhos, sejam o mais paralelos possível. Para isso será utilizado um feixe laser direto de baixa potência, centrado aproximadamente no meio dos espelhos, do **BS** e da **COM**. Cada um dos dois feixes sofre uma reflexão principal num dos espelhos e várias reflexões nas interfaces dos vidros, mas muito mais fracas que a reflexão principal. Neste estágio é necessário fazer coincidir cada uma das reflexões principais entre se, fazendo aparecer uma franja de interferência visível a olho nu. Isso garante a perpendicularidade mutua dos espelhos.
- Utilizando o mesmo feixe laser, mas agora suficientemente expandido (usando uma objetiva de microscópio, por exemplo) como para iluminar uma boa parte da superfície dos espelhos, podemos afinar o ajuste da perpendicularidade dos espelhos. Quando os espelhos estiverem perpendiculares, forma-se um sistema de franjas de interferência de anéis circulares concéntricos (por que?) centrados na mancha luminosa. Lembremos que as franjas de interferência com luz laser são deslocalizadas, isto é, formam-se em todo o volume onde se superpõem as duas frentes de onda, e isso por causa da grande coerência longitudinal (temporal) e transversal da luz laser. Por isso elas podem ser projetadas e observadas em qualquer plano.
- Finalmente é necessário ajustar a posição dos espelhos para que a diferença de caminho óptico entre os dois espelhos e o divisor de feixe seja zero, ou seja $L_C = L_B$ na Fig.G.1, condição que chamaremos de **DCOZ**. Quanto mais próximo desta condição, maior será o raio dos anéis de interferência circulares observados com luz laser expandida. Por causa do tamanho limitado da mancha de luz projetada na tela de observação, ou seja, pelo tamanho dos espelhos e/ou divisor de feixe, este procedimento está limitado pelo tamanho dos anéis que se podem observar.
- Para completar o ajuste de DCOZ então, precisamos utilizar fontes de luz com coerência longitudinal menor, de preferência trocando as fontes por outras com coerência progressivamente menores, se possível. Para isso, colocamos os espelhos levemente fora da perpendicularidade para podermos observar franjas não circulares mas aproximadamente paralelas e suficientemente espaçadas para serem facilmente vistas a olho nu. E substituímos a luz do laser por outra com comprimento de coerência (longitudinal) menor. Dessa forma poderemos observar franjas de interferência com a visibilidade (contraste) aumentando claramente na medida em que nos aproximamos da **DCOZ**. Diversas fontes de luz (vide cap.I) podem ser utilizadas para isso:
 - laser de diodo que pode ter uma coerência de alguns milímetros ou até centímetros,
 - lâmpada de Na (sódio) de baixa pressão que tem uma coerência longitudinal que pode chegar até 50 mm,

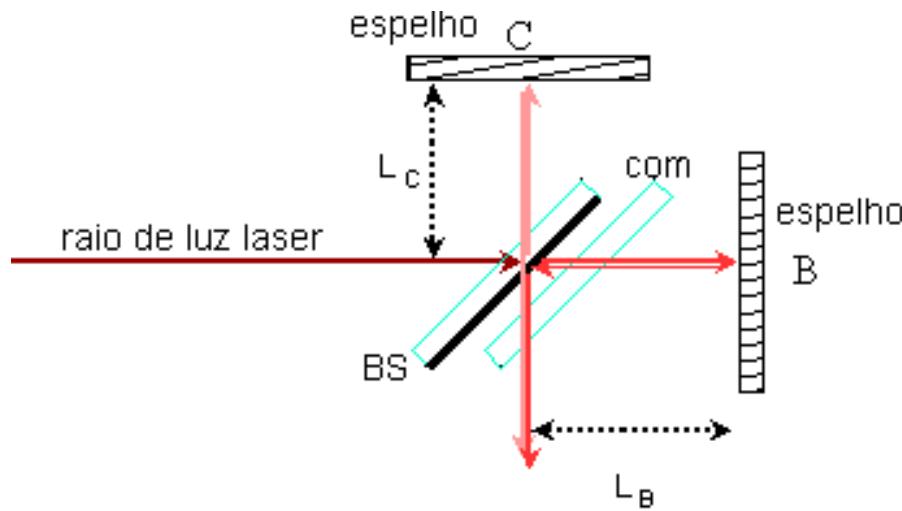


Figura G.1: Esquema do interferômetro de Michelson: **B** e **C** espelhos, **BS** beamsplitter de 30% de transmitância e de reflectância e **COM** lâmina compensadora com 10% de reflectância em cada interfase.

- lâmpada de Hg (mercurio), também de baixa pressão, com coerência bastante menor que a de Na, o que dificulta o procedimento de ajuste,
- fonte de luz branca com um filtro interferencial, ou um LED, que podem apresentar 10 ou 20 nm de largura espectral, que representa uma coerência longitudinal de apenas 10 ou 20 μm , o que dificulta bastante o ajuste.

Quando, de uma forma ou outra, estejamos muito próximos da DCOZ, o ajuste mais fino pode ser feito com uma luz branca que tem uma coerência de 2 ou 3 μm e onde o ajuste perfeito fica evidenciado por uma franja central preta (por que preta?), de muito alto contraste.

Na utilização de fontes de luz diferentes de um laser, que são geralmente extensas, devemos levar em conta que elas tem coerência longitudinal, mas praticamente nenhuma coerência transversal. Isso significa que com essas fontes não será possível obtermos franjas deslocalizadas: elas poderão ser vistas a olho nu ou então serem focalizadas num plano com o uso de uma lente, como ilustrado na Fig.G.2.

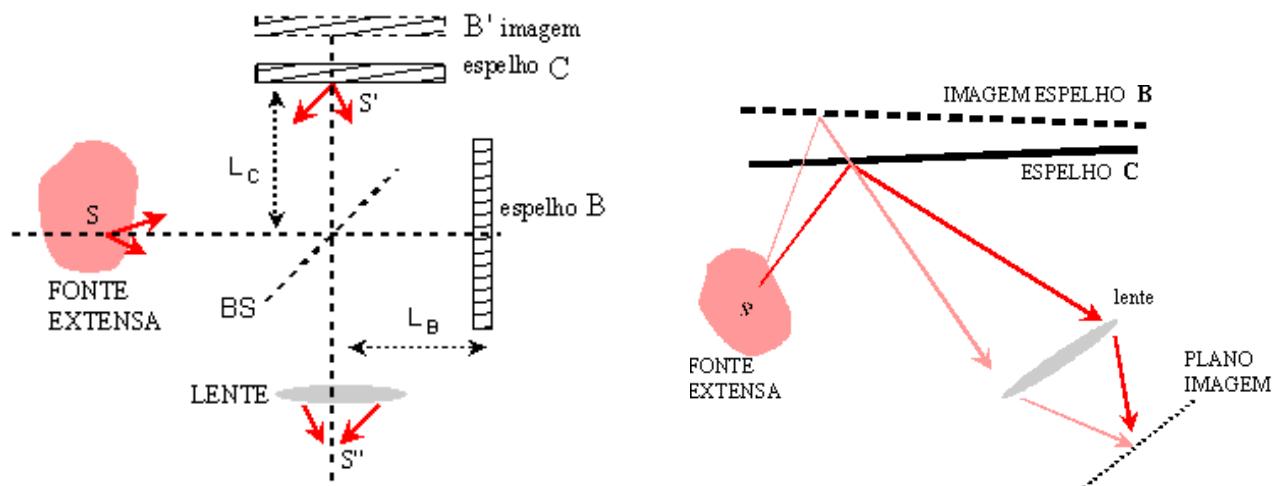


Figura G.2: Franjas de interferência com fonte de luz monocromática extensa sem coerência transversal. O esquema da esquerda mostra o interferômetro de Michelson iluminado com uma fonte de luz monocromática extensa, sem coerência transversal. O espelho **B** é mostrado na figura, na forma de sua imagem pelo **BS**, para facilitar a interpretação da formação de franjas de interferência com fonte extendida. As imagens da fonte refletidas nos dois espelhos se superpõem no plano imagem (ou na retina do olho) mediante o uso de uma lente (ou cristalino do olho). No esquema da direita mostra-se a diferença de caminho óptico dos dois raios, saídos do mesmo ponto **S** da fonte, se refletindo em cada um dos dois espelhos (real e imagem, ambos quase paralelos) e focalizados no plano imagem pela lente. Nesse plano, localizado, se observam as franjas de interferência geradas pelos dois feixes.

Apêndice H

Fotodiodos

Os fotodiodos são essencialmente interfaces semicondutoras tipo n-p. As vezes coloca-se uma camada intermediária intrínseca dando origem às estruturas p-i-n. A função da camada “i” é a de aumentar a espessura da chamada “camada de depleção” para permitir que maior quantidade de pares elétron-buraco seja gerada nesta camada para se mover sob ação da barreira de potencial dando assim uma resposta maior e mais rápida à ação da luz; A corrente direta i (ao longo do sentido do campo aplicado V) está relacionada à tensão direta V de bias pela equação

$$i = i_o(e^{V/(k_B T/e)} - 1) - i_{sc} \quad i_{sc} = KI \quad (\text{H.1})$$

onde I representa a irradiação sobre o fotodiode, K é uma constante que depende do comprimento de onda e do próprio diodo e i_o é a chamada corrente reversa de saturação.

H.1 Regime de operação

Os fotodiodos podem ser usados em regime fotovoltaico (Fig.H.3) ou fotoconductive (Fig.H.4) como será discutido a seguir.

H.1.1 Regime fotovoltaico

O regime fotovoltaico, indicado na Fig. A da Fig.H.3 pode ser descrito pela equação

$$V/R_L = i_o(e^{V/(k_B T/e)} - 1) - KI \quad (\text{H.2})$$

mostrando uma relação não linear entre a irradiação I e a tensão V resultante na resistência de carga R_L . A resposta se aproxima da linearidade somente para $V \ll k_B T/e$, ou seja, para um sinal pequeno. No esquema mostrado na figura B da Fig.H.3, que é a chamada operação em circuito aberto, há uma relação logarítmica entre I e a tensão de saída V :

$$0 = i_o(e^{V/(k_B T/e)} - 1) - KI \quad V = \frac{k_B T}{e} \ln\left(\frac{KI}{i_o} + 1\right) \quad (\text{H.3})$$

O terceiro esquema C na Fig.H.3 mostra a chamada configuração em curto-circuito onde a corrente é proporcional à I .

$$i = i_o(e^0 - 1) - KI \quad i = -KI \quad (\text{H.4})$$

H.1.2 Regime fotoconductive

O modo fotoconductive mostrado na Fig.H.4, onde se aplica uma tensão de bias reversa V_B , é descrito pela relação

$$\frac{V}{R_L} = i_o(e^{\frac{V - V_B}{k_B T/e}} - 1) - KI \quad (\text{H.5})$$

$$\text{Para } V_B \gg V \Rightarrow \frac{V}{R_L} \approx -i_o - KI \quad (\text{H.6})$$

onde i_o é o ruído, termo este que não aparece na operação fotovoltaica em curto-circuito. Fotodiodos em modo fotoconductive são portanto mais ruidosos mas são mais rápidos porque o voltagem de bias reverso reduz a capacidade da camada de depleção e por isso a constante de tempo RC é proporcionalmente reduzida.

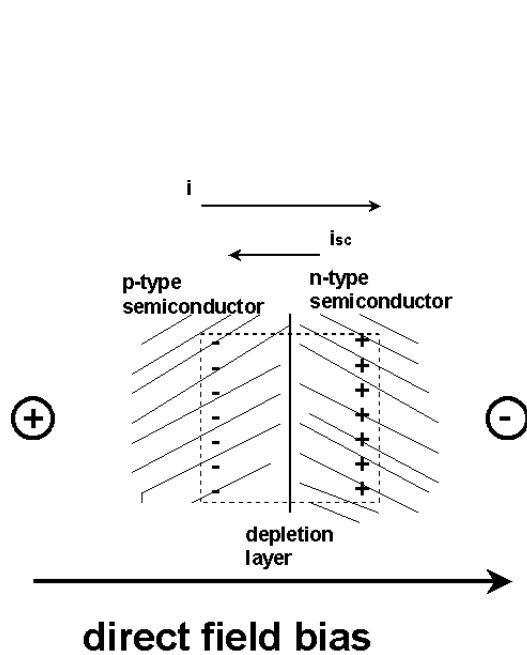


Figura H.1: Junção pn mostrando a camada de depleção e um diagrama da barreira de potencial de Schottky.

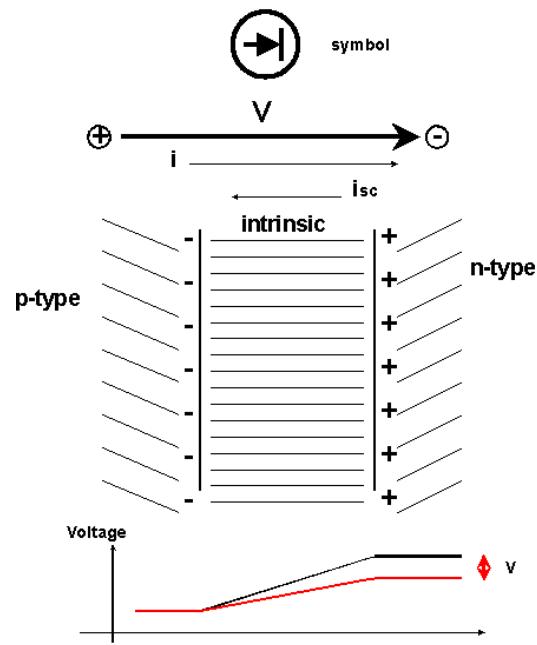


Figura H.2: Junção pn mostrando a camada de depleção incluindo a camada intrínseca e o diagrama da barreira de potencial de Schottky. A curva vermelha mostra a barreira de potencial sub ação de um bias direto de potencial V .

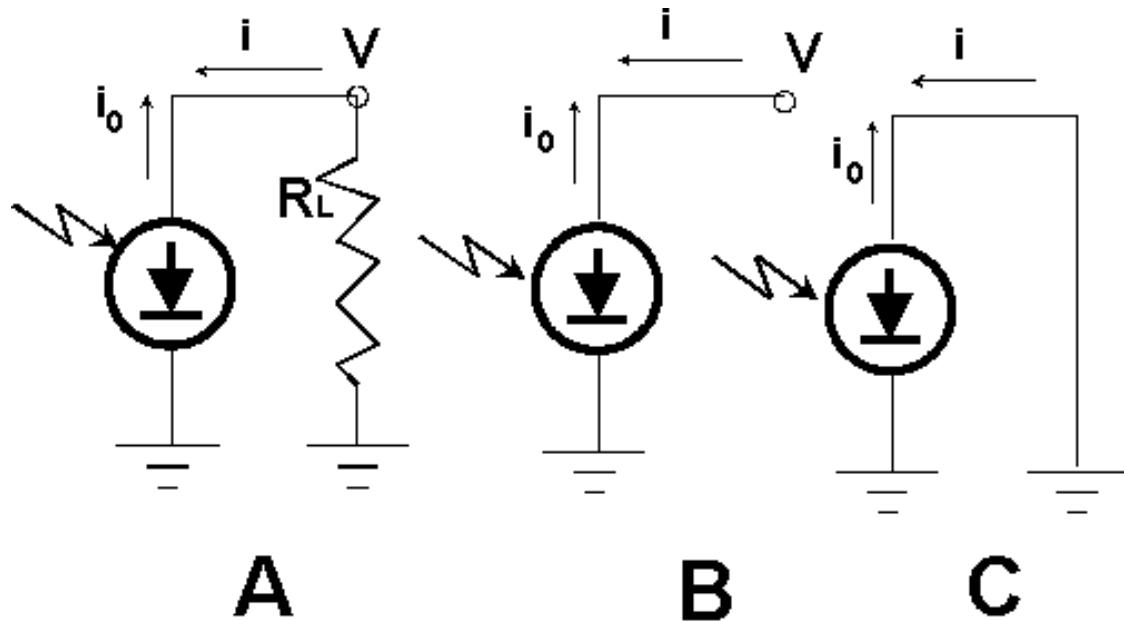


Figura H.3: Fotodetector: modo fotovoltaico. A Fig. A mostra a operação com uma carga R_L , a Fig. B mostra a operação em circuito aberto e a Fig. C mostra a operação em curto-círcuito

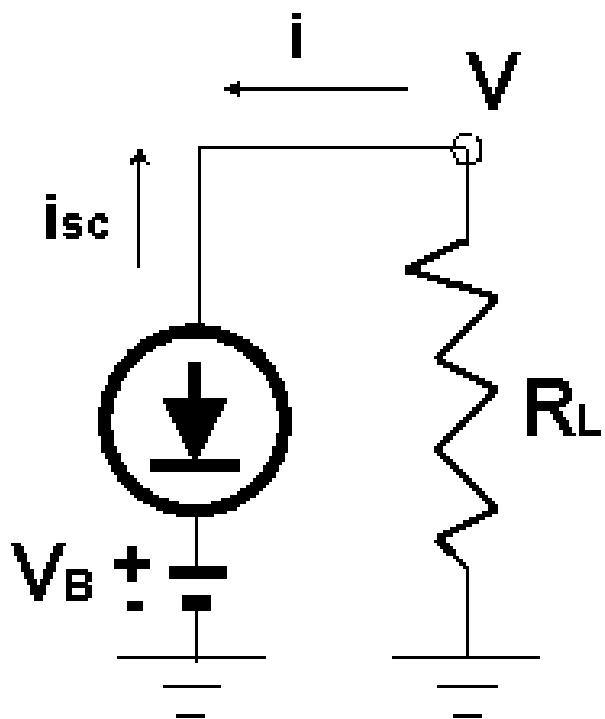


Figura H.4: Fotodetector: modo fotoconductive. Um potencial de bias reverso V_B (normalmente $V_B \gg V$) é aplicado como indicado, para aumentar a velocidade e melhorar a linearidade da resposta.

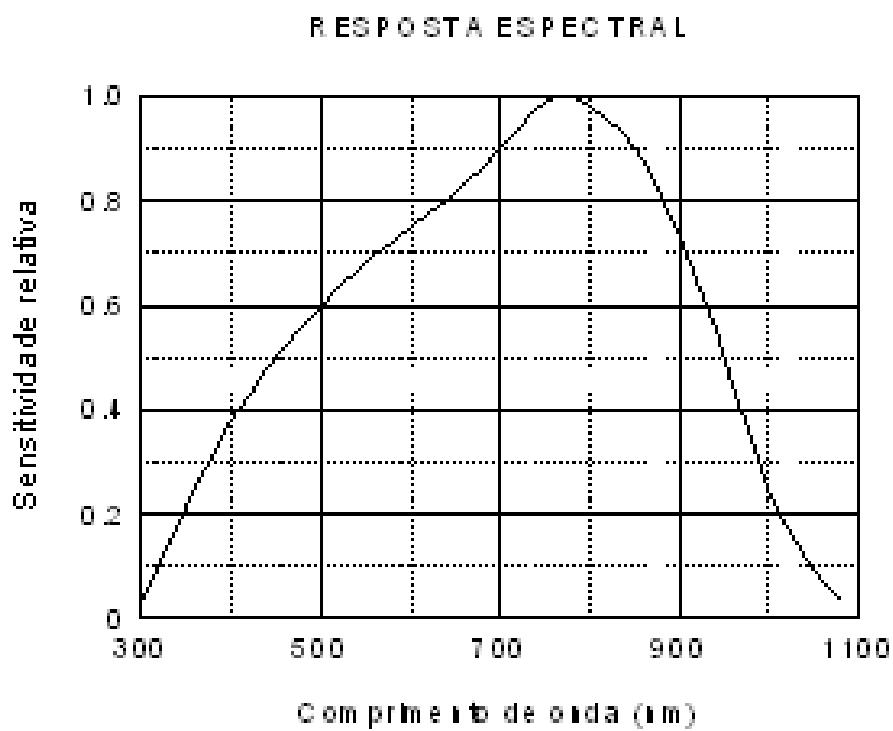


Figura H.5: Resposta espectral típica de fotodetector de Si.

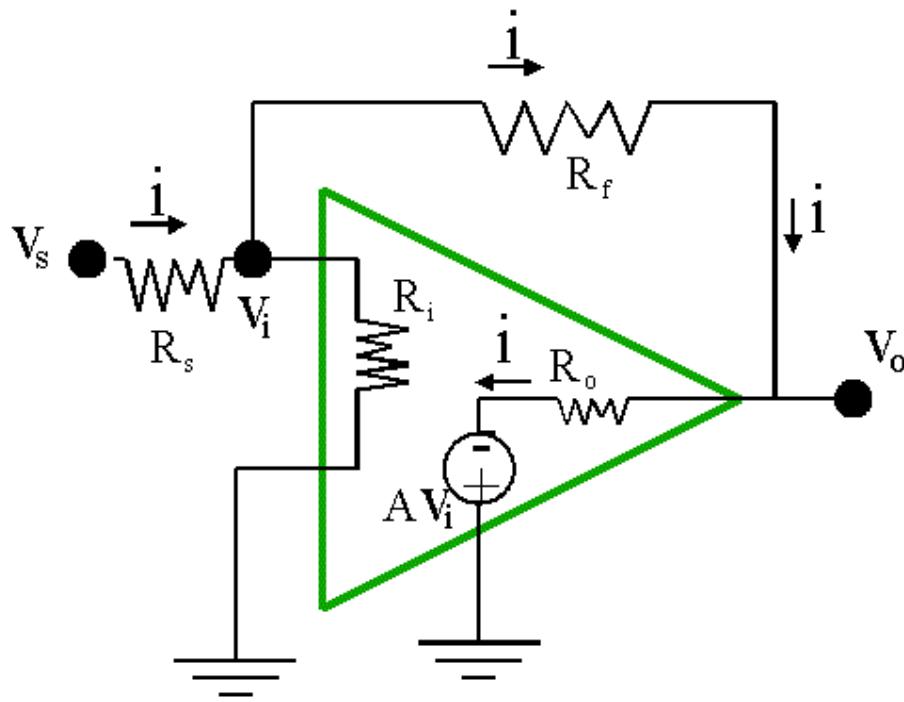


Figura H.6: Amplificador operacional com feedback

H.2 Amplificadores operacionais

Estes dispositivos permitem utilizar os fotodetectores em regime de curto circuito, nos beneficiando assim da linearidade da resposta ilustrada pela Eq.(H.4) e ao mesmo tempo permitir a amplificação dos sinal via resistência de carga, como ilustrado na Eq.(H.2). Por causa destas vantagens, muitos fotodiodos já vêm como circuito integrado com um amplificador operacional (OPA) embutido.

H.2.1 Uso dos Amplificadores Operacionais

A Fig.H.6 representa um amplificador operacional com feedback, cujas características teóricas devem ser

$$R_i \approx \infty \quad (H.7)$$

$$R_o \approx 0 \quad (H.8)$$

$$A \equiv -V_o/V_i \approx \infty \quad (H.9)$$

$$V_i \approx 0 \text{ terra} \quad (H.10)$$

$$R_s \text{ pequeno} \quad (H.11)$$

Nessas condições podemos calcular a corrente i na resistência de realimentação R_f

$$i = \frac{V_s - V_i}{R_s} = \frac{V_i - V_o}{R_f} \quad (H.12)$$

$$= \frac{V_s + V_o/A}{R_s} = \frac{-V_o/A - V_o}{R_f} \quad (H.13)$$

concluindo que a tensão de saída será

$$V_o \approx -R_f i \quad (H.14)$$

$$G \equiv V_o/V_s \approx -R_f/R_s \quad (H.15)$$

Sabendo que

$$R_{in} \equiv V_i/i \quad (H.16)$$

$$i = \frac{V_i - V_o}{R_f} = \frac{V_i + AV_i}{R_f} = v_i \frac{1+A}{R_f} \approx V_i A / R_f \quad (H.17)$$

concluimos também que

$$R_{\text{in}} \approx R_f/A \approx 0 \quad (\text{H.18})$$

Com essas características, o amplificador operacional com realimentação é ideal para ser conectado na saída de um fotodiodo operando em modo fotovoltaico em curto-círcuito como ilustrado na Fig.H.3C. Nessas condições o fotodiodo estará em curto-círcuito, pois a resistência de entrada ao amplificador $R_{\text{in}} \approx 0$, dando na saída uma tensão amplificada no valor $V_o \approx iR_f$, com uma resistência de saída $R_o \approx 0$ o que é muito conveniente para ser medido num voltímetro.

Apêndice I

Fontes de luz

Neste capítulo faremos uma breve descrição das fontes de luz mais utilizadas. O leitor interessado em informações mais detalhadas deverá procurar a ampla literatura especializada existente sobre este assunto.

I.1 Lâmpada de filamento incandescente

A fonte de luz mais simples é formada por uma lâmpada de filamento incandescente cujo espectro de radiação (medido com um fotodetector de Silício), aparece na Fig.I.1. Esse espectro se pode aproximar ao do chamado “Corpo Negro”, que responde à formulação de Stefan-Boltzmann modificada por Planck

$$S(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (\text{I.1})$$

onde $\nu = c/\lambda$ e os outros parâmetros são os usualmente utilizados. Os espectros calculados para $T=5780\text{K}$ e para $T=3000\text{K}$ mostram-se na Fig.I.2 onde fica claro que quanto maior a temperatura T , mais se desloca o pico do espectro para comprimentos de onda menores. Por esse motivo é interessante aumentar T ao máximo possível e para isso se adiciona halogênio na lâmpada, cuja função é a de reagir com o W do filamento evaporado e depositado sobre as paredes da lâmpada, formando um composto gasoso que, ao entrar em contato com o filamento quente se decompõe depositando novamente o W sobre o filamento. Assim a lâmpada pode operar a temperatura mais alta sem que o W do filamento se evapore rapidamente. O espectro da lâmpada está também limitado pela transmitância do invólucro, geralmente de quartzo, que tem boa transmitância apenas na faixa 160-200 até 2500 nm. O vidro BK7 em câmbo, deixa passar luz numa faixa mais restrita: 300 até 2500 nm. Por se tratar de fontes de luz de grande largura espectral, é claro que são fontes com pequeno comprimento de coerência, como se pode deduzir da relação entre larguras de $\Gamma(\tau)$ e $S(\nu)$ estudada na sec.4.2.2.

I.2 “Light-emitting diodes” LEDs

São dispositivos semicondutores que emitem luz, sendo que alguns deles podem emitir luz quase monocromática, como ilustrado no gráfico da Fig.I.3 cuja largura espectral é de 40 nm mas que pode chegar até 10 ou 20 nm. Esses dispositivos são objeto de estudo detalhado na parte experimental no capt.16 deste livro. No mercado existem LEDs com picos espectrais cobrindo quase toda a faixa do IV ao UV próximos e são muito úteis para realizar experimentos que não precisem de muita coerência temporal.

I.3 Lâmpadas de descarga: Na e Hg

Trata-se de lâmpadas contendo gases (os mais comuns sendo Na e Hg) que ao serem excitados por descargas elétricas emitem diferentes linhas espectrais. No gás das lâmpadas de vapor de Hg (vide Fig.I.4), a linha mais utilizada é a verde em $\lambda = 546.1\text{ nm}$, que pode ser separada das outras por meio de filtros de banda larga. No caso das lâmpadas de Na, as linhas mais conhecidas são o dublete em 589.0 e 589.6 nm. As lâmpadas de vapor em alta pressão tem a vantagem de emitir mais luz (pois é maior a quantidade de átomos confinados para emitir) mas em contrapartida, o comprimento de coerência é menor que nas de baixa pressão por causa da maior frequência de colisões entre os átomos, o que diminui o tempo médio da cada pulso e assim alarga o espectro, como fica evidente no caso do Na na Fig.I.5 onde o dublete não se distingue na linha larga em $\lambda \approx 590\text{ nm}$. As linhas espectrais das lâmpadas de baixa pressão apresentam uma largura (além da intrínseca devida à largura dos níveis atómicos entre os quais ocorrem as transições eletrônicas que geram a

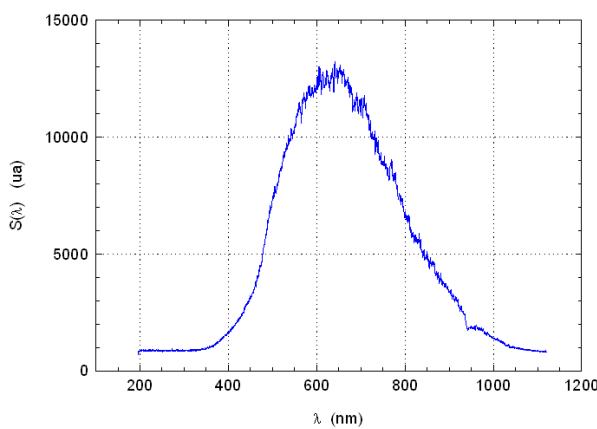


Figura I.1: Espectro de uma lâmpada de filamento incandescente de halogênio, medida com detector de Si.

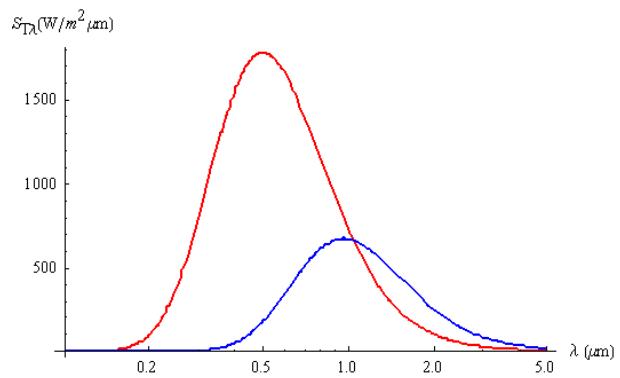


Figura I.2: Radiação de corpo negro calculada para $T=5780\text{K}$ (temperatura do Sol) curva vermelha na esquerda, e para $T=3000\text{K}$ (temperatura máxima para o filamento de lâmpada de halogênio) curva azul na direita, amplificada 10 vezes.

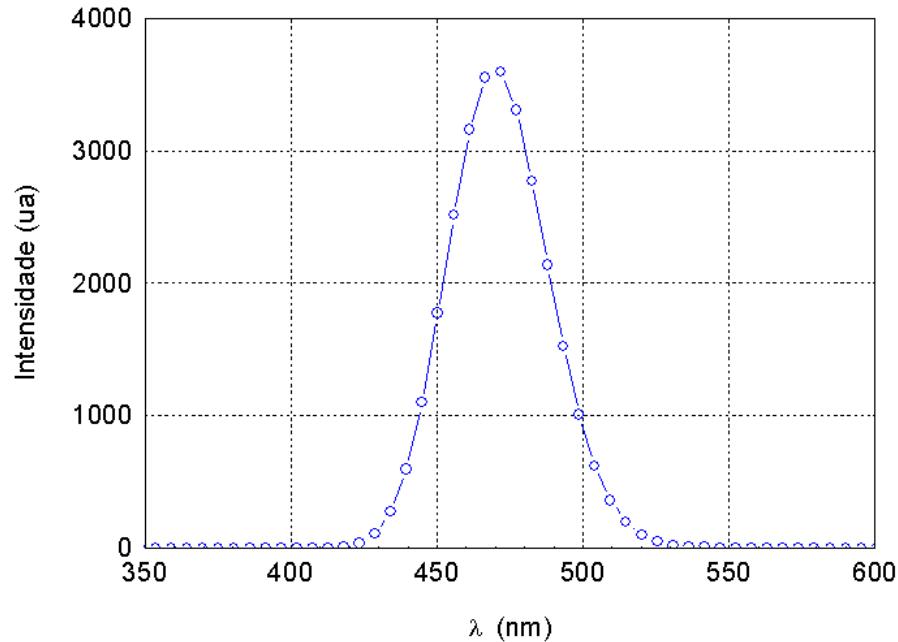


Figura I.3: Espectro de LED centrado em 470 nm com largura à meia altura de 40 nm

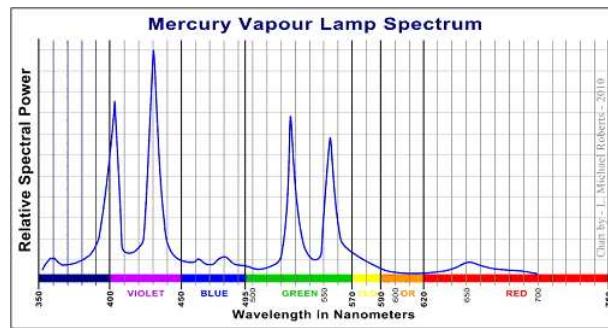


Figura I.4: Espectro de lâmpada de mercurio de alta pressão

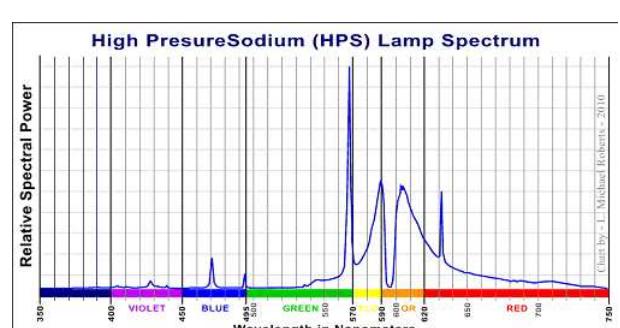


Figura I.5: Espectro da lâmpada de sodio de alta pressão.

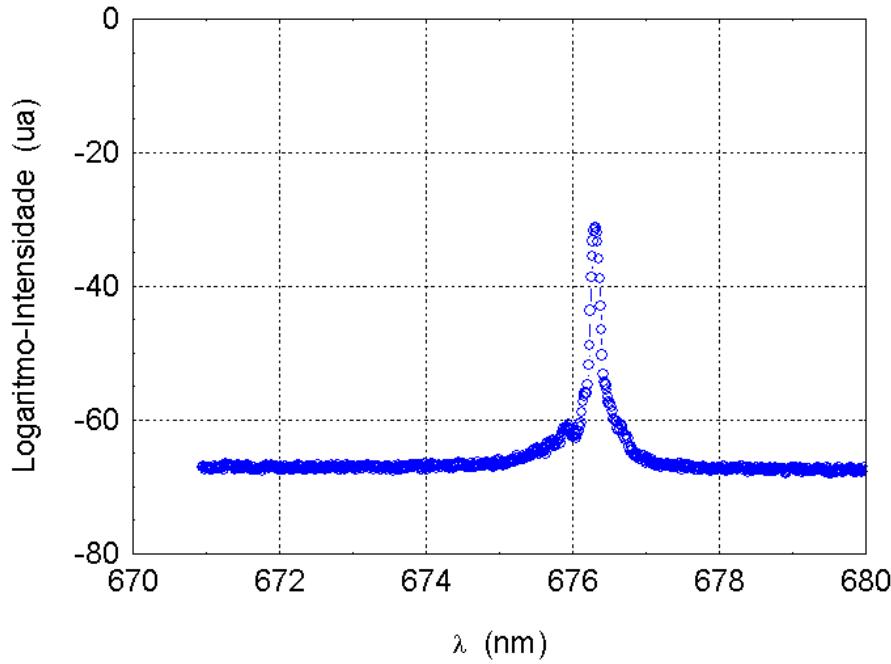


Figura I.6: Espectro de laser de diodo em 676 nm alimentado com 70 mA.

emissão da luz) devido ao efeito Doppler e que depende da massa do átomo e da temperatura em que ele opera e que vale [16]

$$\Delta\nu_D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2k_B T}{Mc^2} \ln 2} \quad (\text{I.2})$$

e que para o caso do Na ($A=23$) à $T=300\text{K}$ para $\lambda = 589 \text{ nm}$ vale $\Delta\nu_D = 1.50 \times 10^9 \text{ Hz}$ o que equivale a $\Delta\lambda \approx 0.002 \text{ nm}$ e que representa um comprimento de coerência de pelo menos 20 cm.

I.4 Laser

São fontes de luz muito especiais que se baseiam no efeito chamado de amplificação da luz por emissão estimulada da radiação (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) e que, por meio de uma inversão da população excitada de átomos confinados numa cavidade ressonante, estimula a emissão sincrônica de forma a se obter muitos pulsos em fase, formando um pulso coerente que pode chegar a vários quilômetros de comprimento, dependendo da tecnologia envolvida no instrumento. A inversão da população consegue-se por meio de descargas elétricas ou por iluminação intensa e essa inversão permite estimular a emissão sincronizada. A cavidade ressonante (formada por dois espelhos) permite selecionar uma única freqüência (similarmente à ressonância num interferômetro Fabry-Perot) dentre as muitas que podem ser produzidas pelos átomos excitados. A Fig.I.6 mostra o espectro de um laser de estado sólido (diodo) centrado em 676 nm, com largura espectral menor que 1 nm. Os lasers de cristais ou de gás podem ter larguras muito menores.

Referências Bibliográficas

- [1] Allen Nussbaum. *Geometric Optics: An introduction*. McGraw–Hill International Editions, 1968.
- [2] John C. Slater and Nathanael H. Frank. *Electromagnetism*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, London, 1947.
- [3] Claude Kacser. *Introduction to the special theory of Relativity*. Prentice-Hall, inc, Englewood cliffs, New Jersey, 1967.
- [4] Athanasios Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw–Hill Book Co., Tokyo, London, Mexico, São Paulo, Sydney, 1965.
- [5] Athanasios Papoulis. *Systems and Transforms with Applications in Optics*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [6] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, 5th edition, 1975.
- [7] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Holt, Rinehart and Winston, N. York, Chicago, Montreal, Toronto, London, 2nd. edition, 1975.
- [8] F. A. Jenkins and H. E. White. “*Fundamentals of Optics*”. McGraw–Hill International Editions, Auckland, London, Paris, São Paulo, Tokyo, 4th edition, 1981.
- [9] R. J. Collier, C. B. Burckhardt, and L. H. Lin. *Optical holography*. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1971.
- [10] J.P. Hugonin and R. Petit. Étude générale des déplacement à la réflexion totale. *J. d'Oprique (Paris)*, 8:73–88, 1977.
- [11] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [12] Urbach and Meier. *Appl. Optics*, 8:2269, 1969.
- [13] D. M. Pepper, J. Feinberg, and N. V. Kukhtarev. The Photorefractive Effect. *Scientific American*, October:34–40, 1990.
- [14] P. Günter and J. P. Huignard. *Photorefractive Materials and Their Applications I*, volume 61 of *Topics in Applied Physics*. P. Günter and J.-P. Huignard, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [15] J. Frejlich. “*Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording, and Materials Characterization*”. Wiley-Interscience, New York, 2006.
- [16] A. Yariv. *Optical Electronics*. Holt, Rinehart and Winston, 3rd. international edition, 1985.
- [17] J. P. Huignard, J. P. Herriau, and T. Valentin. Time average holographic interferometry with photoconductive electrooptic $Bi_{12}SiO_{20}$ crystals. *Appl. Opt.*, 16:2796–2798, 1977.
- [18] J. Frejlich, E. de Carvalho, A. A. Freschi, J. P. Andreatta, A. C. Hernandes, J. F. Carvalho, and N. J. H. Gallo. Stabilized holographic setup for the real-time continuous measurement of surface vibrational mode patterns. In *2nd. International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, volume 2868, pages 205–214, Ancona, Italy, September, 23–25 1996. SPIE.
- [19] J. P. Herriau, J. P. Huignard, and P. Aubourg. Some polarization properties of volume holograms in $Bi_{12}SiO_{20}$ crystals and applications. *Appl. Opt.*, 17:1851–1852, 1978.
- [20] A. A. Kamshilin and M. P. Petrov. Continuous reconstruction of holographic interferograms through anisotropic diffraction in photorefractive crystals. *Opt. Commun.*, 53:23–26, 1985.
- [21] R. K. Erf. *Holographic Nondestructive Testing*. Academic Press, 1974.
- [22] Y. Owechko, E. Marom, B. H. Soffer, and G. Dunning. Associative Memory in a Phase Conjugate Resonator Cavity Utilizing a Hologram. In SPIE, editor, *1986 International Optical Computing Conference*, pages 296–300, Jerusalem, 6–11 July 1986. volume 700.
- [23] F. Abélès. La détermination de l'indice et de l'épaisseur des couches minces transparentes. *J. Phys. Radium*, 11:310, 1950.

- [24] M. Gibson and J. Frejlich. Implementation of the Abélès method for thin-film refractive-index measurement with transparent substrates. *Appl. Opt.*, pages 1904–1905, 1984.
- [25] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 3rd. edition, 1998.
- [26] Daniela de oliveira Maionchi, Wesley campos, and Jaime Frejlich. Angular alignment of a polarization maintaining fiber. *Opt. Eng.*, 40:1260–1264, 2001.
- [27] Eugene Hecht. *Optics: Schaum's outlines*. McGraw-Hill, N. York, London, Madrid, Toronto, 1975.
- [28] R.N. Smartt and W.H. Steel. Birrefringence in Quartz and Calcite. *J. Opt. Soc. Am.*, 49:710–712, 1959.
- [29] Igor Savukov and Dmitry Budker. “Wave-plate retrders based on overhead transparencies”. *Appl. Opt.*, 46:5129–5136, 2007.
- [30] A.A. Freschi and N.R. Caetano and G.A. Santarine and R. Hessel. Laser interferometric characterization of a vibrating speaker system. *Am. J. Phys.*, 71:1121–1126, 2003.
- [31] Jaime Frejlich. TÓPICOS DE ÓPTICA: Coerência, Interferência e espectro da Luz. In *Notas de Aula IFGW*, volume 1. Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas, 3^a edition, Outubro 1999.
- [32] G.F. Mendes, L. Cescato, and J. Frejlich. Gratings for metrology and process control. 1: A simple parameter optimization problem. *Appl. Opt.*, 23:571–575, 1984.
- [33] G.F. Mendes and L. Cescato and J. Frejlich. Gratings for metrology and process control. 2: Thin film thickness measurement. *Appl. Opt.*, 23:576–583, 1984.
- [34] P.A.M. dos Santos and J. Frejlich. Cristais Fotorrefrativos para Holografia em Tempo Real. *Rev. Fis. Apl. Inst.*, 2, 1987.
- [35] P. Yeh. Two-Wave Mixing in Nonlinear Media. *IEEE J. Quant. Elect.*, 25:484–519, 1989.
- [36] C.H. Kwak and S.Y. Park and H.K. Lee and E-H Lee. Exact solution of two-wave coupling for photorefractive and photochromic gratings in photorefractive materials. *Opt. Commun.*, 79:349–352, 1990.
- [37] J.M. Heaton, P.A. Mills, E.G.S. Paige, L. Solymar, and T. Wilson. Diffraction efficiency and angular selectivity of volume phase holograms recorded in photorefractive materials. *Opt. Acta*, 31:885–901, 1984.
- [38] M. Henry, S. Mallick, and D. Rouède. Propagation of light in an optically active electro-optic crystal of Bi₁₂SiO₂₀: measurement of the electro-optic coefficient. *J. Appl. Phys.*, 59:2650–2654, 1986.
- [39] Marco Andre F. Dias, Antonio C. Hernandes, Jessiel F. Carvalho, and Jaime Frejlich. Electro-optic coefficient measurement in photorefractive crystals with optical activity. In *SLA 97 – Symposium on Lasers and their Applications-PROCEEDING*, pages 272–274, Campinas-SP, 3-5 December 1997. H.Fregnito.
- [40] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1984.
- [41] Georgi P. Tolstov. *Fourier series*. Dover Publications, New York, 1962.

Índice Remissivo

- Abélès, Método de 156
Alinhamento de lentes 217
aleatória, Variaável 213
amortecido, Oscilador harmônico 171
amortecido, pulso 57
Amostragem de Whittaker-Shannon, Teorema de 211
Amplificadores Operacionais 228
amplificador, Constante de tempo de um 131
anisotrópicos, Propagação em meios 137
autocorrelação 214
- Babinet, Princípio de 87
Bernstein, Teorema de 209
biaxiais, Cristais 138
birrefringente, Refração num material 141
dispersão, Relação de 139
Eixo óptico em 139
Elipsoide de índice de refração 138
propagação, Modos próprios de 138
blazed por transmissão, Rede 100
Brewster, Ângulo de 37
- Campo de visão 10
Capacidade dos sistemas de registro 128
 Abordagem digital 128
 Abordagem analógica 129
cardinais, Planos 5
“circ”, Função 205
Circulação 18
Coerência 50
 Comprimento de 51
 e Espectro de Potência 48
 Tempo de 51
Constante de tempo de um amplificador 131
Conteúdo de informação de uma fotografia 130
convolução, Produto de 201, 88
 transformada de Fourier do 204
correlação, Ergodicidade da 216
 valor medio e auto- 214
- deformações, Medida de 127
Degrau, Função 202
 Transformada de Fourier 206
Delta de Dirac 201
Densidade de probabilidades 213
Diafragmas em sistemas ópticos 10
Difração 75
 espectro angular de ondas planas 93
 fenda, por uma 75
 Formalismo clássico 75
- Fraunhofer, Aproximação de 96
Fresnel, Aproximação de 95
Green, Teorema de 82
Huygens-Fresnel, Princípio de 75
Kirchhof, Formulação de 82, 84
orifício circular 97
pente de Dirac 80
Rayleigh-Sommerfeld, Formulação de 85, 95
rede retangular de amplitude 97
rede retangular de fase 99
rede senoidal de fase 98
Sistemas Lineares, Teoria dos 95
dinâmica, Holografia 122
dinâmicos, Leitura de hologramas 124
Dirac, Delta de 201
 Pente de 202, 206, 80
dispersão, Relações de 139
distribuição, Função 213
Divergência 18
Doppler, efeito 23
Doppler, Velocimetria de efeito 47
- Eixo óptico em materiais birrefringentes 139
eletro-óptico, Coeficiente 195
Elipsoide de índice de refração 138
Ergodicidade 215
 valor médio, do 215
 média temporal, e 215
 da correlação 216
Espectro angular de ondas planas 89
 Propagação e 90
espectro angular de ondas planas, Difração e 93
Espectro de potência 52
 Difração 93
 LED, de um 60
 ondas não estacionárias, de 53
 successão infinita de pulsos, de uma 54
estacionários, Processos 215
Estocásticos, Processos 213
evanescentes, Ondas 37
- Fator de qualidade 173
Fenda dupla 77
fendas, Múltiplas 79
 de Young 44
filmes e lâminas, Interferência e reflexões múltiplas em 65
Filmes finos: Método de Abélès 156
Filtro interferencial 62
focal, Plano 5
forçada, Ressonância 172
fotocondutivo, Regime 225

fotodetector, Medida da banda passante de um 177
 Fotodiodos 225
 fotovoltaico, Regime 225
 fotoconduutivo, Regime 225
 fotografia, Conteúdo de informação de uma 130
 fotorrefrativos, Materiais 122
 fotovoltaico, Regime 225
 Fourier, Dupla transformação de 107
 Fourier, Espectroscopia por transformação de 62
 Fourier, Sinal Analítico e Transformada de 63
 Fourier pelas lentes, Transformação de 103
 Fourier, Transformada de 203
 Fraunhofer, Aproximação de 96
 Fresnel, Aproximação de 95
 Fresnel, Equações de 35
 Funções especiais 205

Gauss, Teorema de 18, 81
 Goos-Hänchen na reflexão total, Efeito 91
 Green, Teorema de 82
 Gradiente 18
 grupo, Velocidade de 20
 geométrica, Óptica 3

harmônico, Geração do segundo 146
 Heaviside, Função de 202
 Hilbert, Transformada de 63
 Holografia 117
 Aplicações 125
 deformações, Medida de 127
 vibrações, Medida de 126
 Associatividade 121
 dinâmica 122
 Distributividade 121
 Material de registro 119
 Não linearidade e ruído de intermodulação 121
 Perspectividade 121
 Registro e leitura de 120
 hologramas dinâmicos, Leitura de 124
 Huygens-Fresnel, Princípio de 75

imagens, Processamento de 108
 incerteza, Relação de 207
 Indicatriz 138
 índice de refração, Elipsoide de 138
 do Quartz 163
 Índice de refração complexo 23
 informação de uma fotografia, Conteúdo de 130
 Informação, Teoria da 128
 Interferência 43
 lâmina de faces paralelas 44
 filmes e lâminas 65
 interferencial, Filtro 62
 Interferometria com luz de um LED 58
 Interferômetro de Michelson 46, 221
 intermodulação, Não linearidade e ruído de 121
 invariante, Sistema linear 88
 Inversa da frente de onda 138, 141

Jones, Matrizes de 30

Kirchhof, Formulação de 82, 84

lâminas, Interferência e reflexões múltiplas em filmes e 65
 Lâmpada de filamento incandescente 231
 Lâmpadas de descarga: Na e Hg 231
 Laser 233
 LEDs 231
 Interferometria com luz de um 58
 lentes, Alinhamento de 217
 Transformação de Fourier pelas 103
 lentes finas, Sistema de 8
 luz, Fontes de 231
 Natureza vectorial da 27
 Propagação da 17

Matrizes de Jones 30
 Matrizes ópticas 3
 Maxwell, Equações de 21
 Maxwell: relações vectoriais, Equações de 27
 Michelson, Interferômetro de 46, 221
 monocromática, Onda quase 55
 Modos próprios de propagação 138
 Multiplexing espacial 108

não estacionárias, Espectro de potência de ondas 53
 não linear, Óptica 143
 nodais, Pontos 7

onda eletromagnética, Equação da 23
 Ondas eletromagnéticas 21
 onda, Equação geral da 21, 137
 Ondas evanescentes 37
 Ondas harmônicas 17
 ondas não estacionárias, Espectro de potência de 53
 ondas planas, Difração e espectro angular de 93
 Onda quase monocromática 55
 Operadores vectoriais 18
 Óptica, Computação 128
 orificio circular, Difração por um 97
 Oscilação paramétrica 146
 Oscilador harmônico amortecido 171

paramétrica, Oscilação 146
 Parseval, Teorema de 204
 Pente de Dirac 202, 206, 80
 Planos cardinais 5
 Planos principais 6
 Poder de resolução de um sistema óptico 134
 Polarização 27
 linear 27
 elíptica 28
 potência, Espectro de 52
 ondas não estacionárias 53
 pulsos, sucessão infinita de 54
 Poynting e intensidade, Vetor de 32
 principais, Planos 6
 Processamento de imagens 108
 Processos estacionários 215
 Propagação 90

- filtro linear invariante 90
- meios anisotrópicos 137
- Propriedades 120
- probabilidade, Densidade de 213
- Processos estocásticos 214
- Pulso amortecido 57
- pulsos, Espectro de potência de uma sucessão infinita de 54
- Pulsos retangulares 54
- qualidade, Fator de 173
- Quartzo, Índices de refração do 163
- quase monocromática, Onda 55
- Rayleigh-Sommerfeld, Formulação de 85, 95
- Rede de difração 79
 - amplitude, retangular 97
 - fase, retangular 99
 - blazed 100
 - senoidal 98
- refletância em lâminas 65
- Reflexão e refração 34
- Reflexão total 37
- reflexões múltiplas em filmes e lâminas, Interferência 65
- Refração num material birrefringente 141
- refração, Elipsoide de índice de 138
 - Reflexão e 34
 - total 37
- registro, Capacidade dos sistemas de 128
- resolução de um sistema óptico, Poder de 134
- Resposta de um sistema 131
- Ressonância forçada 172
- retângulo, Função 205
 - Transformada de Fourier 205
- “rect” *vide* retângulo
- Rotacional 18
- ruído de intermodulação, Não linearidade e 121
- segundo harmônico, Geração do 146
- Sinal Analítico e Transformada de Fourier 63
- “sinc”, Função 205
- sistema óptico, Poder de resolução de um 134
- sistema, Resposta de um 131
- Sistemas lineares 88
 - Difração e Teoria dos 95
 - invariante 88
- sistemas de registro, Capacidade dos 128
- Stokes, Teorema de 18
- Tempo de coerência e comprimento de coerência 51
- total, Reflexão 37
- Transformada de Fourier 203
 - de uma gaussiana 206
 - Dupla 107
 - Espectroscopia por 62
 - Funções especiais 205
 - pelas lentes 103
 - Propriedades 203
 - Sinal Analítico e 63
- Transformada de Hilbert 63
- Transmitância em lâminas 65
- “ Λ ”, Função 205
- uniaxial, Cristal 140
- Up-conversion 147
- Velocidade de grupo 20
- vetoriais, Operadores 18
- vibrações, Medida de 126
- visão, Campo de 10
- Whittaker-Shannon, Teorema de amostragem de 211
- Young, Fendas de 44